Olympiades nationales 2020
Zone Asie-Pacifique
Éléments de solution

Exercice 2
Les mathématiques Wasan

1. *a.* Dans le triangle équilatéral de côté a, les hauteurs ont toutes la même longueur $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ et le centre de gravité (qui est aussi le centre du cercle circonscrit au triangle) est situé aux deux tiers de chacune des hauteurs/médianes en partant du sommet. Le rayon du cercle est donc $R = \frac{2}{3} \times \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{\sqrt{3}}$

b. Les centres des trois cercles de rayon r sont les sommets d'un triangle équilatéral de côté $2r$. Les hauteurs de ce triangle équilatéral ont pour longueur $r\sqrt{3}$ et la distance du centre du cercle extérieur à un centre de cercle « intérieur » est $\frac{2}{3} \times r\sqrt{3} = \frac{2r}{\sqrt{3}}$. Chacune de ces hauteurs coupe le cercle extérieur et un cercle intérieur au point de contact entre ces deux cercles. Le rayon du cercle extérieur est donc $r' = r + \frac{2r}{\sqrt{3}}$, ou encore $r' = \left(1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}\right) r$.

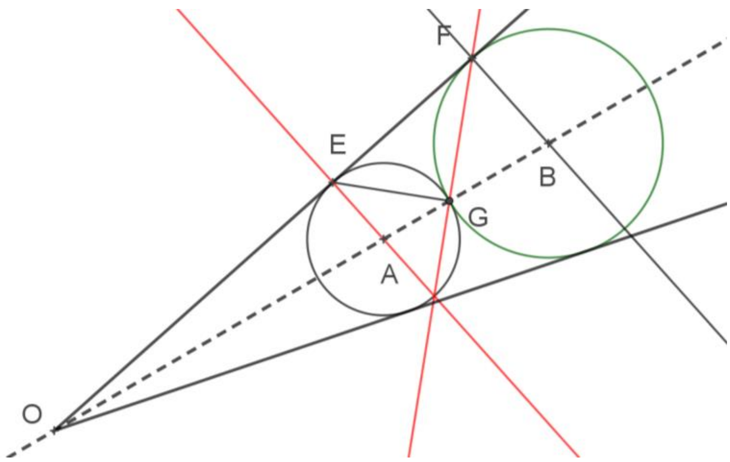
2. *a.* On applique le théorème de Pythagore au triangle $\mathrm{O_1O_2E}$ rectangle en E, sachant que $\mathrm{AB} = \mathrm{O_2E}$. Cela s'écrit : $AB^2 = (r_1 + r_2)^2 + (r_1 - r_2)^2$, d'où le résultat.

b. (i) D'après ce qui précède, on a $\mathrm{AC} = 2\sqrt{rr_1}$, $\mathrm{CB} = 2\sqrt{rr_2}$ et $\mathrm{AB} = 2\sqrt{r_1r_2}$.
On en déduit que $\sqrt{r_1r_2} = \sqrt{rr_1} + \sqrt{rr_2}$. En élevant au carré chaque membre de l'égalité :
$r_1r_2 = r(r_1 + r_2) + 2r\sqrt{r_1r_2}$. C'est le résultat annoncé.
(II) Sans que cela soit obligatoire, on peut supposer que r_1r_2 est un carré parfait et même que chacun des deux facteurs en est un. Si on pose $r_1 = a^2$ et $r_2 = b^2$, on obtient $r = \frac{a^2b^2}{a^2+b^2+2ab} = \left(\frac{ab}{a+b}\right)^2$. On cherche alors un couple (a, b) pour lequel ab est un multiple de $a + b$. Par tâtonnement, les couples $(3, 6)$, $(4, 12)$, $(5, 20)$, etc., dans lesquels la seconde projection est un multiple de la première, conviennent. Ce ne sont pas *a priori* les seuls. Les triplets $(9, 36, 4)$, $(16, 144, 9)$, $(25, 400, 16)$, etc. répondent au problème posé.

c. On applique le théorème de Pythagore au triangle $\mathrm{LO_1C}$, rectangle en C.
(I) On obtient : $R^2 = \left(R - \frac{a}{2}\right)^2 + (R - a)^2$, soit encore $R^2 + \frac{5}{4}a^2 - 3aR = 0$
(II) Cette égalité s'écrit aussi $\left(R - \frac{3}{2}a\right)^2 - a^2 = 0$, ou encore $\left(R - \frac{5}{2}a\right)\left(R - \frac{1}{2}a\right) = 0$. La seule solution admissible ici est $a = \frac{2}{5}R$.

