

LES MATHÉMATIQUES DE L'ENSEIGNEMENT SCIENTIFIQUE INTRODUCTION

Dans la rubrique « suggestions pédagogiques » du programme de première de l'enseignement scientifique, un paragraphe est consacré à la place particulière qu'y jouent les mathématiques. Destinée à tous les professeurs en charge de cet enseignement pluridisciplinaire quelle que soit leur discipline d'origine, cette introduction explicite les objectifs et les modalités d'utilisation de sept ressources mathématiques en lien avec les quatre thèmes du programme.

Thème 1 : une longue histoire de la matière

Ressource 1 : la désintégration radioactive

Ressource 2 : les cristaux

Thème 2 : le Soleil, notre source d'énergie

Ressource : le rayonnement solaire

Thème 3 : la Terre, un astre singulier

Ressource : la forme de la Terre et les mesures à la surface de la Terre

Thème 4 : son et musique, porteurs d'information

Ressource 1 : les sons purs et composés

Ressource 2 : la musique ou l'art de faire entendre les nombres

Ressource 3 : la numérisation et le codage d'un son

Objectifs visés

- Expliciter, pour chacun des thèmes considérés, le rôle majeur joué par les mathématiques dans la description et la compréhension du monde et illustrer la célèbre phrase de Galilée selon laquelle « le grand livre de la Nature est écrit en langage mathématique ». Pour ce faire, à l'intérieur de chaque ressource, la rubrique « les mathématiques et [titre de la ressource] » précise les notions et les méthodes mathématiques mises à l'œuvre et la manière dont elles y « fonctionnent », notamment à travers les modèles qui y sont utilisés. La notion de modèle mathématique est explicitée dans un paragraphe ultérieur.
- Proposer des activités permettant d'illustrer le thème considéré. Au-delà de leurs liens avec ce thème, ces activités permettent de consolider, d'approfondir et d'élargir les connaissances et les compétences mathématiques acquises par les élèves au cours de la scolarité obligatoire et de la classe de seconde en matière de calcul, de géométrie, du traitement de données numériques, d'algorithmique et de programmation. Ces connaissances et compétences sont complétées par un volet historique, culturel et épistémologique.
- Fournir des éléments bibliographiques et sitographiques.

Modalités d'enseignement

L'enseignement scientifique offre à tous les élèves de première de la voie générale des occasions de pratiquer les mathématiques dans des contextes nouveaux et sous des formes variées : analyse de documents, mise en place de raisonnements et de calculs, utilisation d'outils numériques, présentation d'une démarche (modélisation, simulation, interprétation et contrôle des résultats). Tout ceci contribue au développement de compétences scientifiques mais aussi d'aptitudes de portée plus générale : prise d'initiative, créativité, esprit critique, argumentation et communication par écrit ou par oral.

Afin d'assurer la cohérence de la formation des élèves qui suivent la spécialité « mathématiques », les ressources suggèrent également des approfondissements possibles, en lien avec le programme de cette spécialité.

Les sept ressources sont complétées par des animations Geogebra © repérées par le logo ci-après.



Ces animations sont disponibles à l'aide d'un [livret Geogebra ©](#).

Certaines activités se prêtent également à l'utilisation d'un tableur.

D'autres peuvent être l'occasion d'écrire un programme en langage Python, elles sont alors repérées par le logo ci-après.



Retrouvez éduscol sur :



Le concept de modèle mathématique

En articulation avec les autres sciences dans la description, la compréhension du monde réel et la prédiction de ses évolutions, un rôle particulier est dévolu aux mathématiques dans l'élaboration et le traitement de « modèles ». Un modèle mathématique est une transcription théorique d'objets, de structures ou de situations issus du monde réel pouvant être de nature et d'origine variées (physique, biologique, sociale, économique, etc.). Cette transcription, qui s'opère souvent à partir d'hypothèses simplificatrices, s'exprime par des relations entre des grandeurs inconnues, des grandeurs connues et des paramètres. Les résultats fournis par le modèle sont aujourd'hui issus de calculs sur ordinateur et de simulations informatiques. La confrontation de ces résultats à des observations réelles peut ensuite conduire à limiter le domaine de validité du modèle, à le faire évoluer, voire à l'abandonner au profit d'un autre.

Le programme de première offre plusieurs occasions de présenter des modèles mathématiques simples et de faire comprendre comment ils « fonctionnent », notamment à travers les animations numériques proposées. De manière non exhaustive, on peut citer quelques modèles mis à l'œuvre dans le programme et les traitements mathématiques auxquels ils se prêtent :

- le modèle discret de décroissance exponentielle pour décrire la radioactivité : mise en œuvre de simulations, calculs de demi-vie, datation ;
- le modèle géométrique des réseaux cristallins : visualisation, calculs de compacité et de masse volumique en articulation avec des propriétés physico-chimiques des cristaux ;
- les modèles historiques de représentation de la Terre et du Soleil, Terre plate à distance finie du Soleil attribué à Anaxagore, Terre sphérique à distance infinie du Soleil selon Eratosthène : comparaison des deux modèles, calcul de longueurs à la surface de la Terre dans le cas d'un modèle sphérique ;
- le modèle des fonctions sinusoïdales pour représenter des sons purs et celui des fonctions périodiques pour représenter des sons composés.

En conclusion, les ressources proposées illustrent la place à la fois naturelle et singulière des mathématiques dans un enseignement scientifique pluridisciplinaire. Cet enseignement doit contribuer à l'acquisition par chaque élève d'une culture scientifique, mais aussi de savoirs et de savoir-faire mathématiques aujourd'hui indispensables pour réussir pleinement sa vie personnelle, professionnelle et sociale.

Retrouvez éduscol sur :



LES MATHÉMATIQUES DE L'ENSEIGNEMENT SCIENTIFIQUE LA DÉSINTÉGRATION RADIOACTIVE

Mots-clés

Décroissance radioactive ; demi-vie ; datation.

Références au programme

Aborder la question de la diversité des éléments chimiques nécessite de s'intéresser aux noyaux atomiques et à leurs transformations. Cela fournit l'occasion d'introduire un modèle mathématique d'évolution discrète.

Savoirs

Certains noyaux sont instables et se désintègrent (radioactivité).

L'instant de désintégration d'un noyau radioactif individuel est aléatoire.

La demi-vie d'un noyau radioactif est la durée nécessaire pour que la moitié des noyaux initialement présents dans un échantillon macroscopique se soit désintégrée. Cette demi-vie est caractéristique du noyau radioactif.

Savoir-faire

- Calculer le nombre de noyaux restants au bout de n demi-vies.
- Estimer la durée nécessaire pour obtenir une certaine proportion de noyaux restants.
- Utiliser une représentation graphique pour déterminer une demi-vie.
- Utiliser une décroissance radioactive pour une datation (exemple du carbone 14).

Notions mathématiques mobilisées

- Proportions, pourcentages, puissances.
- Notation scientifique.
- Modèle discret de décroissance exponentielle. Approche du modèle continu.
- Lecture graphique et interprétation.
- Algorithmique et programmation.

Histoire, enjeux, débats

La radioactivité est un phénomène naturel découvert par hasard en 1896 par Henri Becquerel alors qu'il faisait des recherches sur la fluorescence des sels d'uranium. Il constate qu'une plaque photographique en contact avec des sels d'uranium est impressionnée même dans l'obscurité. Il en conclut que l'uranium émet son propre rayonnement. Cette radiation est en fait due à la désintégration de certains noyaux d'uranium. Le phénomène de désintégration de noyaux instables est baptisé « radioactivité » en 1898 par Pierre et Marie Curie qui découvrent d'autres substances radioactives naturelles comme le plutonium et le radium. L'avancée majeure suivante est réalisée en 1934 par Irène Curie et Frédéric Joliot à travers la production d'une substance radioactive n'existant pas dans la nature. Cette découverte de la radioactivité artificielle ouvre la porte à la création contrôlée de noyaux radioactifs et la possibilité de réactions en chaîne susceptibles de fournir une quantité considérable d'énergie. La Seconde Guerre mondiale cristallise ces recherches dont les applications militaires sont évidentes. La première bombe atomique est mise au point par une équipe de scientifiques dirigée par Robert Oppenheimer. Elle explose le 16 juillet 1945 dans le désert du Nouveau Mexique. Les 6 et 9 août 1945, deux bombes atomiques sont lâchées sur les villes japonaises d'Hiroshima et Nagasaki.

En dehors de ses applications militaires, la fission nucléaire a de nombreuses applications civiles, tant dans le domaine industriel (production d'électricité dans les centrales nucléaires) que médical où elle est à la fois utilisée à des fins diagnostiques et thérapeutiques. Le radium, grâce à ses propriétés radioactives, a été massivement utilisé jusque dans les années 40, pour ses propriétés curatives. En raison des dangers dus au rayonnement radioactif, l'utilisation du radium a été interdite en 1937 pour toutes les applications non médicales.

Les mathématiques et la désintégration radioactive

Les mathématiques permettent de modéliser la radioactivité à l'échelle microscopique (un seul noyau instable) et à l'échelle macroscopique (une population de noyaux dont l'effectif est de l'ordre du nombre d'Avogadro, soit 6×10^{23}).

À l'échelle individuelle, il est impossible de prédire la date de désintégration d'un noyau instable : sa durée de vie est aléatoire. L'expérience prouve que le phénomène de désintégration radioactive satisfait aux deux conditions suivantes :

- un noyau instable ne vieillit pas : sa probabilité de désintégration par unité de temps reste constante au cours du temps ;
- la désintégration d'un noyau n'affecte pas celle des autres.

Un modèle probabiliste, défini par une loi de probabilité, rend compte de ces deux conditions. Des simulations numériques permettent d'appréhender ce modèle.

À l'échelle macroscopique, des expériences de comptage permettent de conjecturer que le nombre de noyaux radioactifs d'un échantillon se désintégrant sur une courte durée est proportionnel à la fois au nombre de noyaux présents à l'instant initial et à la durée d'observation.

