MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

Olympiades nationales de mathématiques 2019

Amériques - Antilles - Guyane -

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes et indissociables de deux heures chacune, **les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents**. Les copies rédigées sont ramassées à l'issue de la première partie (« exercices nationaux »). Une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie (« exercices académiques »). Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l'épreuve.

Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Exercices nationaux

Les candidats traitent **deux exercices.** Ceux de la série S traitent les exercices numéros 1 (*Grands pairs…*) et 2 (*Des droites et des mots*), les autres traitent les exercices numéros 1 (*Grands pairs…*) et 3 (*Additionnons des points*).

Exercice national numéro 1 (à traiter par tous les candidats)

Grands pairs…

Dans ce problème, on ne considère que des nombres entiers naturels non nuls. Pour chacun de ces entiers, on numérote les chiffres de son écriture décimale de gauche à droite. Le premier chiffre de gauche ne peut être 0.
Par exemple, pour le nombre 3 021, le chiffre 3 reçoit le numéro 1, le chiffre 0 le numéro 2, le chiffre 2 le numéro 3 et le chiffre 1 le numéro 4.

On nomme « grand pair » tout nombre dont chaque chiffre en position paire, s'il y en a, est au moins aussi grand que ses chiffres directement voisins (s'il en a). On nomme « grand impair » tout nombre dont chaque chiffre en position impaire est au moins aussi grand que ses chiffres directement voisins (s'il en a).
Par exemple :
- le nombre 3 021 est un grand impair, mais pas un grand pair ;
- les nombres 3, 2, 7 et 777 sont à la fois des grands pairs et des grands impairs ;
- le nombre 2 019 n'est ni un grand pair, ni un grand impair.

1. Le nombre 384 957 est-il un grand pair ? Un grand impair ?

2. Déterminer les nombres qui sont à la fois des grands pairs et des grands impairs.

3. Parmi les nombres s'écrivant avec deux chiffres, y a-t-il davantage de grands pairs ou de grands impairs ?

4. ***a.*** Le nombre 3 021 peut-il s'écrire comme la somme de deux grands impairs ayant le *même* nombre de chiffres ?
b. Le nombre 3 021 peut-il s'écrire comme la somme de deux grands pairs ayant le *même* nombre de chiffres ?

5. Prouver que tout nombre entier peut s'écrire comme la somme de deux grands impairs (rien n'est ici imposé quant au nombre de chiffres de ces deux grands impairs).

6. Démontrer que tout nombre grand impair strictement inférieur à 100 peut s'écrire comme la somme de deux grands pairs (sans contrainte quant au nombre de chiffres de ces grands pairs).

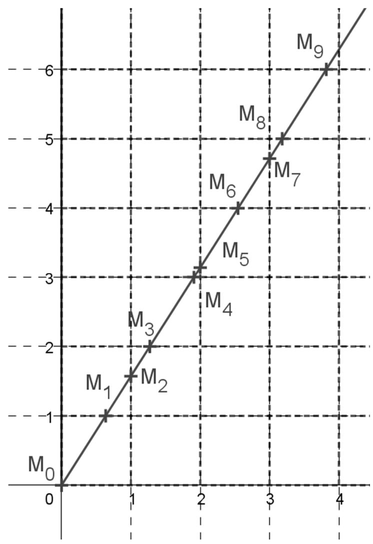
7. Déterminer le plus petit grand impair supérieur ou égal à 2 qui ne peut pas s'écrire comme la somme de deux grands pairs (sans contrainte quant au nombre de chiffres de ces grands pairs).