3. Suites de cercles

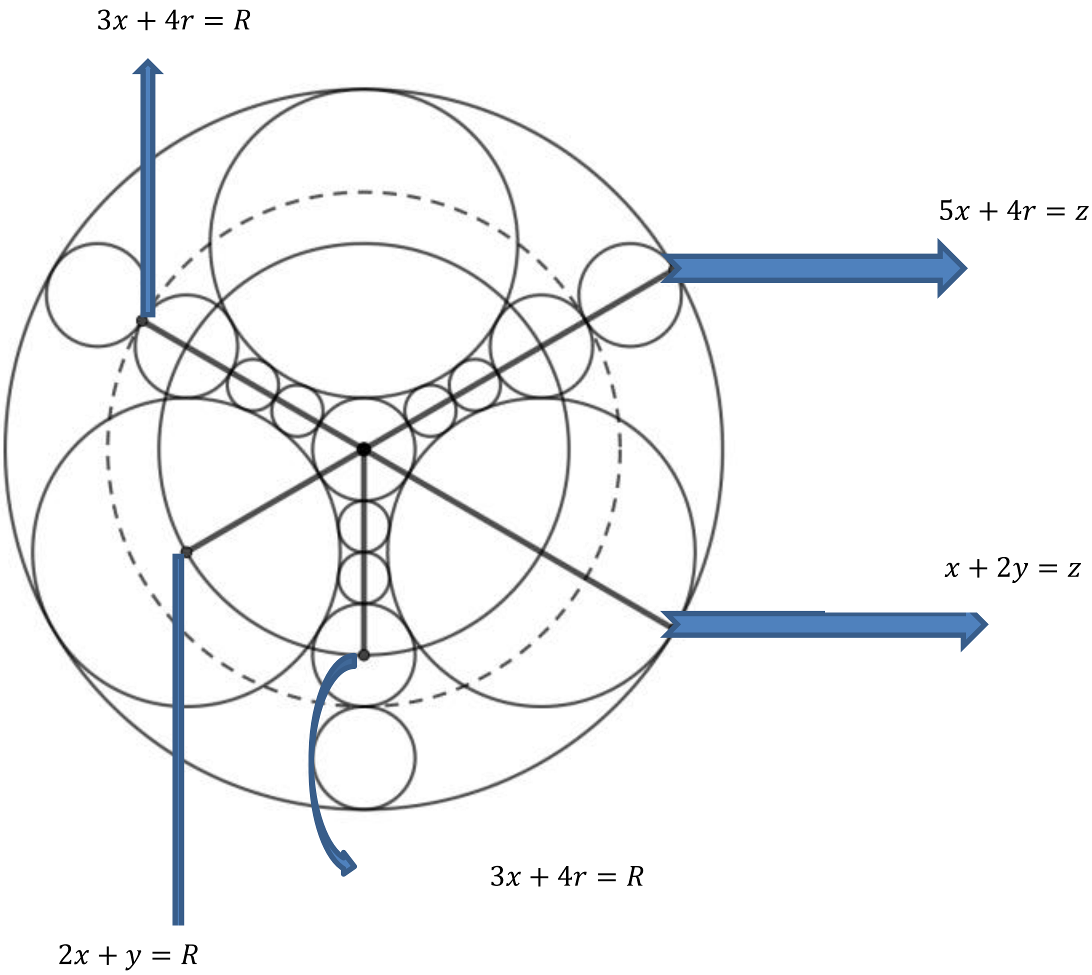
Les droites (EG) et (GF) sont perpendiculaires : en effet, en application de la propriété de la tangente au cercle, l'angle $\widehat{\mathrm{GEF}}$ a pour mesure la moitié de celle de $\widehat{\mathrm{GAE}}$ et l'angle $\widehat{\mathrm{GFE}}$ a pour mesure la moitié de celle de $\widehat{\mathrm{FBG}}$. Leur somme est donc moitié de la somme de $\widehat{\mathrm{GAE}}$ et $\widehat{\mathrm{FBG}}$; ces deux derniers angles étant supplémentaires (un effet du parallélisme), la somme cherchée est donc 90°, le dernier angle du triangle GEF ayant donc pour mesure 90°. Les droites (EG) et (GF) sont perpendiculaires.



a. et ***b.*** Le point A est situé sur la bissectrice de l'angle formé par les demi-droites initiales. Sa projection orthogonale sur l'une de ces demi-droites est le point E. Le cercle de centre A coupe la bissectrice (pointillés) en G (et en un autre point, qui fournirait une solution « à gauche », mais on a supposé $R_1 < R_2$). La perpendiculaire à (EG) en G coupe la demi-droite [OE] en F et la perpendiculaire à [OF] et F coupe la bissectrice en B. Le cercle de centre B rencontre la bissectrice en un point G'. L'angle $\widehat{\mathrm{G'FE}}$ a pour mesure la moitié de cette de l'angle $\widehat{\mathrm{FBG'}}$… qui est le même que l'angle $\widehat{\mathrm{FBG}}$. Ce qui conduit au fait que G et G' sont un seul point. La construction est donc réussie.

c. En considérant les triangles rectangles OAE et OBF, on obtient $R_1 = \mathrm{OA}\ \sin\alpha$ et $R_2 = \mathrm{OB}\ \sin\alpha$. On a donc $\mathrm{OG} = \mathrm{OA}(1 + \sin\alpha)$ d'une part, $\mathrm{OG} = \mathrm{OB}\ (1 - \sin\alpha)$, d'où le résultat.

4. *a.* et ***a.*** En suivant les indications de l'énoncé (mais sans nommer les points de la figure qui est muette), on obtient les cinq égalités suivantes :



On élimine d'abord z, ce qui fournit $2x + 2r - y = 0$, puis y, ce qui fournit $4x + 2r - R = 0$, et enfin x, pour aboutir au résultat $R = 10r$.

N.B. Il semble qu'on n'ait écrit que 4 égalités, puisque 2 sont identiques, mais c'est parce qu'on a comme indiqué par l'énoncé considéré que la différence entre les rayons du cercle pointillé et du cercle intérieur plein était le rayon d'un disque rouge, le cercle plein passant par les centres des disques verts.