Retrouvez éduscol sur :



Traduction mathématique

Dans le cas où la durée d'observation est petite par rapport à la durée de vie des noyaux, la traduction mathématique est la suivante :

$$N(t + \Delta t) - N(t) = -\lambda \times N(t) \times \Delta t$$

où, t désigne l'instant du début de l'observation (un nombre positif ou nul) ;

Δt la durée de l'observation (un nombre strictement positif) ;

$N(t)$ le nombre de noyaux présents dans l'échantillon à l'instant t ;

$N(t + \Delta t)$ le nombre de noyaux présents dans l'échantillon à l'instant $t + \Delta t$;

λ un nombre positif.

Le coefficient λ est indépendant du temps car il s'agit d'un phénomène sans vieillissement. Cela ne serait pas le cas pour la durée de vie d'un être humain, le nombre d'années lui restant à vivre dépendant de son âge.

Remarque (hors programme) :

La relation ci-dessus permet d'obtenir le nombre de noyaux présents dans l'échantillon à des instants distants de Δt . Le modèle proposé est donc un modèle discret.

L'égalité précédente peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t} = -\lambda \times N(t)$$

Un passage à la limite en faisant tendre la durée d'observation Δt vers 0, dans l'égalité précédente, permet d'aboutir à l'équation différentielle :

$$N'(t) = -\lambda \times N(t) \text{ (notation mathématique) ou } \frac{dN}{dt} = -\lambda \times N \text{ (notation physique).}$$

Si la condition initiale est $N(0) = N_0$, la solution de cette équation différentielle est :

$$N(t) = N_0 \times e^{-\lambda t}$$

On obtient un modèle continu du nombre de noyaux présents à n'importe quelle date t .

La fonction exponentielle n'étant pas connue d'une partie des élèves, sa présentation n'est pas attendue. L'allusion qui y est faite ici, destinée aux professeurs, sera utilisée dans le paragraphe suivant sur la demi-vie.

Demi-vie d'un élément radioactif

La demi-vie d'un noyau radioactif, également appelée période radioactive, est la durée nécessaire pour que la moitié des noyaux initialement présents dans un échantillon macroscopique se soit désintégrée. En raison de l'absence de vieillissement, cette demi-vie, caractéristique du noyau considéré, est indépendante de l'instant initial. La demi-vie est, généralement, notée $T_{1/2}$.

Retrouvez éduscol sur :



Les demi-vies des noyaux radioactifs couvrent une gamme extrêmement large de valeurs, comme le montrent les données suivantes :

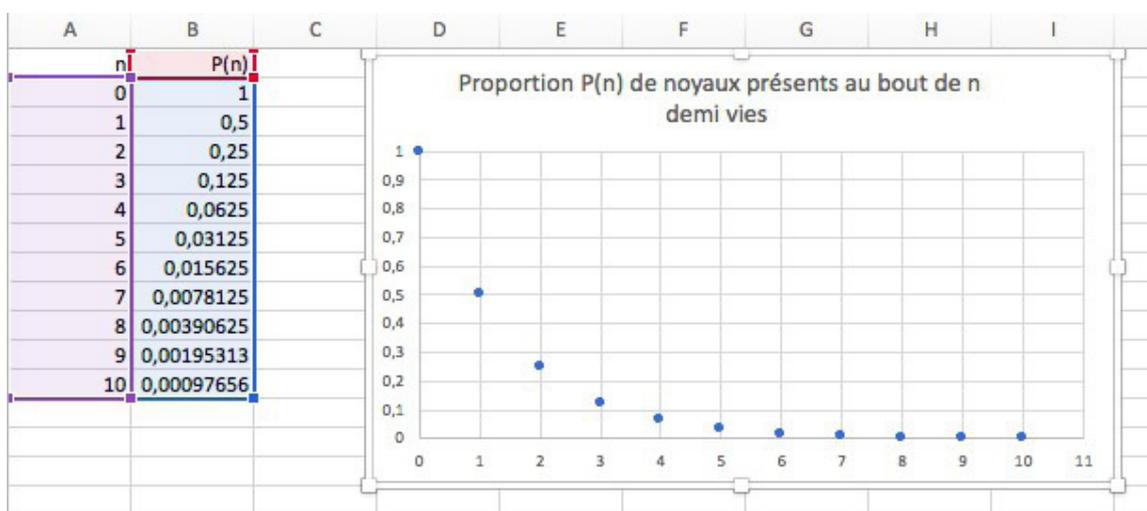
- Uranium 238 : $4,5 \times 10^9$ ans ;
- Plutonium 239 : $2,4 \times 10^4$ ans ;
- Carbone 14 : 5730 ans ;
- Iode 131 : 8 jours ;
- Radon 220 : 56 secondes ;
- Polonium 213 : 4×10^{-6} secondes.

Considérons que le nombre de noyaux présents dans l'échantillon à la date initiale (que l'on peut choisir égale à 0 quitte à changer l'origine du temps) est égal à N_0 ,

- Au bout d'une demi-vie, il reste $\frac{N_0}{2}$ noyaux dans l'échantillon.
- Au bout de deux demi-vies, le nombre de noyaux restant à cette date est de nouveau divisé par deux, soit $\frac{\frac{N_0}{2}}{2} = \frac{N_0}{4} = \frac{N_0}{2^2}$.
- Au bout de trois demi-vies, le nombre de noyaux est divisé de moitié, soit $\frac{N_0}{8} = \frac{N_0}{2^3}$, et ainsi de suite.
- Au bout d'un nombre entier n de demi-vies, le nombre de noyaux restant est égal à $\frac{N_0}{2^n}$.

Le modèle mathématique discret qui traduit cette évolution est donc celui d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

Le graphique ci-dessous obtenu à l'aide d'un tableur fournit la proportion de noyaux restants au bout de 0, 1, 2... 10 demi-vies.



La loi de désintégration affirme que, pour une courte durée Δt :

$$N(t + \Delta t) - N(t) = -\lambda \times N(t) \times \Delta t.$$

Donc on détermine λ en mesurant $N(t)$, $N(t + \Delta t)$ et Δt .

Retrouvez éducol sur :



On admet que la demi-vie $T_{1/2}$ et la constante radioactive λ sont inversement proportionnelles, avec :

$$T_{1/2} \approx \frac{0,693}{\lambda}.$$



Télécharger l'animation Geogebra © intitulée « [notion de demi-vie](#) ». En déplaçant le point rose et le curseur bleu, cette animation permet d'illustrer graphiquement la notion de demi-vie.

Remarque (hors programme) : cette dernière relation se justifie dans le cadre du modèle continu avec $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$.

En effet, pour tout réel positif t , $\frac{N(t+T_{1/2})}{N(t)} = \frac{e^{-\lambda(t+T_{1/2})}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda T_{1/2}} = \frac{1}{2}$.

D'où $\lambda \cdot T_{1/2} = \ln(2) \approx 0,693$.

Datation au carbone 14

Le carbone 14, de notation symbolique ^{14}C , est produit dans la haute atmosphère lors de réactions nucléaires induites par des protons rapides d'origine galactique. Sa proportion dans les environnements terrestres, où l'on trouve du carbone en contact avec l'atmosphère, est à peu près constante et connue : elle est de $1,3 \times 10^{-12}$ noyaux de carbone 14 pour 1 noyau de carbone 12. Lorsqu'un être vivant (individu, plante...) cesse de vivre, son métabolisme cesse et le carbone qu'il contient n'est plus renouvelé. Le carbone 14 se désintègre alors, avec une demi-vie de 5 730 ans. À partir des mesures du ^{14}C encore présent dans les restes (os, cheveux, bois), on peut déterminer le moment où la vie s'est arrêtée. On peut ainsi dater des événements qui se sont déroulés il y a des milliers d'années. Au-delà de 30 000 ans, la plus grande partie des noyaux de carbone 14 se sont désintégrés et le comptage ne peut plus se pratiquer.

Propositions d'activités

Activité 1 : simulation de la désintégration radioactive

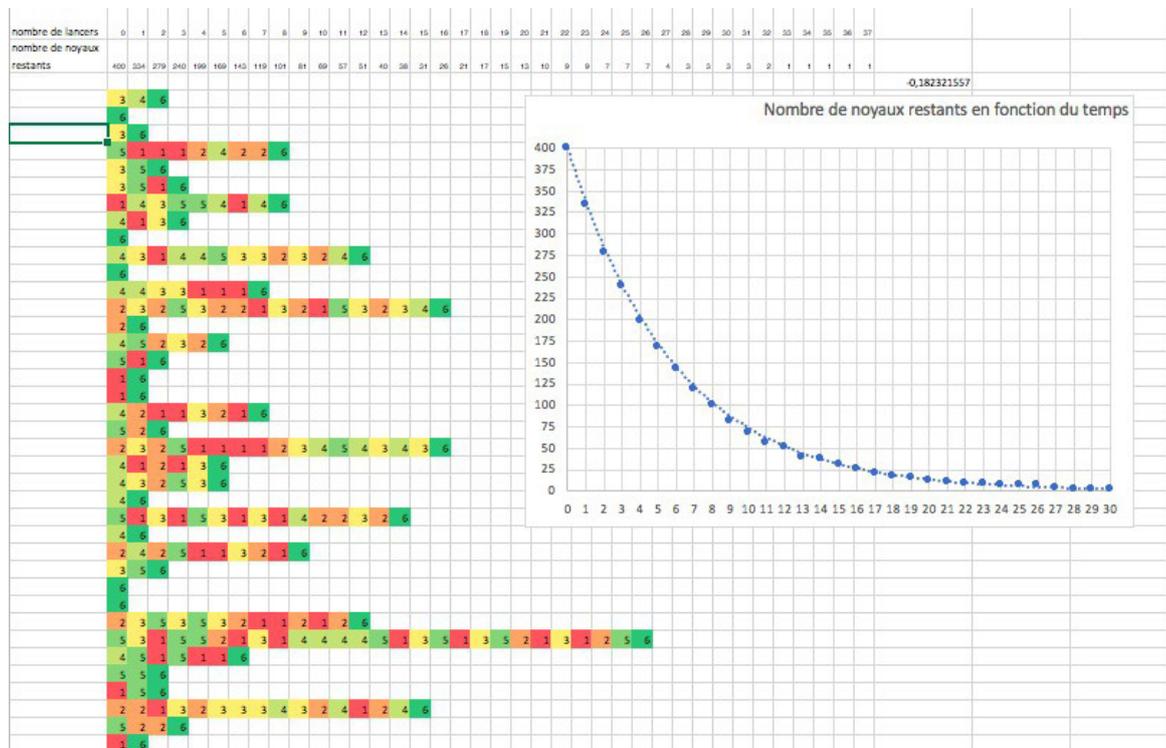
Pour simuler le caractère aléatoire de la désintégration d'un noyau individuel, on peut lancer successivement un dé ; chaque lancer représente une unité de temps et le résultat obtenu simule le comportement du noyau. On itère les lancers jusqu'à obtenir le 6, dont on décide arbitrairement que cela correspond à la désintégration du noyau. Pour travailler sur un échantillon, on lance plusieurs dés (par exemple 10) et on élimine à chaque étape ceux pour lesquels on a obtenu le 6.

