Les tables tournantes, solution alternative.

On se place dans le cas d'une table à n places, et on dispose de $n-1$ pièces de 1 et de $n-1$ pièces de 2. On a alors le résultat suivant :

Propriété. Il existe une distribution des pièces qui permette que chaque personne reçoive une pièce si et seulement si n est un multiple de 3.

Preuve. On numérote les personnes dans le sens horaire à partir d'une origine quelconque, et on raisonne modulo n.

Si $n = 3k$ est un multiple de 3 : en considérant la répartition $2, 2, 1$ par groupe de trois personnes consécutives, on voit facilement que c'est une distribution permettant que chacun reçoive une pièce à l'issue des échanges.

Réciproquement : supposons qu'il existe une telle distribution.
Du coup, on l'utilise... Or, il n'y a pas assez de pièces de 1 pour chacun, donc au moins une personne reçoit une pièce de 2 euros. De même, au moins une personne reçoit une pièce de 1.
Soit $a \in \{1, \cdots, n-1\}$ le nombre de personnes qui reçoivent une pièce de 2, et $x_1, x_2, \cdots, x_a$ les numéros de ces personnes. Les personnes de numéros $x_{a+1}, \cdots, x_n$ reçoivent donc des pièces de 1.
Les numéros $x_1, \cdots, x_n$ forment une permutation de $1, 2, \cdots, n$.

Après les deux échanges :
- pour $i = 1, \cdots, a$, les personnes de numéros $x_i + 1$ ont reçu une pièce de 2.
- pour $i = a+1, \cdots, n$, les personnes de numéros $x_i - 2$ ont reçu une pièce de 1.
Puisque chacun a une pièce après les échanges, c'est que les numéros $x_1 + 1, x_2 + 1, \cdots, x_a + 1, x_{a+1} - 2, \cdots, x_n - 2$ forment eux aussi une permutation de $1, \cdots, n$. Ainsi, modulo n, on a

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \equiv \sum_{i=1}^{a} (x_i + 1) + \sum_{i=a+1}^{n} (x_i - 2) \equiv \sum_{i=1}^{n} x_i + a - 2(n-a) \pmod{n}$$

et donc $3a \equiv 0 \pmod{n}$. Cela assure que $3a$ est un multiple de n, avec $0 < 3a < 3n$. Donc $3a = n$ ou $3a = 2n$ et, dans les deux cas, on a alors n multiple de 3.