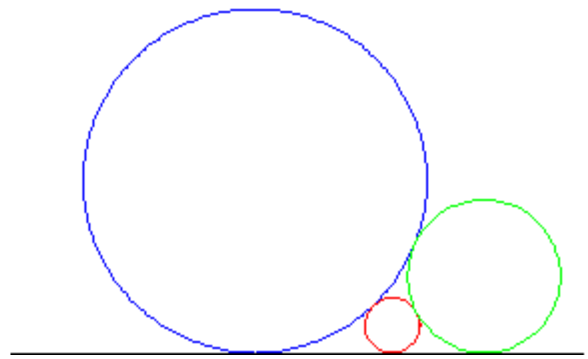
Exercices non retenus pour la session 2006

Sujet 1



Les cercles bleu, jaune et rouge sont tangents entre eux deux à deux, et tangents à la droite.
On demande de calculer le diamètre du cercle rouge, connaissant les diamètres respectifs des cercles bleu et vert.

Sujet 2

Soit n un entier naturel non nul.
Le but de l'exercice est de déterminer toutes les valeurs de n telles que le nombre $N = 1 + n + n^2 + n^3 + n^4$ soit le carré d'un nombre entier naturel.
Dans tout l'exercice, nous noterons donc x le nombre **réel** strictement positif tel que $x^2 = 1 + n + n^2 + n^3 + n^4$.
Le but de l'exercice est donc de trouver toutes les valeurs de n telles que x soit un entier naturel.

Question n°1 :

1. La valeur $n = 1$ convient-elle ?
2. La valeur $n = 2$ convient-elle ?
3. La valeur $n = 3$ convient-elle ?
4. La valeur $n = 4$ convient-elle ?

Question n°2 :

Montrer que l'on a $n^2 + \frac{n}{2} < x < n^2 + \frac{n}{2} + 1$.

Question n°3 :

En déduire que :

1. si n est pair, le problème n'admet pas de solution ;
2. si n est impair, on a alors $x = n^2 + \frac{n}{2} + \frac{1}{2}$.

Question n°4 :

Conclure.

Sujet 3

On dispose de deux récipients A et B pouvant contenir 1 litre de liquide chacun.
On réalise un mélange d'eau et d'alcool dans les conditions suivantes :

Au début de l'opération, le récipient A est rempli d'eau et le récipient B contient 0,25 litre d'alcool pur (et donc pas d'eau).
On mélange ensuite les liquides, sans perte, en renouvelant alternativement les deux étapes suivantes ;
Étape 1. On remplit complètement le récipient B avec le liquide du récipient A.
Étape 2. On remplit ensuite complètement le récipient A avec le liquide du récipient B.

On note a_n et b_n les volumes d'alcool, en litre, respectivement contenus dans les récipients A et B à l'étape n, avec $a_0 = 0$ et $b_0 = 0{,}25$.

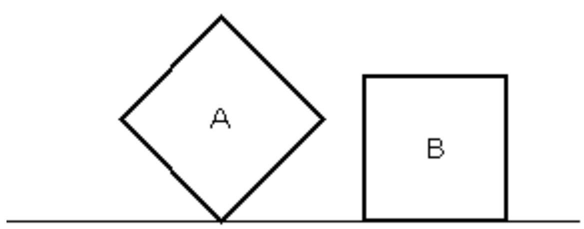
1. Déterminer sans calcul les limites de a_{2n} et b_{2n} quand n tend vers $+\infty$.
2. - Exprimer a_{2n+1} et b_{2n+1} en fonction de a_{2n} et b_{2n}, pour tour entier naturel n.
   - En déduire que, pour tout entier naturel n, on a : $\begin{cases} a_{2n+2} = \frac{13}{16}\, a_{2n} + \frac{3}{4}\, b_{2n} \\ b_{2n+2} = \frac{3}{16}\, a_{2n} + \frac{1}{4}\, b_{2n} \end{cases}$.
3. - Exprimer $a_{2n+2} + b_{2n+2}$, puis $a_{2n+2} - 4b_{2n+2}$ en fonction de n.
   - En déduire a_{2n} et b_{2n} en fonction de n.
   - Déterminer le nombre minimal d'étapes nécessaires pour obtenir un litre de liquide contenant entre 20% et $20{,}1\%$ d'alcool.

Sujet 4

(Exercice qui n'a pas eu sa chance en 2005...)
On se place dans le plan rapporté à un repère orthonormal.
Soit A et B deux points. On note S un ensemble de points M du plan tels que le triangle ABM ait pour aire 1.
Prouver que si S ne contient pas trois points alignés, alors S ne contient pas plus de quatre points.
Soit P un polygone convexe à 2005 sommets. Prouver qu'il n'existe pas plus de 2 676 675 triangles d'aire 1 dont les sommets sont tous les trois des sommets de P.

Sujet 5

Les deux carrés A et B de la figure suivante ont le même côté.
On demande de réaliser un découpage de chacun des deux carrés, de telle sorte que chaque morceau du carré B soit l'image d'un morceau du carré A par une translation.



Sujet 6

Les immatriculations des véhicules automobiles français dans le département des Hauts-de-Seine ont évolué. Au départ, un nombre entier compris entre 1 et 9 999 suivi de deux lettres, la dernière immatriculation étant 9999 ZZ 92, ensuite un nombre entier compris entre 1 et 999 suivi de trois lettres.

1. En admettant que les immatriculations se font «sans trou» et que toutes les lettres sont utilisées, quel est le rang de la voiture immatriculée 123 EFC 92 ?
2. Quelle est l'immatriculation de la 10 000 000-ième voiture ?

Sujet 7

1. Montrer que, pour tous réels a et b positifs, on a : $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$. Etudier le cas d'égalité.

2. En déduire que, pour tous réels positifs a, b, c et d, on a : $abcd \leq \left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^4$. Etudier le cas d'égalité.
3. En considérant un réel positif d bien choisi, montrer que, pour tous réels positifs a, b et c, on a : $abc \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3$. Etudier le cas d'égalité.
4. On donne trois réels a, b et c et la fonction polynôme P, définie pour tout x réel par : $P(x) = x^3 - \left(a^2 + b^2 + c^2\right)x - 2abc$.

   Montrer que, s'il existe un réel x_0 tel que $\begin{cases} P(x_0) = 0 \\ P'(x_0) = 0 \end{cases}$, alors $a^2 = b^2 = c^2$. Etudier la réciproque.