Retrouvez éducol sur :



Utilisation d'un tableur

Une simulation au tableur permet d'étudier l'évolution d'un échantillon plus important de noyaux (même si son effectif reste extrêmement petit par rapport au nombre d'Avogadro).



Le fichier intitulé [T1-R1-A2-desintegration-radioactive-simulation.xls](#) permet de simuler la désintégration d'un échantillon comptant au départ 400 noyaux instables, en supposant connue la probabilité de désintégration de chaque noyau par unité de temps (ici 1/6). Chaque étape correspond à une unité de temps. Dans l'exemple ci-dessus, le premier noyau s'est désintégré au bout de 3 unités de temps, le second au bout d'une, le troisième au bout de deux, etc. Le nombre de chiffres autres que 6 figurant dans la n -ième colonne représente le nombre de noyaux restants au bout de n unités de temps.

On peut, à partir du nuage de points, estimer la demi-vie (environ 4 unités de temps) et vérifier qu'elle est indépendante du nombre initial de noyaux (il faut le même intervalle de temps pour passer de 200 à 100 noyaux, de 100 à 50 noyaux, de 50 à 25 noyaux).

Utilisation d'un algorithme

En prolongement de l'activité 1, on se propose de simuler la décroissance radioactive à l'aide de l'algorithme suivant :

```

n ← N
i ← 0
Tant que n > N/2 faire
  i ← i + 1
  Si (nombre aléatoire entre 1 et 6) = 6 alors
    n ← n - 1
  Fin Si
Fin Tant que
  
```

Retrouvez éducol sur :



1. Que représente la variable n ?
2. Interpréter la valeur contenue dans la variable i après exécution de cet algorithme.



Prolongements possibles

Télécharger l'animation Geogebra © intitulée « [Désintégration radioactive](#) ». Cette animation permet de modifier la probabilité de désintégration d'un noyau.

- Modélisation : dans cette animation on considère 100 noyaux radioactifs. On suppose qu'à chaque étape (représentant un intervalle de temps), chaque noyau se désintégrera avec probabilité p , et ce indépendamment des autres noyaux. La probabilité p est fixée par le curseur rouge. En faisant varier p , cela relance les nombres aléatoires du tableau.
- Explications sur le tableau :

La ligne 2 indique le nombre de titrage.

Les lignes de 5 à 104 du tableau correspondent aux états des 100 noyaux :

- 1 si le noyau n'est pas désintégré ;
- 0 si le noyau est désintégré.

Les cellules de B5 à B104 ne contiennent que des 1, signifiant que les 100 noyaux sont initialement non désintégré.

Dans une colonne, la cellule de la ligne 3 calcule la somme des nombres compris dans les cellules comprises entre les lignes 5 et 104 de cette colonne. Les cellules de la ligne 3 représentent donc le nombre de noyaux restants à l'étape correspondante indiquée en ligne 2.

Dans la cellule C5, la formule suivante est écrite :

$$=SI(B5 \neq 1 \wedge \text{AléaEntreBornes}(0, 100) < 100(1 - \$B\$1), 1, 0)$$

Si dans la cellule B5 il y a un 1 et qu'un tirage aléatoire entre 0 et 100 donne un nombre inférieur à $100(1-p)$, alors le noyau n'est pas désintégré (codé par 1), sinon le noyau est désintégré (codé par 0).



Pour terminer, cette formule est adaptée dans les différentes cellules à l'aide d'un collage spécial.

Le programme ci-dessous écrit en Python permet d'effectuer également une simulation.

- Renvoyer le nombre de noyaux restants après une étape.

```
from random import*
def compte_noyaux_restants(n,p):
    N=n
    for i in range(n):
        if random() < p :
            N=N-1
    return N
```

Par exemple `compte_noyaux_restants(10 000, 0.02)` renvoie le nombre de noyaux restants après une étape, si on a initialement 10 000 noyaux et qu'ils se désintègrent avec la probabilité 0,02.

Retrouvez éducol sur :



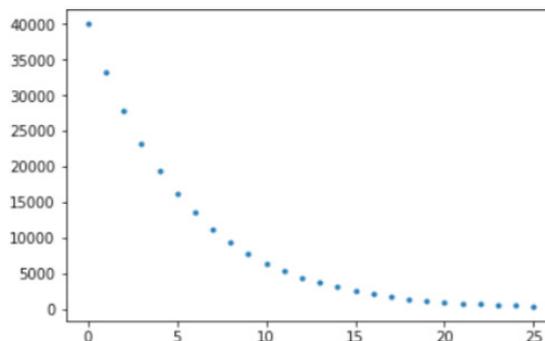
- Créer la liste contenant le nombre de noyaux restants à chaque étape jusqu'à ce qu'il n'en reste plus que 1 % du nombre initial.

```
def Liste_nb_noyaux_restants(n,p) :
    L=[]
    N=n
    while n>0.01*N:
        L.append(n)
        n=compte_noyaux_restants(n,p)
    return L
```

- Dans le cas d'un échantillon contenant au départ 40 000 noyaux instables, la probabilité de désintégration de chacun étant de 1/6, représenter graphiquement la courbe d'évolution du nombre de noyaux restants.

```
import matplotlib.pyplot as plt
n=40000
L=Liste_nb_noyaux_restants(n,1/6)
m=len(L)
plt.plot(range(m),L, linestyle = 'none', marker = '.')
plt.show()
```

On obtient le graphique ci-dessous.



Activité 2 : datation au carbone 14

Les organismes vivants contiennent naturellement du carbone 14 (^{14}C) provenant de l'interaction des rayons cosmiques avec le carbone présent dans l'atmosphère. La proportion de ^{14}C par rapport au ^{12}C présent dans un organisme vivant est constante, égale à $1,3 \times 10^{-12}$. À la mort d'un organisme, les échanges avec l'atmosphère cessent. Le carbone 14 qu'il contient se désintègre à raison de 12 pour 1000 tous les 100 ans, alors que le ^{12}C n'évolue pas.

1. À l'aide de la calculatrice, d'un tableur ou d'un programme écrit en Python, déterminer la demi-vie du ^{14}C .
2. Des archéologues ont trouvé des fragments d'os dans lesquels la proportion de carbone 14 par rapport au carbone 12 est égale à 7×10^{-13} . Estimer l'âge de ces fragments d'os.
3. On a découvert dans une grotte en Dordogne un foyer contenant du charbon de bois. À quantité égale, un morceau de bois actuel contient 1,5 fois plus de ^{14}C que le charbon de bois prélevé dans la grotte. À la calculatrice ou au tableur, estimer une datation de l'occupation de la grotte.
4. Lorsque la teneur en carbone 14 d'un organisme devient inférieure à 0,3 % de sa valeur initiale, on ne peut plus dater précisément à l'aide du carbone 14. Déterminer l'âge à partir duquel un organisme ne peut plus être daté au carbone 14.

Retrouvez éducol sur :



Activité 3 : construction dichotomique de la fonction $x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Il est naturel de chercher à estimer la proportion de noyaux restants au bout d'une durée qui n'est pas un multiple entier de la demi-vie. Ainsi, on peut s'interroger sur la proportion de noyaux restants au bout de la moitié, du quart, des trois quarts d'une demi-vie, d'une demi-vie et demie, puis d'un nombre x de demi-vies, pour un nombre réel positif x quelconque.

Une construction par interpolation dichotomique permet de répondre à cette question par un passage du modèle discret d'évolution, la suite géométrique de terme général $\left(\frac{1}{2}\right)^n$, au modèle continu, la fonction $x \mapsto \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Amorce du raisonnement

Déterminons le coefficient multiplicateur a qui permet de passer du nombre de noyaux présents à la date t au nombre de noyaux présents une moitié de demi-vie après la date t , c'est-à-dire à la date $t + \frac{T_{1/2}}{2}$. L'absence de vieillissement permet d'affirmer que a est indépendant de la date de départ t .

Si le nombre de noyaux à la date t est N_0 , alors le nombre de noyaux présents à la date $t + \frac{T_{1/2}}{2}$ est égal à $a \times N_0$. Le nombre de noyaux présents à la date $t + \frac{T_{1/2}}{2} + \frac{T_{1/2}}{2} = t + T_{1/2}$ est égal à $a \times (aN_0) = a^2 \times N_0$. Or, d'après la définition de la demi-vie $T_{1/2}$, le nombre de noyaux présents à la date $t + T_{1/2}$ est également égale à $\frac{N_0}{2}$.

On en déduit que $a^2 = \frac{1}{2}$. Donc : $a = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = 2^{-\frac{1}{2}}$.

