Académie de Versailles | **Année scolaire 2012-2013**

Mathématiques « outillées »

Sujet numéro 13-02 | **Classe de première S**

Le mésolabe d'Eratosthène

Sur le support du côté [OA] d'un triangle OAB rectangle isocèle en A, tel que $\mathrm{OA}=1$, on place un point M, sommet principal d'un triangle rectangle isocèle $\mathrm{MB'O'}$ obtenu à partir de OAB par la translation de vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$.

On note C le milieu de $[\mathrm{MB'}]$. La droite (OC) coupe $[\mathrm{OB'}]$ en D. Soit M_1 le pied de la perpendiculaire abaissée de D sur (OM). On place sur la figure les points $\mathrm{B''}$ et $\mathrm{O''}$ formant avec M_1 un triangle rectangle isocèle aux côtés parallèles à ceux des précédents.

1. Faire la figure en utilisant un logiciel de géométrie dynamique.

2. On appelle *m* l'abscisse du point M dans un repère (O, A, I), où I est le quatrième sommet du carré OABI. Quelle est l'équation réduite de la droite (OC) dans ce repère ? Quelles sont les coordonnées du point D ?

Appeler le professeur pour la vérification de cette figure

3. Faire varier le point M de sorte que le point D soit un point de [AB]. Où sont alors les points $\mathrm{B'}$, $\mathrm{O'}$ et M_1 ? Évaluer dans cette situation le rapport $\dfrac{\mathrm{DB''}}{\mathrm{CB'}}$ On pourra consulter le résultat fourni par le logiciel, puis faire le calcul (qui passe par la résolution d'une équation du second degré en *m*).

4. La droite (OC) coupe le segment [AB] en E. Faire varier le point M de sorte que le point E soit un point de $[\mathrm{O''B''}]$. Écrire l'équation d'inconnue *m* correspondant à cette situation.

Appeler le professeur pour lui soumettre les résultats obtenus

Le but du problème est à présent la détermination du rapport $\dfrac{\mathrm{EB}}{\mathrm{DB''}}\cdot$ On peut montrer qu'il est égal à $\sqrt[3]{2}$ (la racine cubique de 2 est le nombre positif dont le cube est 2). La résolution de l'équation du troisième degré en *m* n'est pas nécessaire pour cela.

Académie de Versailles

Mathématiques « outillées »

Année scolaire 2012-2013

Sujet numéro 13-17

Première

Parabole et foyer

On considère le plan muni d'un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ et f la fonction carré.

Soit A un point de la courbe représentative (C) de la fonction f et (T) la tangente à (C) en A.

On note (D) la perpendiculaire à (T) en A et (d) la parallèle à l'axe des ordonnées et passant par A.

1. Utiliser un logiciel pour représenter ces différents éléments.

> Appeler l'examinateur pour une vérification de la figure

2. On considère l'image (d_1) de la droite (d) par la symétrie d'axe (D). Que constate-t-on concernant cette droite (d_1) lorsque A varie sur la courbe (C) ?

> Appeler l'examinateur pour lui exposer la conjecture

3. On appelle $\left(x_A, y_a\right)$ les coordonnées du point A.
    a) Déterminer une équation de la tangente à (C) en A puis une équation de la droite (d).
    b) Soit B le point de coordonnées $\left(0, \dfrac{1}{4}\right)$. Montrer que la droite (AB) est la droite (d_1).
    c) Conclure.

Académie de Versailles | **Mathématiques « outillées »** | **Année scolaire 2012-2013**

Sujet numéro 13-26 | **Seconde et première**

D'une fonction à une autre

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

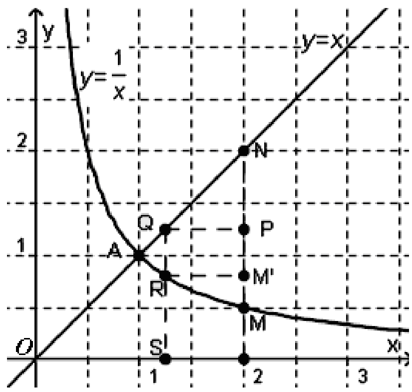
1. *a.* À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, représenter la droite Δ d'équation $y = x$ ainsi que la courbe C_f de la fonction *f* définie sur $\left]0,+\infty\right[$ par : $f\left(x\right)=\dfrac{1}{x}\cdot$

b. Soit M un point de la courbe C_f. On construit successivement les points N et P tels que :

- N est le point de Δ qui a même abscisse que M ;
- P est le milieu de [MN].

Construire ensuite, dans cet ordre, les points Q, R, S et M' tels que :

- Q est le point de Δ qui a même ordonnée que P ;
- R et S ont même abscisse que Q et appartiennent respectivement à C_f et. à l'axe des abscisses ;
- M' a même ordonnée que R et même abscisse que M.



c. Quelles sont les coordonnées des points N, P, Q, R, S et M' lorsque M a pour abscisse 2 ?

d. Tracer le lieu de P et celui de M' lorsque M décrit la courbe C_f.

Appeler le professeur pour une vérification et une aide éventuelle

2. Soit *a* un réel quelconque, strictement positif et soit M le point de C_f d'abscisse *a*.

a. Exprimer les coordonnées des points M et N en fonction de *a*. En déduire que P appartient à la courbe d'équation $y=\dfrac{x^2+1}{2x}\cdot$ Tous les points d'abscisse positive de cette courbe sont-ils atteints ?

b. Déterminer les coordonnées de Q, R et S. En déduire comme ci-dessus une équation de la courbe décrite par M'. Contrôler ce résultat en utilisant les fonctionnalités du logiciel.

Appeler le professeur pour une vérification et une aide éventuelle

Académie de Versailles

Sujet numéro 13-28

Mathématiques « outillées »

Année scolaire 2012-2013

Première ou terminale S

Propriétés des tangentes à la parabole

Dans un repère orthonormal du plan d'origine O, on considère la parabole (P) d'équation $y = x^2$.

Soit a et b deux réels distincts. On désigne par :

- ✓ A et B les points de (P) d'abscisses respectives a et b
- ✓ T_A et T_B les tangentes à (P) en A et B (respectivement) et C leur point d'intersection.

La parallèle à l'axe des ordonnées, et passant par C, coupe (P) en M et [AB] en N. On appelle T_M la tangente à (P) au point M.

1. Réaliser une figure à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.

2. En variant la position des points A et B, observer :

   a. la position de N sur [AB] et celle de M sur [CN]

   b. la position relative des droites (AB) et T_M.

3. Utiliser les fonctionnalités du logiciel pour consolider ces observations.

Appeler le professeur pour une vérification de la figure et des conjectures

4. *a.* Calculer l'abscisse de C.

   b. Quelles sont respectivement les positions de N sur [AB] et de M sur [CN] ?

   c. Quel est le coefficient directeur de T_M ? et celui de (AB) ? Conclure.