Exercices non retenus pour la session 2004

Les énoncés suivants ont été proposés à la cellule d'organisation des olympiades académiques de mathématiques. Ils n'ont pas été retenus dans la sélection finale mais ils peuvent constituer un bon terrain d'entraînement.
Remercions chaleureusement leurs auteurs...

Sujet n°1

On appelle tétraèdre la figure formée par quatre points non coplanaires, une médiane est le segment joignant un sommet au centre de gravité de la face opposée, une arête est un segment joignant deux sommets.
Montrer que dans tout tétraèdre la somme des longueurs des médianes est comprise entre les $\frac{4}{9}$ et les $\frac{2}{3}$ de la somme des longueurs des arêtes.

Sujet n°2

On appelle tétraèdre trirectangle de sommet O, tout tétraèdre ayant trois arêtes deux à deux orthogonales sécantes en O. On donne une sphère (S) passant par O, et on considère les tétraèdres trirectangles de sommets O dont les arêtes coupent la sphère (S) en trois points A, B et C.
Montrer que le plan (ABC) passe par un point fixe.

Sujet n°3

Où se trouvent les centres des cercles passant par un point donné et orthogonaux à un cercle donné ?

Sujet n°4

Soit P un point à l'intérieur du triangle ABC. Les trois segments passant par P et parallèle aux côtés de ABC, divisent le triangle en six régions dont trois sont triangulaires.
On note T l'aire de ABC, et T_1, T_2, T_3 les aires respectives des trois régions triangulaires.
Prouver que :$\mathrm{T} = \left(\sqrt{\mathrm{T}_1} + \sqrt{\mathrm{T}_2} + \sqrt{\mathrm{T}_3}\right)^2$.

Sujet n°5

On place 200301 points à l'intérieur ou sur les bords d'un carré de côté 1.

1. Prouver qu'il existe un carré de côté $\frac{1}{10}$ qui contient (bords compris) au moins 2004 ces points.
2. Prouver qu'il existe un disque de rayon inférieur à 0,071 qui contient (bords compris), au moins 2004 de ces points.
3. Prouver qu'il existe un disque de rayon inférieur à 0,0635 qui contient (bords compris) au moins 2004 de ces points.

Sujet n°6

Vendredi 13
Le 13 juin 2003 était un vendredi et c'était le seul vendredi 13 de l'année.
Combien peut-il y avoir de vendredi 13 dans une année?
Quelle est l'année la plus proche à venir comportant le plus petit nombre de vendredi 13 ?
Quelle est l'année la plus proche à venir comportant le plus grand nombre de vendredi 13 ?
Donner leurs dates.

Sujet n°7

Barycentres
Le triangle ABC étant donné, on appelle A', B' et C' les milieux respectifs de $[CA]$, $[BC]$ et $[AB]$. On place sur (BC),

(AC) et (AB) trois points M, N et P tels que (AM), (BN) et (CP) soient concourantes.

1. Soient M', N' et P' les symétriques de M, N et P par rapport à A', B' et C'. Les droites (AM'), (BM') et (CP') sont-elles toujours concourantes ?
2. En est-il de même si M', N' et P' sont les images de M, N et P par des homothéties de centres A', B' et C' et de rapport k ?

Sujet n°8

Démontrer que, pour tous x et y réels positifs :

1. $(x+y+1)(x+y+xy) \geq 9xy$.
2. $(x+y+2)(2x+2y+xy) \geq 18xy$.
3. Étudier les cas d'égalité.

Sujet n°9

Une chaîne de télévision propose chaque jour à ses téléspectateurs de choisir le film du soir parmi 2 proposés. Les 2 films sont annoncés dans l'après-midi, puis les téléspectateurs téléphonent à la chaîne et votent pour l'un des deux films. Sur le site Internet de la chaîne, on peut suivre l'évolution des votes en pourcentages.
Ainsi un jour, Albert constate que le score du film 1 est passé de 17,8 % à 29,2 %.
Déterminer le nombre minimal d'appels téléphoniques, depuis l'annonce des 2 films proposés jusqu'au score de 29,2 %. Combien de téléspectateurs, au minimum, ont voté pour le film 1 ?