Un raisonnement analogue permet de montrer que le coefficient multiplicateur pour passer du nombre de noyaux présents à une date t au nombre de noyaux présents un quart de demi-vie après la date t , c'est-à-dire à la date $t + \frac{T_{1/2}}{4} = t + \frac{T_{1/2}}{2^2}$, est égal à $\frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{2}} = \frac{1}{(2)^{\frac{1}{4}}} = 2^{-\frac{1}{4}} = 2^{-\frac{1}{2^2}}$.

Plus généralement, le coefficient multiplicateur entre le nombre de noyaux présents à une date t et le nombre de noyaux présents à la date $t + \frac{T_{1/2}}{2^n}$ est égal à : $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2^n}} = 2^{-\frac{1}{2^n}}$.

Utilisation de moyennes

Différentes moyennes

La moyenne arithmétique de deux nombres réels a et b est égale à $\frac{a+b}{2}$.

La moyenne géométrique de nombres réels positifs a et b est égale à $\sqrt{a \cdot b}$.

Précédemment, on a montré que le nombre de noyaux restants au bout de la moitié d'une demi-vie est égal à :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} N_0.$$

Retrouvez éduscol sur :



Le carré de ce nombre est égal à :

$$\frac{N_0^2}{2} = N_0 \times \frac{N_0}{2} = N_0 \times N_1.$$

Donc le nombre de noyaux restants au bout de la moitié d'une demi-vie est la moyenne géométrique du nombre de noyaux restants initialement et du nombre de noyaux restants au bout d'une demi-vie.

De manière analogue, on montre que :

- le nombre de noyaux restants au bout d'un quart de demi-vie est la moyenne géométrique du nombre de noyaux restants à l'instant initial et du nombre de noyaux restants au bout de la moitié d'une demi-vie ;
- le nombre de noyaux restants au bout de trois quarts de demi-vie est la moyenne géométrique du nombre de noyaux restants au bout de la moitié d'une demi-vie et du nombre de noyaux restants au bout d'une demi-vie.

En divisant par N_0 le nombre de noyaux restants, on obtient la proportion de noyaux restants par rapport au nombre initial de noyaux. D'où l'idée de compléter le nuage de points $[n, \frac{1}{2^n}]$ correspondant à la suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ en intercalant entre deux points consécutifs $[n, \frac{1}{2^n}]$ et $[n + 1, \frac{1}{2^{n+1}}]$ le point ayant pour abscisse la moyenne arithmétique de n et $n + 1$ et pour ordonnée la moyenne géométrique de $\frac{1}{2^n}$ et $\frac{1}{2^{n+1}}$.

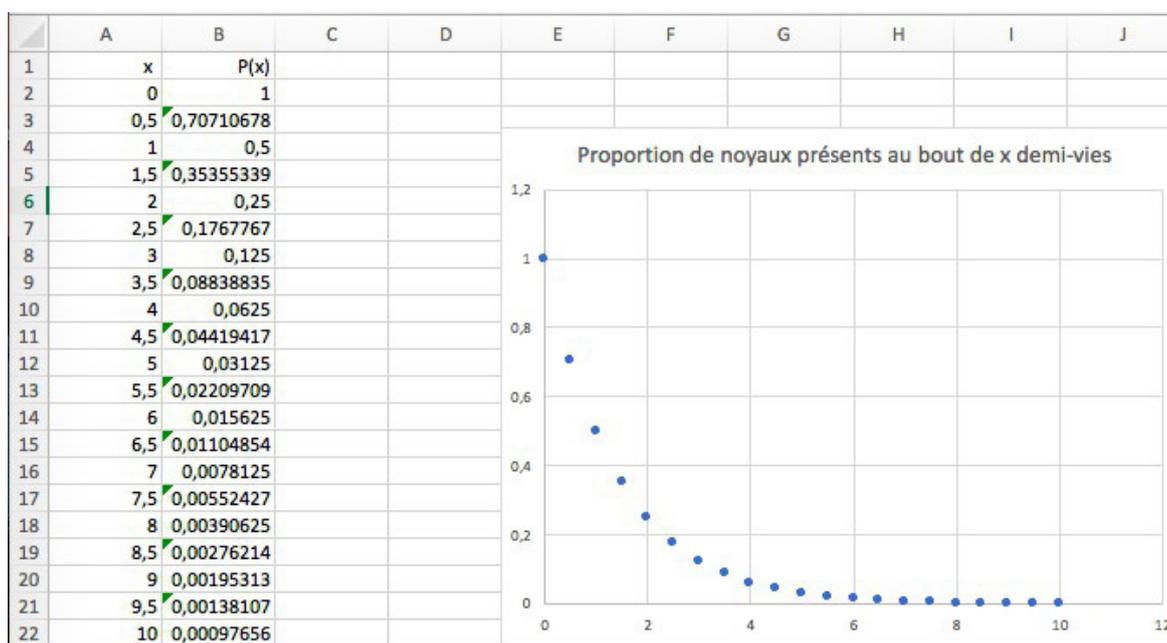
Mise en œuvre sur un tableur

Intercaler les milieux des entiers compris entre 0 et 10 (pas égal à 0,5).

La valeur 0,5 de la cellule A3 est obtenue en tapant MOYENNE(A2 ; A4).

La valeur 0,70710678 de la cellule B3 est obtenue en tapant MOYENNE.GEOMETRIQUE(B2 ; B4).

Pour obtenir les valeurs correspondant aux lignes impaires, copier les formules et effectuer un collage spécial afin d'adapter la formule à la ligne concernée.



Retrouvez éducol sur :



La représentation graphique montre bien que les nouvelles valeurs complètent le nuage de points précédent.

Le procédé peut se poursuivre en intercalant à chaque fois les moyennes arithmétiques dans la colonne A et géométriques dans la colonne B de manière à approcher au mieux la fonction $x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Mise en œuvre sur un programme Python

Le programme ci-après permet d'insérer un point entre deux des points du nuage $[n, 0,5^n]$.

```
In [1]: from matplotlib import pyplot as plt
        from math import sqrt

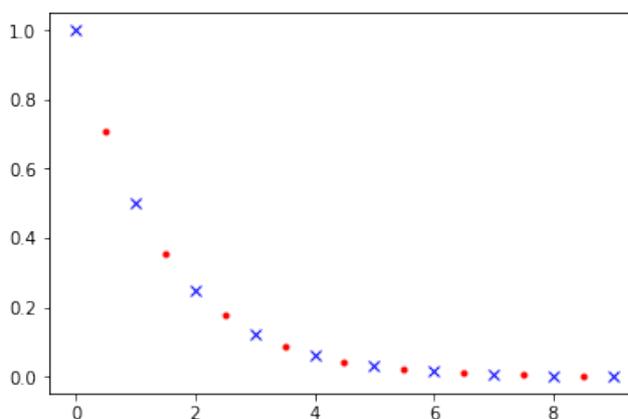
In [2]: N = 10
        abscisses = [ i for i in range(N) ]
        ordonnees = [ 0.5 ** i for i in range(N) ]

In [3]: for i in range(N-1):
        x = (abscisses[i]+abscisses[i+1])/2
        y = sqrt(ordonnees[i]*ordonnees[i+1])
        abscisses.append(x)
        ordonnees.append(y)
```

On affiche alors les points à l'aide des commandes suivantes.

```
In [5]: plt.plot(abscisses[:N], ordonnees[:N], 'bx')
        plt.plot(abscisses[N:], ordonnees[N:], 'r.')
```

On obtient le graphique ci-dessous.



En itérant le processus, on obtient un nuage de points qui approche la fonction F définie sur \mathbb{R} par $F(t) = \left(\frac{1}{2}\right)^t$, fonction accessible avec une touche de la calculatrice.

Faire afficher un tableau de valeurs de cette fonction et comparer ces valeurs à celles obtenues aux questions précédentes.

Pour aller plus loin

- Modèle continu de désintégration radioactive : fonctions exponentielles.
- Utilisation de la fonction logarithme pour calculer le temps au bout duquel la proportion de noyaux restants atteint une valeur donnée.

Bibliographie et sitographie

- *Madame Curie*, Eve Curie, Gallimard, 1938.
- Site de l'[institut de radioprotection et de sûreté nucléaire](#) (IRSN).
- Site de la radio France Culture : [Radium Girls \(1/2\) : des femmes lumineuses](#) ; [Radium Girls \(2/2\) : le radium au tribunal](#).

Retrouvez éduscol sur :



LES MATHÉMATIQUES DE L'ENSEIGNEMENT SCIENTIFIQUE LES CRISTAUX

Mots-clés

Sphère ; cube ; maille ; réseau ; volume ; cristaux.

Références au programme

La compréhension de l'organisation cristalline au travers des exemples choisis (réseaux cubique simple et cubique à faces centrées) mobilise des connaissances sur la géométrie du cube. Elle fournit l'occasion de développer des compétences de représentation dans l'espace et de calculs de volumes. La description de l'état cristallin est l'occasion d'utiliser les mathématiques (géométrie du cube et de la sphère, calculs de volumes, proportions) pour décrire la nature et quantifier ses propriétés.

Savoirs

Les cristaux les plus simples peuvent être décrits par une maille cubique que la géométrie du cube permet de caractériser. La position des entités dans cette maille distingue les réseaux cubique simple et cubique à faces centrées. La structure microscopique du cristal conditionne certaines de ses propriétés macroscopiques, dont sa masse volumique.

Savoir-faire

Utiliser une représentation 3D informatisée du cristal de chlorure de sodium.

Pour chacun des deux réseaux (cubique simple et cubique à faces centrées) :

- représenter la maille en perspective cavalière ;
- calculer la compacité dans le cas d'entités chimiques sphériques tangentes ;
- dénombrer les atomes par maille et calculer la masse volumique du cristal.

Notions mathématiques mobilisées

- Géométrie dans le plan et dans l'espace : repérage cartésien, représentation en perspective cavalière, solides usuels (cube et boule), théorème de Pythagore.
- Nombres et calcul : dénombrer, calculer des proportions.
- Grandeurs et mesure : calculs de longueurs, d'aires et de volumes.

