

# TRANSFORMÉE DE FOURIER DISCRÈTE

Ce module s'inscrit en complément des enseignements de théorie du signal délivrés dans les autres matières. Les étudiants y ont observé qu'un signal déterministe possède une « empreinte spectrale », constituée de raies dans le cas d'un signal périodique, continue dans le cas d'un signal de durée finie, plus complexe dans le cas général.

C'est dans ce cadre général que se pose la question du calcul effectif du spectre d'un signal sur une machine (ordinateur, analyseur de spectre), et qu'intervient la transformée de Fourier discrète (TFD). Après l'avoir définie, le professeur la mettra en œuvre sur ordinateur dans quelques cas concrets, et commentera, en interdisciplinarité, les imperfections constatées (repliement de spectre, ondulations). Les propriétés élémentaires de la transformée de Fourier discrète (TFD) seront ensuite exposées, et vérifiées sur machine.

Un dernier paragraphe portera sur le filtrage numérique et sa réalisation par TFD et TFD inverse. Cet apport est un approfondissement qui peut être utile aux étudiants souhaitant des compléments spécifiques au traitement du signal. À ce titre, il ne fait pas l'objet d'une évaluation et pourra être enseigné durant les heures d'accompagnement personnalisé (AP).

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES	COMMENTAIRES
<p><b>Définition mathématique de la transformée de Fourier discrète (TFD)</b></p> <p>On note <math>\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}</math>, <math>n \geq 2</math> entier naturel donné</p> <p>La TFD d'une séquence <math>(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})</math> de <math>n</math> complexes est une séquence <math>(X_0, X_1, \dots, X_{n-1})</math> de <math>n</math> nouveaux complexes</p> <p>Observation de la TFD d'une acquisition (éventuellement complétée de zéros) à la cadence <math>T_{ech}</math> d'un signal</p>	<p>Placer <math>1, \omega, \dots, \omega^{n-1}</math>, ainsi que <math>1, \omega^{-1}, \dots, \omega^{-(n-1)}</math> sur le cercle unité.</p> <p><math>\omega^n = 1</math> Simplifier <math>\omega^k</math>, <math>k \in \mathbf{Z}</math> sur des exemples.</p> <p><math>X_\ell = \sum_{k=0}^{n-1} x_k \cdot \omega^{-k \cdot \ell}</math> Calcul sur logiciel de la TFD à l'aide d'une matrice de TFD. Calculer la TFD à l'aide de commandes logicielles prêtes à l'emploi.</p> <p>Traiter une sinusoïde, jouer sur <math>T_{ech}</math>, le nombre de zéros ajoutés aux bords (« Zero Padding »), le nombre total d'échantillons. Lecture critique du résultat.</p>	<p>Ces notions seront illustrées avec des valeurs précises de <math>n</math> (2, 3, 4, 5 ...).</p> <p>Le symbole <math>\omega</math> utilisé ici est parfois noté <math>w</math>, pour éviter toute confusion avec une pulsation en sciences physiques</p> <p>L'algorithme de transformée de Fourier discrète rapide (FFT) est hors programme. Son existence peut cependant être évoquée.</p> <p>Expérimentations à faire sur un logiciel de calcul vectoriel (type Scilab) et, en interdisciplinarité, sur l'analyseur de spectre. Il est admis en mathématiques que la première moitié de cette TFD approxime le spectre du signal originel aux fréquences <math>0, \frac{1}{n \cdot T_{ech}}, \frac{2}{n \cdot T_{ech}}, \dots, \frac{1}{2 \cdot T_{ech}}</math>.</p>

<p><b>Propriétés mathématiques élémentaires de la transformée de Fourier discrète (TFD)</b></p> <p>Linéarité de la TFD</p> <p>Réversibilité de la TFD</p> <p>Effet d'une conjugaison</p> <p>Formule de Bessel</p> <p>Effet d'un décalage fréquentiel</p>	<p><i>TFD</i> d'une somme, éventuellement pondérée.</p> $x_k = \frac{1}{n} \sum_{\ell=0}^{n-1} X_{\ell} \cdot \omega^{+k \cdot \ell}$ $\overline{TFD(\overline{x_0}, \overline{x_1}, \dots, \overline{x_{n-1}})} = n \cdot TFD^{-1}(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$ $\sum_{k=0}^{n-1}  x_k ^2 = \frac{1}{n} \sum_{\ell=0}^{n-1}  X_{\ell} ^2$ $TFD(x_0, x_1 \cdot \omega, \dots, x_{n-1} \omega^{n-1}) = (X_{n-1}, X_0, \dots, X_{n-2})$	<p>Admis, et à vérifier sur logiciel à partir d'un exemple.</p> <p>Formule non exigible de mémoire</p> <p>Admis, et à vérifier sur logiciel à partir d'un exemple. En interdisciplinarité : interprétation énergétique.</p> <p>Formule non exigible de mémoire. À vérifier sur logiciel à partir d'un exemple. En interdisciplinarité : opération connue sous le nom de transposition fréquentielle.</p>
<p><b>Propriétés avancées de la transformée de Fourier discrète (TFD), opération de filtrage numérique</b></p> <p>Convolution aperiodique de deux suites <math>(\dots, u_{-1}, u_0, u_1, \dots)</math> et <math>(\dots, h_{-1}, h_0, h_1, \dots)</math></p> <p>Convolution circulaire d'une séquence <math>(u_0, u_1, \dots, u_{n-1})</math> par une autre de même longueur <math>(h_0, h_1, \dots, h_{n-1})</math></p> <p>TFD d'une convolution circulaire</p> <p>Filtrage d'une suite <math>(u_0, u_1, \dots)</math> causale infinie par une séquence <math>(h_0, h_1, \dots, h_{\ell-1})</math></p>	<p><math>(u * h)_k = \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} u_{k-\ell} \cdot h_{\ell}</math>  Expliciter <math>(u * h)_k</math> quand les suites <math>u</math> et <math>h</math> sont causales, et que <math>h</math> est de longueur finie et courte.</p> <p><math>(u \otimes h)_k = \sum_{\ell=0}^{n-1} u_{k-\ell} [n] \cdot h_{\ell}</math>  Expliciter <math>(u \otimes h)_k</math> pour des valeurs précises de <math>n</math>.</p> <p><math>TFD(u \otimes h) = TFD(u) \cdot TFD(h)</math></p> <p><math>u \otimes h = TFD^{-1}(TFD(u) \cdot TFD(h))</math></p> <p>Introduction à la méthode d'« Overlap and Save ».</p>	<p>La formule pourra ne pas être présentée telle que aux étudiants, mais en renversant <math>h</math> puis en la décalant.</p> <p>La formule pourra ne pas être présentée telle que aux étudiants, mais en renversant <math>h</math> puis en la faisant tourner autour de <math>u</math>.</p> <p>Admis.</p> <p>Des expériences sur des fichiers sons pourront être faites sur logiciel.</p>