8. Compléter le pseudocode ci-dessous (ou s'en inspirer) pour rédiger un algorithme (à retranscrire sur sa copie), qui, partant d'un tableau « T » représentant un nombre « N » (par exemple 384 957) de « nb » chiffres (ici 6), renvoie « 1 » si N est un grand pair, et « 0 » sinon :

```
nb = 6                                          ## Commentaire : ici N = 384 957 est à 6 chiffres
T = [3 ; 8 ; 4 ; 9 ; 5 ; 7]                     ##Commentaire : ici T[1] = 3, T[2] = 8, T[3]=4, … ,T[nb]=7
resultat = 1
i = 1
…
while ((resultat == 1) and i≤ nb) :
        … … …
        i = i+2
print(resultat)
```

Exercice national numéro 2 (à traiter par les candidats de la série S)

Des droites et des mots



Le plan est rapporté à un repère orthonormé d'origine O. Dans tout le problème, on s'intéresse aux demi-droites issues de O et contenues dans le premier quadrant (ensemble des points du plan dont l'abscisse et l'ordonnée sont positives). À tout entier naturel n, on associe la droite d'équation $x = n$ et la droite d'équation $y = n$. L'ensemble de ces droites constitue un « quadrillage ».
Toute demi-droite (d) issue de O et de pente strictement positive possède des points d'intersection notés $\mathrm{M}_0, \mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2, \dots, \mathrm{M}_n, \dots$ avec les droites du quadrillage, les points étant numérotés dans l'ordre croissant de leurs abscisses. À chaque point M_i on associe la lettre H, la lettre V ou la lettre C selon qu'il est le point d'intersection de (d) avec une droite horizontale, une droite verticale ou les deux à la fois. On construit ainsi des « mots » de longueur infinie. Le mot correspondant à la figure ci-contre débute par : CHVHHVHVHH.

1. Représenter, dans un repère orthonormé d'unité 1 cm, la demi-droite d'équation $y = 1{,}5x$ et donner les huit premières lettres du mot qu'on peut lui associer.
2. Pourquoi les mots associés aux demi-droites commencent-ils tous par la lettre C ?

Un mot est dit « périodique » si une séquence se répète indéfiniment à partir de la première lettre. On appelle « motif » la plus petite séquence qui sé répète indéfiniment et « période » le nombre de lettres du motif.
Par exemple, CVVCVVCVVCVV … est un mot périodique de période 3 dont le motif est CVV.

3. Déterminer et représenter la demi-droite qui donne naissance au mot périodique de période 3 de motif CVV.

4. ***a.*** Montrer que si on rencontre la séquence VV dans le mot associé à une demi-droite, alors la pente de cette demi-doite est strictement inférieure à 1.
b. Que peut-on dire de la pente d'une demi-droite si on rencontre la séquence HH dans le mot associé ?
c. Tous les mots associés à une demi-droite commencent par C. Tout mot commençant par C est-il associé à une demi-droite ?

5. On suppose dans cette question que le point M_6 est associé à la septième lettre d'un mot de période 6. Quelles sont les droites pouvant conduire à ce résultat ? Quels mots leur sont associés ?

6. Énoncer et prouver une condition nécessaire et suffisante portant sur la pente d'une demi-droite pour que le mot qui lui est associé soit périodique.

7. On donne un entier naturel p non nul. Est-il possible de trouver un mot périodique de période p ?

8. Soit W le mot correspondant à la demi-droite de pente $\sqrt{2}$. Pour tout entier naturel n, le point d'intersection de la demi-droite avec la droite d'équation $x = n$ a pour lettre associée V : pourquoi ? On appelle $F_W(n)$ le nombre de lettres H précédant V dans l'écriture de W. La suite de terme général $\frac{F_W(n)}{n}$ possède-t-elle une limite ?

Exercice national numéro 3 (à traiter par les candidats des séries **autres** que la série S)

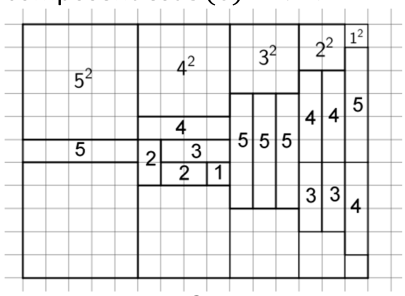
Additionnons des points

Somme de carrés

Un nombre entier n étant donné, on cherche dans cette partie à estimer

$$S(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2$$

Sur la photo ci-contre, on a représenté une pyramide de boulets de pierre, à base carrée, avec 6 étages qui contiennent $6^2, 5^2$, ….,1 boulets. Le nombre de boulets qui la composent est $S(6) = 91$.