Histoire, enjeux, débats

La question de la compacité maximale pour des empilements de sphères est illustrée dans la vie quotidienne par l'arrangement optimal retenu par les vendeurs d'oranges pour présenter leurs fruits. Bien avant la découverte des structures cristallines, les mathématiciens se sont penchés sur ce problème.

Ainsi, en 1611 Johannes Kepler émet la conjecture que, pour un empilement de sphères identiques, la compacité maximale est de $\frac{\pi\sqrt{2}}{6}$. Cette compacité maximale est obtenue par l'empilement tétraédrique qui correspond au réseau cubique à faces centrées. En 1831, Karl Friedrich Gauss prouve cette conjecture dans le cas particulier d'empilements périodiques. Lors du congrès international de mathématiques qui s'est tenu à Paris en 1900, David Hilbert présente sa fameuse liste des 23 problèmes mathématiques majeurs « pour le nouveau siècle » ; le 18^e problème de Hilbert consiste à démontrer la conjecture de Kepler dans le cas général. En 1998 Thomas C. Hales apporte une preuve assistée par ordinateur. Ce n'est qu'en 2014 que cette preuve a été certifiée.

Ces recherches mathématiques se sont développées bien avant le début de la cristallographie à laquelle elle fournissent aujourd'hui des modèles.

Les mathématiques et les cristaux

L'approche de la cristallographie au programme de l'enseignement scientifique permet de mettre en évidence le rôle d'un modèle géométrique pour décrire des éléments physico-chimiques. C'est aussi l'occasion de remobiliser des connaissances et des compétences mathématiques (géométrie dans l'espace, calculs de volumes, proportions).

Le modèle utilisé dans les deux réseaux du programme (cubique simple et cubique à faces centrées) assimile les entités chimiques (atomes ou ions) à des sphères dures tangentes de même rayon réparties dans l'espace de manière périodique. Ce modèle de sphères dures tangentes rend compte de la non-pénétrabilité des nuages électroniques.

Dans la réalité, le diamètre de ces sphères est de l'ordre de l'ångström.

Une maille est une unité de base parallélépipédique à partir de laquelle on peut engendrer tout le cristal uniquement par des translations. Dans les deux cas simples étudiés ici, les mailles sont des cubes et les sphères sont tangentes les unes aux autres.

La compacité d'un réseau cristallin est le rapport du volume occupé par les sphères sur le volume de la maille.

Remarque : en mathématiques, le problème des empilements denses de sphères (dimension 3) peut être étendu à d'autres dimensions.

Intentions pédagogiques

L'étude mathématique de ce sous-thème, qui permet à la fois des manipulations d'objets réels ou virtuels, des calculs et des raisonnements, contribue à consolider les acquis du cycle 4, notamment dans les domaines de la géométrie et des grandeurs.

Retrouvez éducol sur :

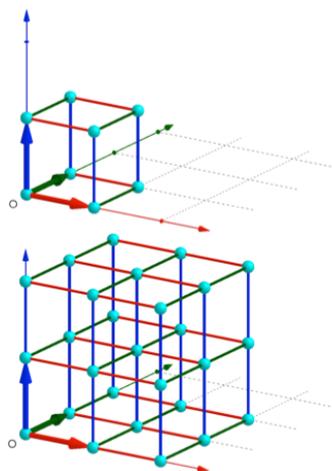


Réseau cubique simple

Peu présent dans la nature, ce réseau élémentaire sert de premier modèle.

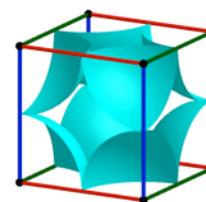
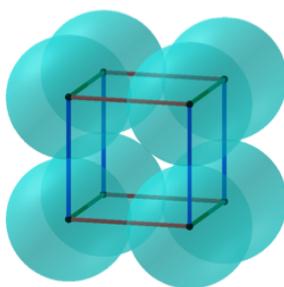
L'utilisation de logiciel tel que GeoGebra © permet de modéliser et de visualiser ce réseau. Se placer dans un repère orthonormé de l'espace à trois dimensions permet de remobiliser le repérage dans l'espace rencontré par les élèves au cycle 4 dans le cadre des pavés droits.

Considérons un point origine O et les trois vecteurs unitaires $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ de coordonnées respectives $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$, colorés respectivement en rouge, vert et bleu ci-dessous.



La maille est cubique et est définie par son origine O et trois vecteurs de base $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

Pour que les sphères centrées aux nœuds du réseau soient tangentes, il faut que leur rayon soit égal à la moitié de la longueur d'une arête de la maille (figure de gauche). On peut alors donner un motif qui, par translation selon les trois vecteurs, engendrera tout le cristal. La figure de droite représente ce motif obtenu comme intersection du cube et des huit sphères.



Calcul de la compacité

Chaque maille contient huit huitièmes de sphère, soit l'équivalent d'une sphère dont le rayon est la moitié de l'arête du cube. La compacité est le rapport de ces volumes. Si on prend pour unité de longueur l'arête du cube, la compacité est égale au volume de la boule de rayon $\frac{1}{2}$, soit :

$$\frac{4}{3} \pi \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{\pi}{6}$$

Retrouvez éduscol sur :

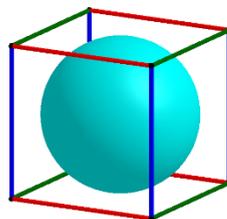


On peut aussi partir d'une maille cubique d'arête a pour prouver que cette compacité ne dépend pas de la taille de la maille, on calcule alors :

$$\frac{\frac{4}{3}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^3}{a^3} = \frac{\frac{4}{3}\pi \times \frac{a^3}{2^3}}{a^3} = \frac{4\pi a^3}{3 \times 8 \times a^3} = \frac{\pi}{6}$$

Remarque

Le choix de la maille n'est pas unique. Au lieu de prendre le cube dont les sommets sont les centres des sphères, on aurait pu choisir le cube circonscrit à l'une de ces sphères comme sur la figure ci-après.



Télécharger l'animation Geogebra © intitulée « [structure cristalline : cubique simple et à faces centrées](#) ». Cette animation permet à la fois de visualiser les structures cubique simple et cubique à faces centrées et d'obtenir une valeur approchée du rayon correspondant à des sphères tangentes dans les deux cas.

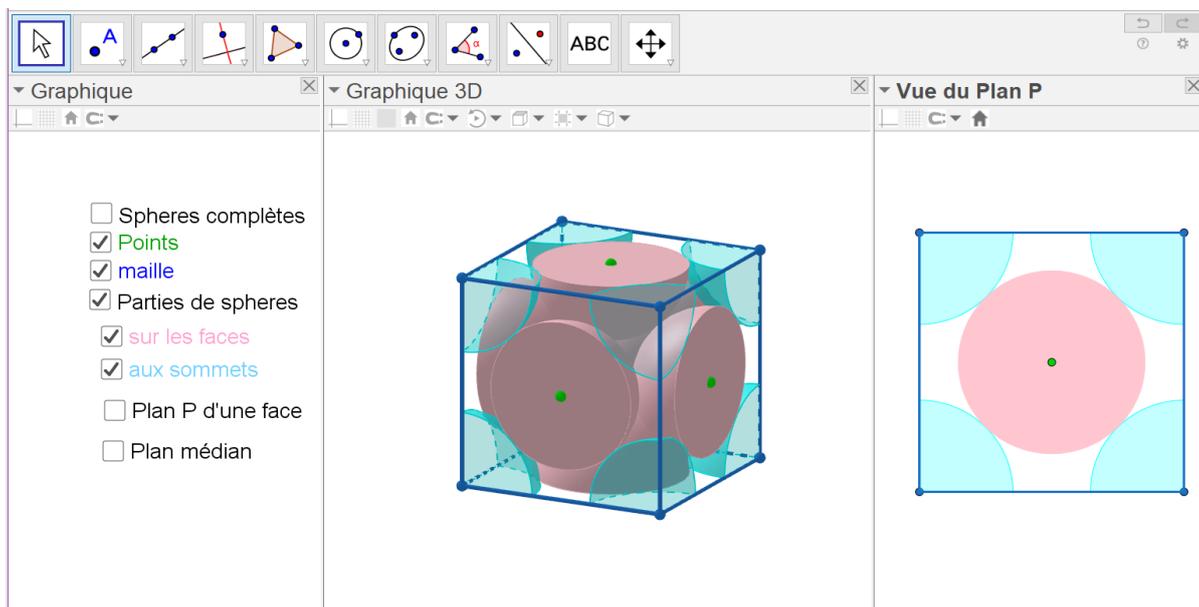
Réseau cubique à faces centrées



Télécharger l'animation Geogebra © intitulée « [maille cubique à faces centrées](#) ». Cette animation, permet de visualiser la maille et de préparer au calcul de la compacité en montrant des sections planes de cette maille.

Retrouvez éduscol sur :





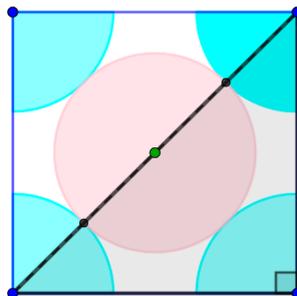
On visualise qu'une maille est occupée par :

- six hémisphères et ;
- huit huitièmes de sphères.

La maille est donc occupée par un volume correspondant à celui de quatre sphères de même rayon r .

Vue d'une face

La représentation de face d'une face du cube permet d'établir une relation entre le rayon r des sphères et l'arête a du cube.



Les sphères turquoise centrées aux sommets sont tangentes à la sphère rose centrée au centre de la face du cube.