Sujet n°10

En arts plastiques, les élèves repeignent le sol de leur salle avec trois couleurs : rouge, bleu, jaune (sans superposition de couleurs).
L'un d'entre eux sort un compas de sa trousse. Il choisit au hasard un écartement et parie qu'il pourra poser son compas sur le sol de sorte que les deux extrémités soient exactement sur deux points peints de la même couleur. Il est certain de gagner son pari. Pourquoi ?

Sujet n°11

1. On suppose :
   $x \in \mathbb{R}^*$ et $y \in \mathbb{R}$, $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = y^2$.
   Démontrer que $x^2 + \frac{1}{2}\,x < |y| < x^2 + \frac{1}{2}\,x + 1$.
2. On suppose :
   $x \in \mathbb{Z}^*$ et $y \in \mathbb{Z}$, $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = y^2$.
   Déterminer les valeurs de x et de y.

Sujet n°12

"Le truel"
Mr A , Mr B et Mr C décident de régler une querelle au pistolet jusqu'à ce qu'il ne reste plus qu'un survivant.
Mr A est le plus mauvais tireur, n'atteignant sa cible qu'une fois sur trois.
Mr B est un meilleur pistolet, atteignant sa cible deux fois sur trois.
Mr C est le meilleur des trois mettant dans le mille à tous les coups.
Pour égaliser les chances Mr A est autorisé à tirer le premier, puis ce sera le tour de Mr B s'il est encore en vie, suivi de Mr C s'il est également encore en vie et le tour reprendra jusqu'à ce qu'il n'y ait plus qu'un survivant.
Sur qui Mr A devrait-il tirer le premier coup de feu pour optimiser ses chances de survivre à l'issue de ce "truel" ?

Sujet n°13

On considère un triangle ABC équilatéral de côté $2a$.
De chacun des sommets comme centre construire le cercle de rayon a.

1. Construire le cercle C_1 de rayon r_1 qui enveloppe tangentiellement les trois cercles précédents et le cercle C_2 de rayon r_2 qu'ils enveloppent tangentiellement.
2. Comparer la moyenne arithmétique de r_1 et r_2 au rayon R du cercle circonscrit à ABC.
3. Comparer la moyenne géométrique de r_1 et r_2 au rayon C du cercle inscrit à ABC.

Sujet n°14

Si trois nombres x, y et z vérifient :
$x + y + z = 1$, $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ et $x^3 + y^3 + z^3 = 3$.
Que vaut $x^4 + y^4 + z^4$?

Sujet n°15

Soient B et C deux points du plan distincts et fixés.
But : déterminer la région où doit se trouver le point A pour que le triangle ABC ne soit ni rectangle, ni isocèle, qu'il ait tous ses angles aigus et que $[\mathrm{BC}]$ soit le côté le plus long.

1. Traduire en langage mathématique toutes les conditions de l'énoncé.
2. Pour chacune d'elles, déterminer la région du plan correspondante.
3. Représenter alors graphiquement la région du plan où doit se trouver A.

Sujet n°16

Le but de l'exercice est d'étudier l'expérience aléatoire suivante :
Une machine à sous fonctionne suivant le principe suivant : le joueur joue une somme de N euros qu'il répartit sur deux cases A et B et la machine joue M euros qu'elle répartit sur les mêmes cases.
Les deux adversaires jouent sans connaître le choix de l'autre.
Le joueur gagne si, sur l'une des cases au moins, il a misé une somme strictement supérieure à celle misée par la machine.