1. Dans le cas $n = 5$, le puzzle présenté à gauche permet d'estimer $S(5)$. Comment ? Quelle valeur obtient-on par cette méthode ?

2. Les exemples précédents inspirent la formule $S(n) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

a. Montrer que l'entier $n(n+1)(2n+1)$ est bien un multiple de 2 et de 3.

b. Si on suppose que pour un certain n, sur lequel on ne fait aucune autre hypothèse, $S(n) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$, quelle formule obtient-on pour $S(n) + (n+1)^2$? On peut donc décider que la formule de $S(n)$ est vraie pour tout entier n.

3. Montrer que $S(24)$, somme des 24 premiers carrés, est un carré.

Addition sur une courbe

On considère l'ensemble (E) des points du plan dont les coordonnées (x, y) satisfont la relation

$$y^2 = \frac{1}{6}x(x+1)(2x+1)$$

4. Un peu d'exploration

a. Les points de coordonnées $(1, 1)$ et $(24, 70)$ appartiennent-ils à cet ensemble ? Fournir deux autres exemples.

b. Les points de coordonnées $(-2, 1)$ et $\left(-\frac{1}{4}, 3\right)$ appartiennent-ils à (E) ?

c. Quelles relations doit vérifier le réel x pour qu'il y ait un point d'abscisse x dans l'ensemble (E) ? Dans ce cas, combien y a-t-il de points d'abscisse x dans (E) ?

5. La forme de la courbe

a. Sur l'annexe qui servira aux tracés, on a représenté l'ensemble (E) qu'on appellera dorénavant courbe (E). On peut identifier des « branches infinies ».

Comment expliquer que le quotient $\frac{3y^2}{x^3}$ s'approche de 1 lorsque l'abscisse x du point de coordonnées (x, y) de la courbe devient très grande ? On a alors $\approx \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{3}}$.

b. Expliquer pourquoi la courbe (E) présente une partie « fermée ».

6. Somme de deux points

a. Sur la feuille annexe, à rendre avec la copie, on a représenté la courbe (E). Pour tout couple (A, B) de points distincts de la courbe (E), on trace la droite (AB). Quand elle recoupe la courbe en un troisième point D, on note $\mathrm{A}\oplus\mathrm{B}$ le symétrique de D par rapport à l'axe des abscisses. Représenter le point $\mathrm{A}\oplus\mathrm{B}$ sur la figure 1.

b. Pour tout point A de la courbe (E), on trace la tangente en A à la courbe (E). Quand elle recoupe la courbe (E) en un point D, on note $\mathrm{A}\oplus\mathrm{A}$ le symétrique de D par rapport à l'axe des abscisses. Représenter le point $\mathrm{A}\oplus\mathrm{A}$ sur la figure 2.

c. On note 2A $= \mathrm{A}\oplus\mathrm{A}$, 3A$= \mathrm{A}\oplus 2\mathrm{A}$, etc. Représenter le point 3A sur la figure 3.

7. Un système de codage

La correspondance entre Alice et Bruno est protégée par une clef : les quatre premières décimales de l'abscisse du point $ab\mathrm{M}$, obtenu de la manière suivante :

1. Ils choisissent ensemble un point M sur la courbe (E) ;
2. Alice choisit un entier a et ne donne à Bruno que les coordonnées du point $a\mathrm{M}$;
3. Bruno choisit un entier b et ne donne à Alice que les coordonnées du point $b\mathrm{M}$;

Dans ce processus, ils choisissent le point M de coordonnées (1, 1). Alice donne à Bruno les coordonnées (0,02083333, 0,06076389). Bruno donne à Alice les coordonnées (0,02908309, −0,07265188). En s'aidant du tableau fourni en regard, indiquer quelle est la clef.

k	Abscisse du point $k\mathrm{M}$	Ordonnée du point $k\mathrm{M}$
1	1	1
2	0,02083333	0,06076389
3	5,63265731	−8,73904883
4	1,06401114	1,07001139
5	0,02908309	−0,07265188
6	3,93363878	5,35550512
7	0,651426	−0,64256859
8	0,00115486	0,01389763
9	107,8640	−651,271826
10	26,5927	81,40364156