Une diagonale du carré de longueur $4r$ est l'hypoténuse d'un triangle isocèle rectangle de côté a . Les côtés de l'angle droit mesurent chacun a . Le théorème de Pythagore donne alors :

$$a^2 + a^2 = (4r)^2$$

Ce qui donne $2a^2 = 16r^2$ et donc $4r = a\sqrt{2}$ soit :

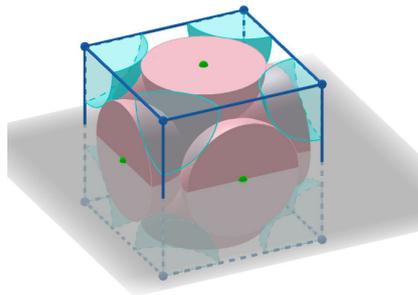
$$r = \frac{a\sqrt{2}}{4}$$

Retrouvez éducol sur :

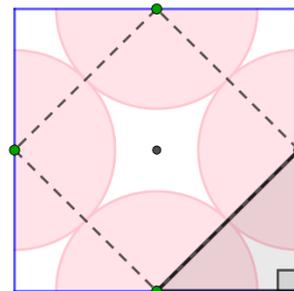


Vue de face d'un plan médian

On doit vérifier que, pour cette valeur de r , les hémisphères roses sont bien tangents. On coupe le cube par un plan médian c'est-à-dire parallèle à une face du cube et passant par le centre du cube. Cette section est un carré identique à celui des faces et dont les milieux des côtés correspondent aux centres de quatre hémisphères. Le triangle isocèle rectangle exhibé ici se déduit du précédent par une réduction de rapport $\frac{1}{2}$; son hypoténuse est donc égale à $2r$, soit la somme des rayons des deux sphères, ce qui assure leur tangence.



Plan médian



Vue du plan médian de face

Ainsi, lorsque $r = \frac{a\sqrt{2}}{4}$, les sphères aux centres des faces du cube sont à la fois tangentes entre elles et aussi tangentes aux sphères dont les centres sont les sommets du cube.

Calcul de la compacité

Déterminons le volume occupé par les sphères dans une maille cubique. Une maille du réseau cubique à faces centrées compte :

- huit huitièmes de sphère centrées aux sommets, soit une sphère, et ;
- six hémisphères (une sur chaque face), soit trois sphères.

Une maille cubique d'arête a , donc de volume a^3 , est ainsi occupée par quatre sphères de rayon r . Le volume de quatre sphères, noté V_S , est égal à :

$$V_S = 4 \times \frac{4}{3} \times \pi \times r^3 = 4 \times \frac{4}{3} \times \pi \left(\frac{a\sqrt{2}}{4} \right)^3 = \frac{4 \times 4 \times \pi \times a^3 \times 2 \times \sqrt{2}}{4 \times 4 \times 4 \times 3} = \frac{\pi\sqrt{2}}{6} \times a^3$$

La compacité de la structure cubique à faces centrées est donc $\frac{\pi\sqrt{2}}{6}$, soit environ 74 %.

Retrouvez éduscol sur :



Propositions d'activités

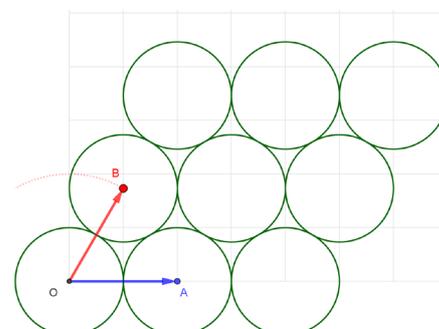
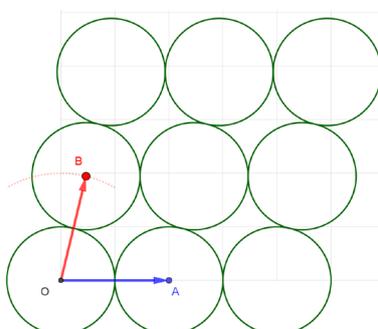
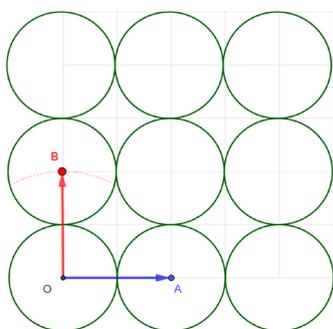
Activité 1 : le même problème en géométrie plane

Avant d'étudier la représentation d'un réseau de l'espace et de calculer sa compacité, l'étude dans le cas du plan permet de comparer plusieurs empilements, notamment celui du réseau carré et celui du réseau hexagonal. L'activité permet de manipuler des pièces de monnaie ou des jetons avant de passer à la représentation géométrique abstraite et de faire émerger la notion de maille en lien avec la notion de pavage étudiée au cycle 4.

Prendre une dizaine de pièces de monnaie ou jetons identiques, les regrouper sur la table de manière régulière, en essayant de minimiser les interstices.



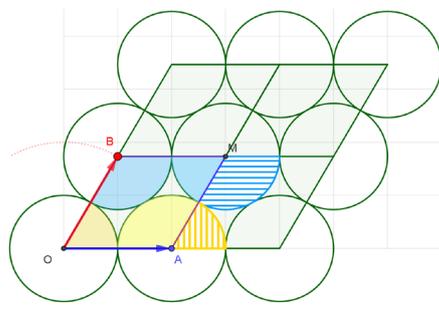
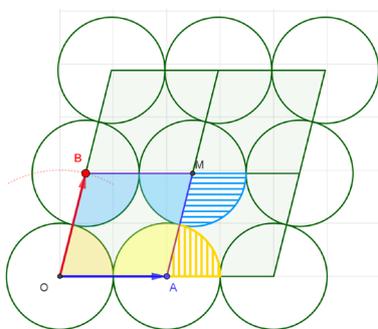
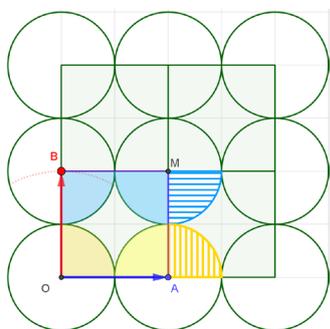
Télécharger l'animation Geogebra © intitulée « [empilement de disques à 2D](#) ». Déplacer le point B pour modifier cet empilement de disques identiques selon un maillage de losanges.



À partir du disque inférieur gauche centré à l'origine, un empilement est construit par deux translations de vecteurs \vec{u} et \vec{v} respectivement bleu et rouge.

On conjecture visuellement que, parmi les différents empilements possibles, le dernier est le plus compact. Cette conjecture est démontrée dans la suite.

En faisant apparaître le réseau construit à partir des vecteurs \vec{u} et \vec{v} , et le maillage en forme de losanges, la question revient à prouver que c'est dans le dernier cas que les interstices ont la plus petite aire. Un raisonnement par découpage et recollement permet de prouver que l'aire des quatre portions de disque contenus dans une maille est toujours égale à celle d'un disque. L'animation permet de le visualiser.



Retrouvez éducol sur :



Démonstration

Le côté du losange OAMB modélisant la maille a même longueur qu'un diamètre des disques, mais son aire est variable. On rappelle que l'aire d'un parallélogramme est le produit d'un côté par la hauteur correspondante ; le côté OA reste fixe, mais la hauteur, elle, est variable. Ainsi l'aire de la maille est minimale lorsque la hauteur est minimale, ce qui est réalisé dans la dernière configuration. On peut alors faire le calcul de la compacité dans la première et la dernière des trois configurations.

Lorsque la maille est un carré, la surface occupée dans une maille est celle d'un disque de rayon $\frac{1}{2}$ soit $\pi \left(\frac{1}{2}\right)^2$ que l'on divise par 1 qui est l'aire du carré de côté unitaire. La compacité est égale exactement à $\frac{\pi}{4}$ soit environ 78,5 %.

Le cas le plus compact est obtenu lorsque le triangle AOB est équilatéral. On parle de réseau hexagonal. Un triangle équilatéral AOB de côté 1 a une hauteur de $\frac{\sqrt{3}}{2}$, donc plus grande que son côté, l'aire de AOB est donc : $\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$. L'aire de la maille est le double de celle de AOB, et on a toujours l'équivalent d'un disque à l'intérieur. La compacité de ce réseau hexagonal est égale à $\frac{\pi/4}{\sqrt{3}/2} = \frac{\pi\sqrt{3}}{6} \approx 0,907$, soit environ 90,7 %.

Cette étude dans le plan permet d'introduire les notions de maille, de motif élémentaire répété périodiquement et de compacité avant de les aborder dans l'espace. Le réseau plan carré anticipe le réseau cubique simple et le réseau plan hexagonal anticipe le réseau cubique à faces centrées, dont on verra qu'il correspond à un empilement tétraédrique de sphères.

Activité 2



Télécharger les animations Geogebra © intitulées « [structure cristalline : cubique simple et à faces centrées](#) » et « [maille cubique à faces centrées](#) ». Ces animations permettent de visualiser les réseaux cubique simple et cubique à faces centrées et de conjecturer dans les deux cas la relation entre l'arête de la maille et le rayon des sphères pour assurer la tangence.