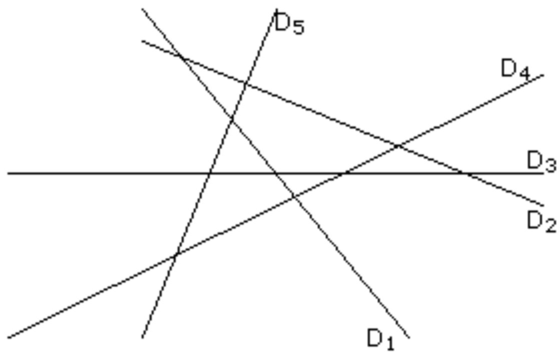
1. Justifier que si $\mathrm{N} > \mathrm{M}$, alors la probabilité que le joueur gagne est égale à 1.
2. Dans le cas où $\mathrm{N} = 7$ et $\mathrm{M} = 9$, quelle est la probabilité que le joueur gagne ?
3. On concidère dans toute la suite que N ≤ M.
   a. Le plan étant muni d'un repère orthonormal, déterminer et représenter l'ensemble E des points dont les coordonnées vérifient $0 \le x \le \mathrm{N}$ et $0 \le y \le \mathrm{M}$ et l'ensemble F des points de E dont les coordonnées vérifient $y < x$ ou $\mathrm{M} - y < \mathrm{N} - x$.
   b. x désigne la mise du joueur sur la case A et y celle de la machine sur la même case. Comment peut-on interpréter les points à coordonnées entières appartenant à E ? à F ?
   c. On admet que pour de grandes valeurs de N et de M, la probabilité d'un événement est proportionnelle à l'aire de la surface qu'il "occupe" dans E. Déterminer les aires R et R' des ensembles E et F. En déduire la probabilité pour que le joueur gagne.

Sujet n°17

1. Dans une urne se trouvent 10 papiers numérotés de 1 à 10. On en extrait deux au hasard et on les remplace par un autre sur lequel la différence positive des nombres extraits est indiquée. Par exemple, si on tire les nombres 3 et 7 on les remplace par $(7 - 3)$. Au bout de 9 opérations, il ne reste qu'un seul papier sur lequel est indiqué un nombre. Ce nombre est-il pair ou impair ?
2. On suppose qu'il y a n papiers numérotés de 1 à n. Quelle est la parité du dernier nombre suivant les valeurs de n ? Application au cas $n = 2004$.

Sujet n°18

Soit n un entier. On considère des droites Δ_1, Δ_2,...,Δ_n, telles que parmi ces droites il n'y en ait pas deux distinctes qui soient parallèles, ni trois distinctes qui soient concourantes.
Ces droites partagent le plan en régions, de sorte qu'aucune des droites ne traverse l'intérieur d'une quelconque de ces régions.
La figure ci-dessous donne un exemple de configuration pour $n = 5$, avec 16 régions dont 4 sont des triangles.



1. Dans cette question seulement, on suppose que $n = 5$.
   Donner un exemple de configuration pour laquelle, parmi les régions, il y ait exactement 3 triangles.
2. Dans cette question seulement, on suppose que $n = 7$.
   Donner un exemple de configuration pour laquelle, parmi les régions, il y ait exactement 5 triangles.
3. Si $n \geq 3$ est fixé, prouver que quelle que soit la configuration, le nombre de régions qui sont des triangles est au moins $n - 2$.

Sujet n°19

Démontrer que, pour tout *x* et tout *y* réels positifs, on a : $\left(x + y^3 + 2\right)^4 \geq 256xy^3$.
Etudier le cas de l'égalité.

Sujet n°20

On appelle partition d'un entier naturel non nul toute décomposition en une somme d'entiers naturels non nuls, y compris celle réduite à un terme.
Il y a, bien sûr, plusieurs partitions pour un entier donné ; le but de ce problème est de déterminer celles dont le produit est maximal.

A. Etude d'un exemple
   $2 + 2 + 4 = 8$ montre une partition de l'entier 8. Son produit vaut $2 \times 2 \times 4 = 16$.
   Déterminer les 22 partitions de 8 et calculer le produit de chacune.
B. Cas général
   On recherche les partitions de produit maximal d'un entier donné supérieur ou égal à 2.
   1. Prouver que, dans une partition de produit maximal :
      a. il n'y a aucun terme égal à 1,
      b. il n'y a aucun terme strictement supérieur à 4.
   2. Prouver que, pour une partition donnée, on peut trouver une partition de même produit sans aucun terme égal à 4.
   3. Prouver que, dans une partition de produit maximal, il n'y a pas plus de deux termes égaux à 2.
   4. Déterminer les partitions de produit maximal d'un entier donné supérieur ou égal à 2.

