Grands pairs et grands impairs (Toutes séries)

Éléments de solution

1. Le nombre $384\,957$ est un *grand pair*, mais pas un *grand impair*, car 8 est supérieur à 3.
2. Il faut (et il suffit) que tout chiffre soit plus grand que son successeur et plus petit que son successeur. Les nombres cherchés sont ceux dont tous les chiffres sont identiques.
3. Les *grands pairs* : $11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19,$
$22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 55, 56, 57, 58, 59, 66, 67, 68, 69,$
$77, 78, 79, 88, 89, 99$;
Les *grands impairs* : $10, 11, 20, 21, 22, 30, 31, 32, 33, 40, 41, 42, 43, 44, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 60, 61, 62, 63, 64,$
$65, 66, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99.$
Il y a davantage de *grands impairs* : 54 contre 45 (cela fait 99, ce qui est trop, mais les multiples de 11 sont comptés dans les deux catégories).

4. *a.* $3\,021 = 1\,000 + 2\,021 = 1\,010 + 2\,011$, cela fait deux sommes de grands impairs de quatre chiffres.
b. Comme on cherche deux *grands pairs* de quatre chiffres, aucun des deux ne peut avoir 2 comme chiffre des mille. Ils commencent donc par 1 l'un et l'autre… On trouve par exemple : $3\,021 = 1\,509 + 1\,512$
5. Le cas des chiffres $3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$, qui sont aussi bien des grands pairs que des grands impairs, se résout en écrivant chacun comme la somme de deux plus petits : $3 = 2 + 1, 4 = 3 + 1$, etc.
Si l'entier n s'écrit avec deux chiffres ou plus, on peut écrire $n = \overline{\imath P \imath P \imath P \ldots}$, où les chiffres "$P$" apparaissant sont plus grands que les "i" qui les encadrent. Les nombres $\overline{\imath 0 \imath 0 \imath 0 \ldots}$(avec le même nombre de chiffres que n) et $\overline{P0P0P0 \ldots}$ (avec un chiffre de moins que n) sont de grands impairs dont la somme est n (il n'y a jamais de retenue).
6. Considérons un *grand impair* N inférieur à 100. Supposons que N s'écrive avec deux chiffres. Il existe des chiffres a et b tels que $n = 10a + b$ et $a \geq b$. On peut alors écrire $N = (10(a-1) + a) + (10 + b - a)$. Cette somme a pour termes un nombre s'écrivant avec un seul chiffre $(10 + b - a)$, donc *grand* pair, l'autre en ayant deux si $a > 1$ et il est *grand pair* par construction. Dans le cas où $a = 1$, on fait apparaître deux nombres à un seul chiffre, *grands pairs*. Reste le cas des nombres s'écrivant avec un seul chiffre. À l'exception de 1, ils sont tous sommes de deux nombres à un seul chiffre.
7. La question précédente montre qu'il faut chercher parmi les nombres supérieurs ou égaux à 100. On trouve :
$100 = 45 + 55, 101 = 46 + 55, 102 = 47 + 55, 103 = 48 + 55, 104 = 49 + 55, 105 = 39 + 66,$
$106 = 38 + 68, 107 = 39 + 68, 108 = 79 + 29.$
Supposons qu'il existe des chiffres a, b, c, d tels que $109 = 10a + b + 10c + d$ et tels que $a \leq b$ et $c \leq d$. Pour que $109 = 10(a + c) + (b + d)$, il est nécessaire que $b + d > 10$, car sinon le second membre de l'égalité est inférieur ou égal à 100. Donc $b + d \geq 10$ et l'addition comporte une retenue, mais cela signifie que $b + d = 19$, ce qui est impossible pour des chiffres. Donc 109 est le nombre cherché.
8. On suit les indices de 2 en 2 en comparant $\mathrm{T}[i]$ à son prédécesseur et à son successeur. Tant que la comparaison reste à l'avantage de $\mathrm{T}[i]$, la variable « resultat » reste 1. Lorsque l'une des comparaisons tourne mal, « redultat » passe à 0 et l'algorithme s'achève sur ce résultat.