Retrouvez éducol sur :



Pour aller plus loin

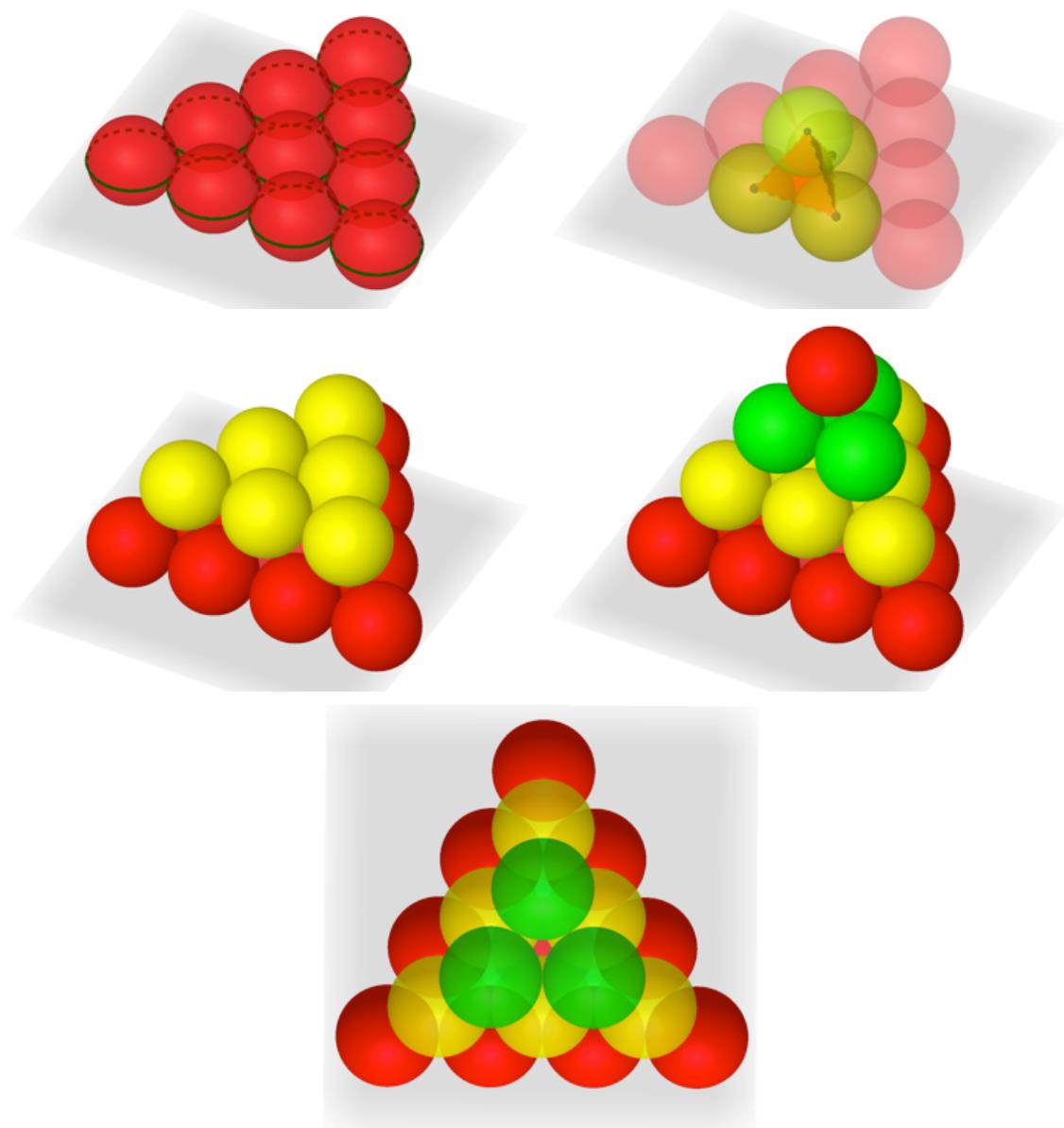
De la pile d'oranges au réseau cubique à faces centrées (CFC)

On se propose d'expliquer pourquoi des empilements d'oranges rangées à chaque couche selon un maillage hexagonal correspondent au réseau cubique à faces centrées.



Télécharger l'animation Geogebra intitulée « [Empilement tétraédrique](#) ». Les images ci-dessous sont issues de ce fichier.

Partir d'un empilement de sphères tangentes les unes aux autres, posées sur un plan comme les disques de l'activité 1, et construire les couches supérieures pour constituer une pile tétraédrique de sphères, comme indiqué dans les figures ci-dessous.

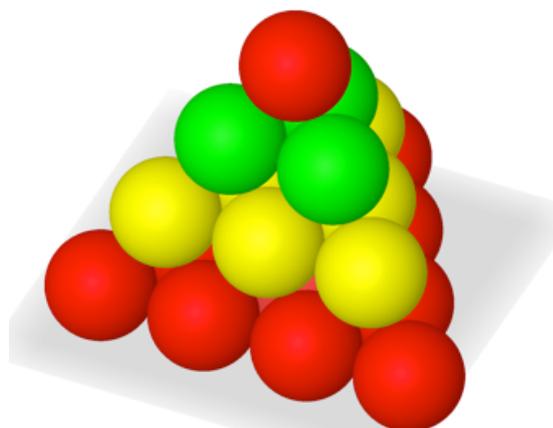


Empilement A-B-C vu du dessus

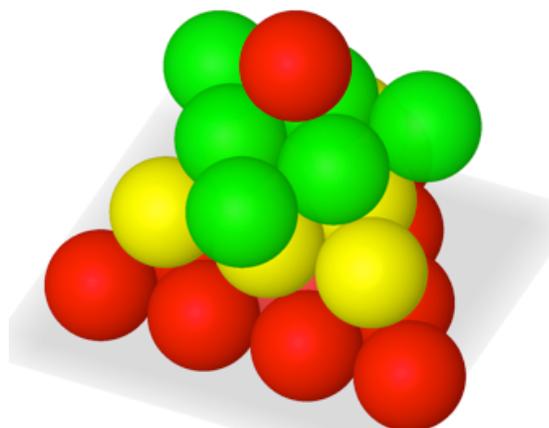
Retrouvez éducol sur :



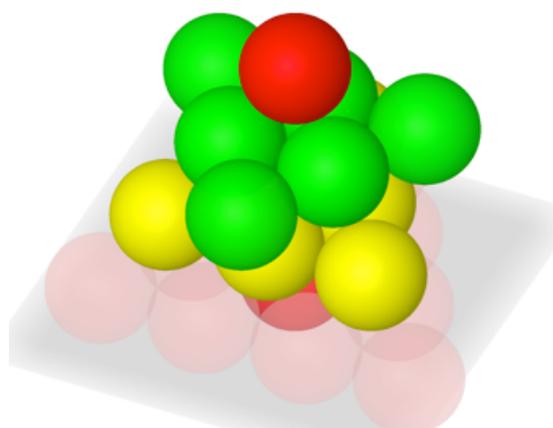
En partant de la pile tétraédrique, l'ajout de trois sphères à la couche C fait apparaître la maille CFC.



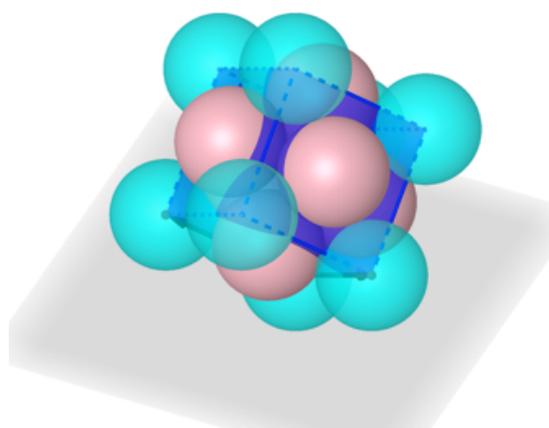
Empilement A-B-C-A de 20 sphères



Prolonger la couche C avec trois sphères



Ne garder que la sphère centrale la 1^{re} couche A pour faire apparaître les sphères aux sommets d'un cube et au centre de ses faces.



Le cube bleu dont les huit sommets sont les centres des sphères turquoise correspond à la maille de la structure CFC.

Réseau cubique centré et réseau hexagonal compact

Le réseau cubique centré est plus fréquent dans la nature que le cubique simple et mobilise des raisonnements similaires à ceux mis en jeu dans les cas étudiés. Pour déterminer les rayons des sphères, on coupe la maille cubique par un plan perpendiculaire à une face selon une diagonale. C'est ce plan qui passe par les centres des sphères et la section fait apparaître un triangle rectangle dont les côtés sont dans le ratio $1 : \sqrt{2} : \sqrt{3}$.

Le réseau hexagonal compact est, comme le CFC, obtenu par empilements de couches hexagonales, mais où la troisième couche étant à la verticale de la première et non décalée. Bien que différents, ces deux réseaux réalisent la compacité maximale.

Retrouvez éduscol sur :



Bibliographie et sitographie

- [An overview of the Kepler conjecture](#), Thomas C. Hales, novembre 1998
- [Densité maximale des empilements de sphères en dimension 3](#), [d'après Thomas C. Hales et Samuel P. Ferguson] (Joseph Oesterlé) Séminaire BOURBAKI 51^e année, 1998-99.
- « [La conjecture de Kepler est enfin vérifiée](#) » revue La Recherche n° 493 nov. 2014, p15.
- [Chapter 3. The Structure of Crystalline Solids](#), University of Virginia, Department of Materials Science and Engineering.
- [Compact packings of the plane with two sizes of discs](#), Tom Kennedy, février 2008.

Retrouvez éduscol sur :



LES MATHÉMATIQUES DE L'ENSEIGNEMENT SCIENTIFIQUE LE RAYONNEMENT SOLAIRE

Mots-clés

Puissance solaire ; variation diurne ; variation saisonnière ; zonation climatique.

Références au programme

La Terre reçoit l'essentiel de son énergie du Soleil. Cette énergie conditionne la température de surface de la Terre et détermine climats et saisons. Elle permet la photosynthèse des végétaux et se transmet par la nutrition à d'autres êtres vivants.

Savoir

La puissance radiative reçue du Soleil par une surface plane est proportionnelle à l'aire de la surface et dépend de l'angle entre la normale à la surface et la direction du Soleil.

De ce fait, la puissance solaire reçue par unité de surface terrestre dépend :

- de l'heure (variation diurne) ;
- du moment de l'année (variation saisonnière) ;
- de la latitude (zonation climatique).

Savoir-faire

- Sur un schéma, identifier les configurations pour lesquelles la puissance reçue par une surface est maximale ou minimale.
- Analyser, interpréter et représenter graphiquement des données de températures. Calculer des moyennes temporelles de températures. Comparer des distributions temporelles de températures.

