Additionnons des points
Éléments de solution

Somme de carrés

1. Le rectangle de longueur $1+2+3+4+5=15$ et de largeur $2\times5+1=11$ a été rempli avec le contenu de trois pyramides carrées de base 5^2, contenu qui a été détaillé « étage par étage ».
On a donc $15\times11=3\times S(5)$. Et donc $S(5)=55$.

2. *a.* Des nombres n et $(n+1)$, consécutifs, l'un est pair. Si n n'est pas multiple de 3 et $(n+1)$ non plus, alors $(2n+1)$ l'est (l'un a pour reste 1, l'autre pour reste 2, peu importe l'ordre, et leur somme a pour reste $1+2$, c'est-à-dire 0.

b. $S(n)+(n+1)^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+(n+1)^2=\frac{1}{6}(n+1)(6n+6+2n^2+n)$
$=\frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3)$. Nous avons établi un résultat général.

3. $S(24)=\frac{1}{6}\times24\times25\times49=4\times25\times49=(2\times5\times7)^2=70^2$.

Addition sur une courbe

1. Un peu d'exploration

a. On vérifie que $70^2=\frac{1}{6}(24\times25\times49)$, ce qui avait été fait à la question précédente, tout comme pour $1^2=\frac{1}{6}\times1\times2\times3$.

Pour $x=2$, on doit avoir $y^2=\frac{1}{6}\times2\times3\times5$. On en déduit que le point de coordonnées $\left(2,\sqrt{5}\right)$ appartient à l'ensemble, tout comme le point de coordonnées $\left(2,-\sqrt{5}\right)$.

b. Pour $x=-2$, on doit avoir $y^2=\frac{1}{6}\times-2\times-1\times-3$. Comme le second membre de l'égalité est négatif, il n'y a pas de solution en y. Pour $x=-\frac{1}{4}$, on doit avoir $y^2=\frac{1}{6}\times-\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}$, le second membre de l'égalité est négatif…

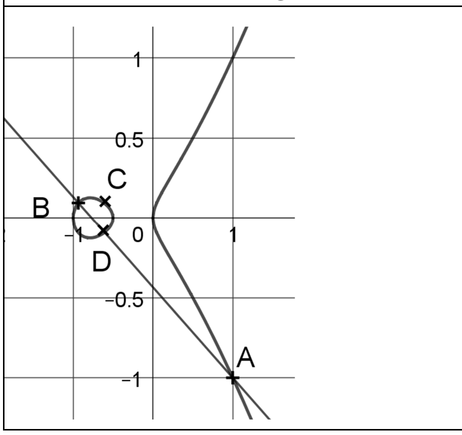
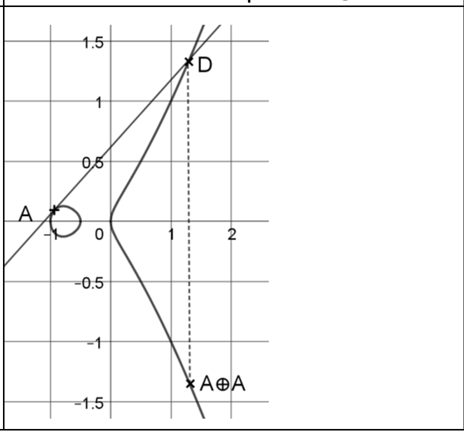
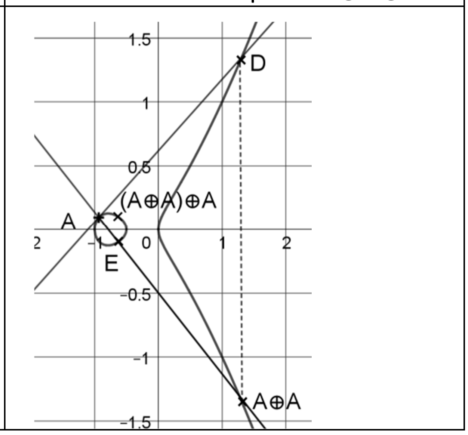
c. Pour qu'il y ait un point d'abscisse x donnée sur la courbe, il est nécessaire que $x(x+1)(2x+1)$soit positif. L'ensemble admissible pour x est donc $\left[-1,-\frac{1}{2}\right]\cup[0,+\infty[$. Pour une abscisse x située à l'intérieur d'un des deux intervalles, il y a deux ordonnées possibles, opposées, donc deux points sur la courbe, symétriques par rapport à l'axe des abscisses. Pour $x=-1, x=-\frac{1}{2}, x=0$, le point appartient à l'axe des abscisses.

2. La forme de la courbe

a. On a $\frac{3\times y^2}{x^3}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(2+\frac{1}{x}\right)$. Les deux facteurs figurant entre parenthèses au second membre s'approchent respectivement de 1 et 2 lorsque x tend croît. Donc le quotient figurant au premier membre s'approche de 2

b. Lorsque x décrit l'intervalle $\left[-1,-\frac{1}{2}\right]$, le point de la courbe d'abscisse x appartient à un arc de courbe situé au-dessus de l'axe des abscisses, ou à son symétrique situé au-dessous. Ces deux arcs se recollent aux points d'abscisses -1 et $-\frac{1}{2}$.

3. Somme de deux points

a. Construction de A⊕B	***b.*** Construction du point A⊕A	***c.*** Construction du point A⊕A⊕A
		

4. Un système de codage

Alice donne à Bruno les coordonnées (0,02083333, 0,06076389), qui sont les coordonnées de 2M. Bruno donne à Alice les coordonnées (0,02908309, −0,07265188), qui sont les coordonnées de M. La clef est donc constituée des quatre premières décimales de l'abscisse de 10M : 5 9 2 7.