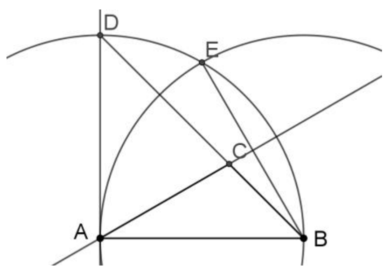
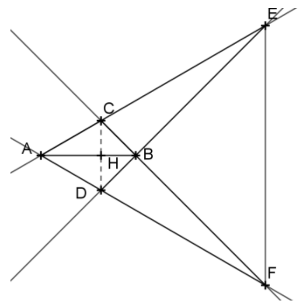
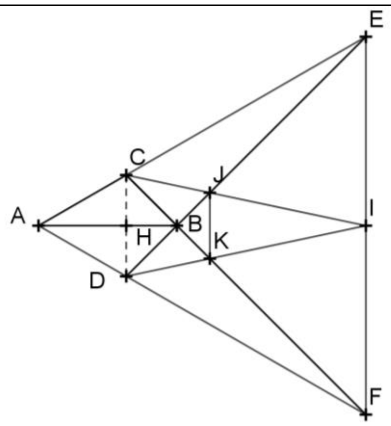
Olympiades nationales 2020
Zone Amériques
Éléments de solution

Exercice 1
L'oiseau et le cerf-volant

1. Réalisation de la figure

- Un triangle rectangle isocèle ABx fournit l'angle de 45°, un demi-triangle équilatéral fournit l'angle de 30°	- Obtention des points D, H, E et F	- On achève la figure et on ôte les traits de construction
		

2. Dimensions du cerf-volant ABCD
a. Le triangle ACD est isocèle de somment principal A (à cause de la symétrie) et son angle au sommet mesure 2x30°= 60°. Il est équilatéral.
Le triangle BCD est isocèle de sommet principal B (la symétrie) et son angle au sommet mesure 2x45° = 90°. Il est rectangle isocèle.
b. $\mathrm{AH} = \mathrm{AC}\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\mathrm{CH} = \frac{1}{2}\mathrm{AC}$ (triangle équilatéral). Comme $\mathrm{CH} = \mathrm{HB}$ (triangle rectangle isocèle), on en déduit que $\mathrm{AC}\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{AC} = \mathrm{AB} = 1$. Par conséquent $\mathrm{AC} = \frac{2}{1+\sqrt{3}}$ et $\mathrm{BC} = \mathrm{CH}\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}$.
c. L'aire $\mathcal{A}$ du cerf-volant est $\mathcal{A} = \mathrm{AB} \times \mathrm{CH} = \frac{1}{1+\sqrt{3}}$. Son périmètre est $\mathcal{P} = 2\mathrm{AC} + 2\mathrm{BC} = \frac{4+2\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}$

N.B. Les résultats précédents peuvent être donnés sous une forme différente (par exemple $\mathrm{AC} = \sqrt{3} - 1)$.
L'important est qu'ils soient corrects et correctement amenés.
3. ***a.*** Les droites (AD) et (CB) étant symétriques des droites (AC) et (BD), respectivement, par rapport à (AB), les points E et F le sont aussi et pour la même raison (mesure des angles) que dans la question **2.** le triangle AEF est équilatéral et le triangle EBF rectangle en B et isocèle.
b. La hauteur AI du triangle équilatéral AEF a pour longueur la somme $\mathrm{AB} + \mathrm{BI}$; $\mathrm{AB} = 1$ et $\mathrm{BI} = \frac{1}{2}\mathrm{EF} = \frac{1}{2}\mathrm{AE}$. On a donc $\mathrm{AE}\frac{\sqrt{3}}{2} = 1 + \frac{1}{2}\mathrm{AE}$, ce qui conduit à $\mathrm{AE} = \sqrt{3} + 1$ et donc $\mathrm{CE} = \sqrt{3} + 1 - \sqrt{3} + 1 = 2$;
c. $\mathrm{BE} = \mathrm{EF}\frac{\sqrt{2}}{2}$ et donc $\mathrm{BE} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$.
4. ***a.*** L'existence du cercle inscrit est due à la propriété rappelée et non démontrée (la symétrie entraîne l'égalité des distances et a fortiori des sommes de distances)
La formule donnant le rayon du cercle inscrit fournit $R = \frac{1}{2+\sqrt{2}}$
b. Le point G est sur [AB] puisqu'il est sur les bissectrices des angles du quadrilatère ACBD. Le projeté orthogonal L de G sur [AC] est aussi le point de contact de [AC] avec le cercle inscrit. Donc $\mathrm{GL} = R$ et, comme le triangle AGL est un demi-triangle équilatéral, $\mathrm{AG} = 2R = 2 - \sqrt{2}$.
c. Le triangle CHP est rectangle en C, on applique le théorème de Pythagore pour trouver $CP^2 = CH^2 + HP^2$ qui donne finalement $\mathrm{CP} = \sqrt{2}$.

d. Comme $\mathrm{AP} = 2$, le cercle de centre P de rayon $\sqrt{2}$ coupe (AP) en G.
e. Voir figure plus bas.

5. *a.* L'aire du triangle BCE est donnée par $\frac{1}{2}BC \times BE$. Elle vaut donc $\frac{1}{2}$.
Le périmètre de ce triangle est, tous calculs faits, $2 + \sqrt{6}$
b. Le calcul proposé nous permet de déterminer le rayon du cercle inscrit *dans* le triangle BCE : $R' = \frac{\sqrt{6}-2}{2}$
c. Le centre du cercle inscrit *dans* le triangle BCE est le point de concours des bissectrices intérieures de ce triangle. L'une est (GE), car G est équidistant des droites (DE) et (AC), une autre est perpendiculaire à (AB) en B (car (AB) est la bissectrice extérieure de l'angle B du triangle BCE) ; le centre cherché est donc leur point d'intersection.

6. Figure finale