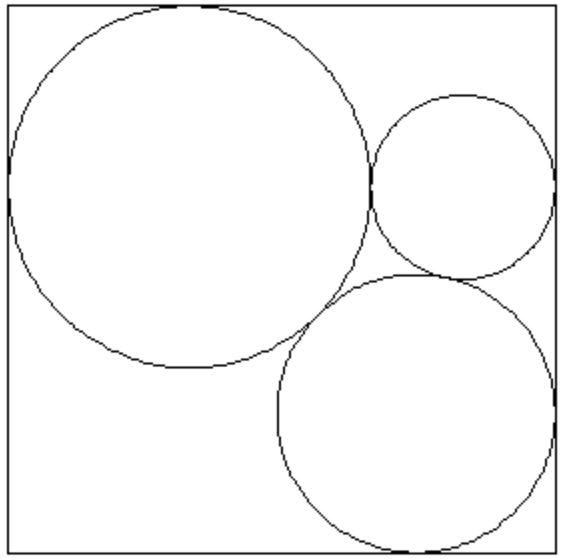
Sujet n°21

On considère deux réels strictement positifs *p* et *s*.

1. On considère un triangle isocèle de périmètre *p* et d'aire *s*.
   Lorsque ce triangle est équilatéral, quelle relation est vérifiée par *p* et *s* ?
   Un triangle isocèle dont le périmètre *p* et l'aire *s* vérifient la relation trouvée ci-dessus est-il équilatéral ?
2. Combien existe-t-il, à une isométrie près, de triangles isocèles de périmètre *p* et d'aire *s* ?

Sujet n°22

Dans le carré suivant de côté 1, on a dessiné 3 cercles tangents entre eux, un grand, un moyen et un petit.
Le grand cercle et le cercle moyen sont tangents à 2 côtés du carré, le petit cercle est tangent à un côté.
Le centre du grand cercle et le centre du petit sont sur une même droite parallèle au côté du carré.
Quelles sont les distances séparant les centres des cercles? Quels sont les rayons des cercles ?



Sujet n°23

Soit ABC un triangle. On note *R* (resp. *r*) le rayon de son cercle circonscrit (resp. inscrit), h_A la longueur de la hauteur issue de A, et *a* la longueur du côté [BC].
Prouver que : $r \times a < R \times h_A$.

Sujet n°24

Une société de jeux émet des billets de loterie.
Chaque billet comprend 9 cases à gratter contenant chacune un nombre compris entre 1 et 9.
Pour découvrir si un billet est gagnant il faut gratter la première case en partant de la gauche : le nombre qui apparaît est alors le rang (en partant de la gauche) de la prochaine case à gratter. On continue ainsi jusqu'à ce qu'il ne soit plus possible de gratter de case.
Un billet est gagnant lorsque toutes les cases ont pu être grattées.
Par exemple : - Le premier grattage fait apparaître un 3 ; on gratte alors la $3^{\text{ème}}$ *case en partant de la gauche qui laisse apparaître un 4 ; la* $4^{\text{ème}}$ *case grattée donne un 5, la* $5^{\text{ème}}$ *donne 1 : le billet n'est pas gagnant.*
Le billet 234567891 est gagnant.
Sachant que la société de jeux émet tous les billets dont les cases cachent 9 nombres distincts, quelle est la proportion de billets gagnants ?

Sujet n°25

On construit une suite de 20 nombres choisis uniquement parmi 0 et 1.
Combien y a-t-il de possibilités si on impose qu'il n'y ait :

1. Jamais deux termes consécutifs égaux ?
2. Jamais trois termes consécutifs égaux ?

Sujet n°26

Prouver que, parmi 100 entiers donnés entre 1 et 100 inclus, distincts ou non, il en existe une partie (non vide) dont la somme des termes est un multiple de 100.
Prouver que, si parmi 99 entiers donnés entre 1 et 100 inclus, distincts ou non, il n'existe aucune partie non vide dont la somme des termes soit un multiple de 100, alors ces 99 entiers sont tous égaux.