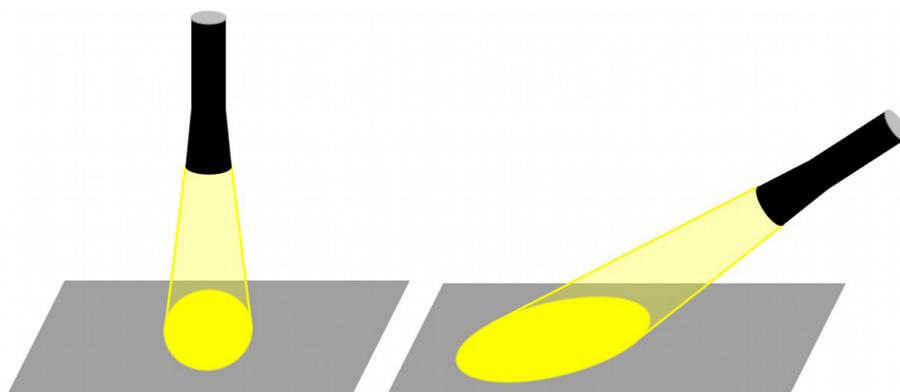
Notions mathématiques mobilisées

- Géométrie de la sphère.
- Repérage à la surface de la sphère.
- Relations angulaires dans le plan.
- Trigonométrie.

Les mathématiques et le rayonnement solaire

Rôle de l'inclinaison des rayons sur la surface éclairée

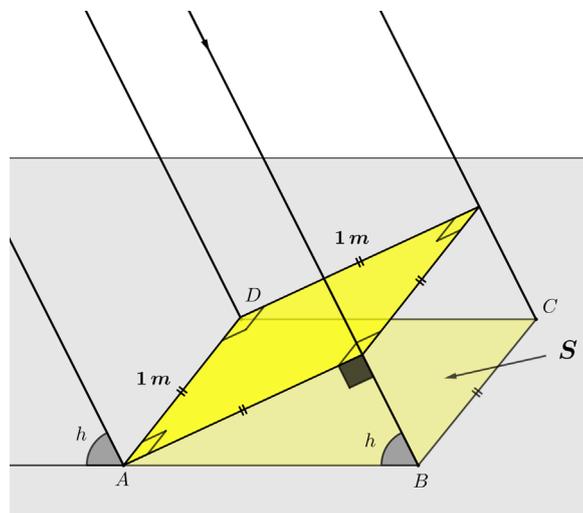
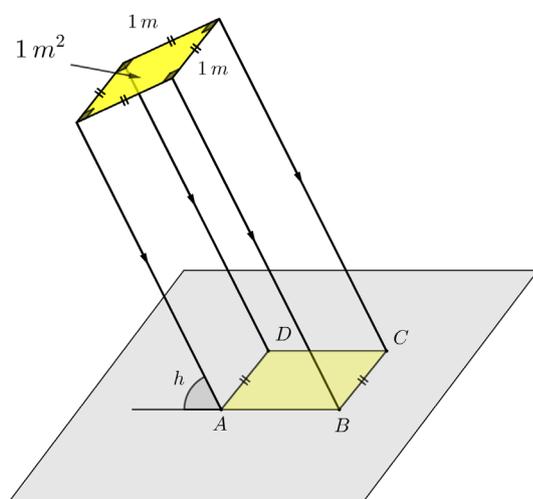
L'expérience consistant à déplacer une lampe de poche éclairant une feuille de papier posée sur une table permet de visualiser la variation de l'aire de la surface de la feuille éclairée en fonction de l'orientation de la lampe. Cette aire, minimale pour un éclairage perpendiculaire au plan de la feuille, augmente au fur et à mesure que l'éclairage devient de plus en plus rasant.



La trigonométrie permet de quantifier cette réalité en calculant l'aire de la surface éclairée par un faisceau lumineux assimilé à un parallélépipède rectangle de section 1 m^2 en fonction de l'angle entre les rayons lumineux supposés parallèles et le plan de la feuille.

La distance Terre-Soleil pouvant être considérée comme infiniment grande par rapport à toutes les longueurs mesurées à la surface de la Terre, on fait l'hypothèse que les rayons solaires arrivant à la surface de la Terre sont tous parallèles entre eux. En un point M de la surface terrestre, l'inclinaison des rayons solaires est alors caractérisée par un angle, appelé hauteur solaire et noté h_M . C'est l'angle aigu entre la direction des rayons solaires et le plan horizontal passant par M . Plus précisément, c'est l'angle complémentaire de l'angle entre la direction des rayons solaires et la verticale du point M (droite reliant le point M au centre de la Terre).

Dans ce qui suit, calculons l'aire de la surface éclairée par un faisceau solaire fonction de l'inclinaison h des rayons de ce faisceau par rapport à cette surface.



Retrouvez éducol sur :



L'aire, en m², de la surface au sol éclairée par le faisceau est égale à :

$$AB \times BC = AB \times 1 = AB.$$

$$\text{Or } \sin h = \frac{1}{AB}.$$

Donc l'aire de la surface éclairée, égale à $\frac{1}{\sin h}$, est d'autant plus petite que la hauteur h du Soleil est grande. Sa valeur minimale est atteinte pour $h = 90^\circ$, lorsque le Soleil est à la verticale du lieu.

La puissance radiative reçue du Soleil par unité de surface étant d'autant plus grande que la surface éclairée est petite, le calcul précédent prouve qu'elle augmente en même temps que la hauteur du Soleil.

Rôle des saisons et de la latitude sur la hauteur solaire

Cette partie étudie l'évolution de la hauteur du Soleil en fonction de la latitude et des saisons pour comprendre à la fois les variations saisonnières de températures et la zonation climatique.

Tournant sur elle-même une fois par jour, la Terre met une année pour effectuer sa révolution autour du Soleil (dont elle se situe à la distance moyenne de 150 millions de kilomètres), selon une trajectoire elliptique très proche d'un cercle. Le plan de cette trajectoire s'appelle le plan de l'écliptique. Si l'axe de rotation de la Terre était perpendiculaire au plan de l'écliptique, la durée du jour serait égale à celle de la nuit toute l'année en tout point de la surface de la Terre. Mais l'axe terrestre est incliné d'environ 23 degrés par rapport à la perpendiculaire au plan de l'écliptique (cet angle s'appelle l'obliquité). À de très petites variations près, cette inclinaison de l'axe terrestre peut être considérée constante au cours de la révolution de la Terre autour du Soleil. L'axe de rotation de la Terre gardant une direction fixe, la durée du jour dépend du lieu et de la position de la Terre sur son orbite (phénomène des saisons). Ainsi, de mars à septembre, la partie nord du globe voit le Soleil plus haut à midi dans le ciel que la partie sud. Le Soleil se lève plus tôt, se couche plus tard, et les jours sont de fait plus longs dans l'hémisphère nord que dans l'hémisphère sud où les rayons du Soleil, plus inclinés, éclairent une plus grande surface, distribuant donc moins de chaleur par unité de surface. Ces effets sont d'autant plus prononcés que la latitude de l'observateur est grande. À l'équateur, l'effet est faible, et la durée du jour et de la nuit ne varie presque pas. Aux pôles, l'effet est extrême, si bien que le jour et la nuit y durent six mois chacun.

D'un point de vue astronomique, quatre dates jouent un rôle particulier :

- lorsque le côté nord de l'axe de la Terre « penche » au maximum vers le Soleil, l'angle orienté entre les rayons solaires et le plan de l'équateur atteint sa valeur maximale (+23° 26' 13" ≈ 23,4°). C'est le solstice de juin, jour le plus long pour l'hémisphère Nord, dont la date varie entre le 20 et le 22 juin. Le Soleil à midi est au zénith du tropique du Cancer, qui a une latitude de 23° 26' 13" Nord. C'est le jour le plus long de l'année pour l'hémisphère nord et le plus court de l'année pour l'hémisphère sud ;
- lorsque le côté sud de l'axe de la Terre « penche » au maximum vers le Soleil, l'angle orienté entre les rayons solaires et le plan de l'équateur atteint sa valeur minimale (-23° 26' 13"). C'est le solstice de décembre, jour le plus court pour l'hémisphère nord, dont la date varie entre le 20 et le 22 décembre. Le Soleil à midi est au zénith du tropique du Capricorne, qui a une latitude de 23° 26' 13" sud. C'est le jour le plus long de l'année pour l'hémisphère sud et le plus court de l'année pour l'hémisphère nord ;

Retrouvez éducol sur :

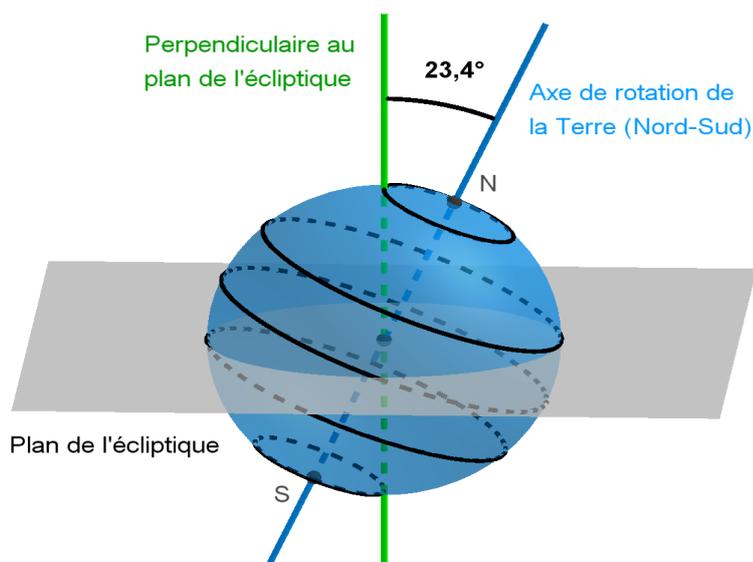


- les deux autres dates correspondent aux équinoxes de printemps (entre le 19 et le 21 mars) et d'automne (entre le 21 et le 24 septembre). L'axe se trouve alors dans un plan orthogonal à la direction des rayons solaires ; la durée des jours est égale à celle des nuits en tout point de la Terre. En tout point de l'équateur, le Soleil est au zénith à midi solaire. Les équinoxes sont les deux seules dates où les rayons solaires sont parallèles au plan équatorial.

En plus de l'Équateur et des Tropiques, deux cercles parallèles jouent un rôle particulier :

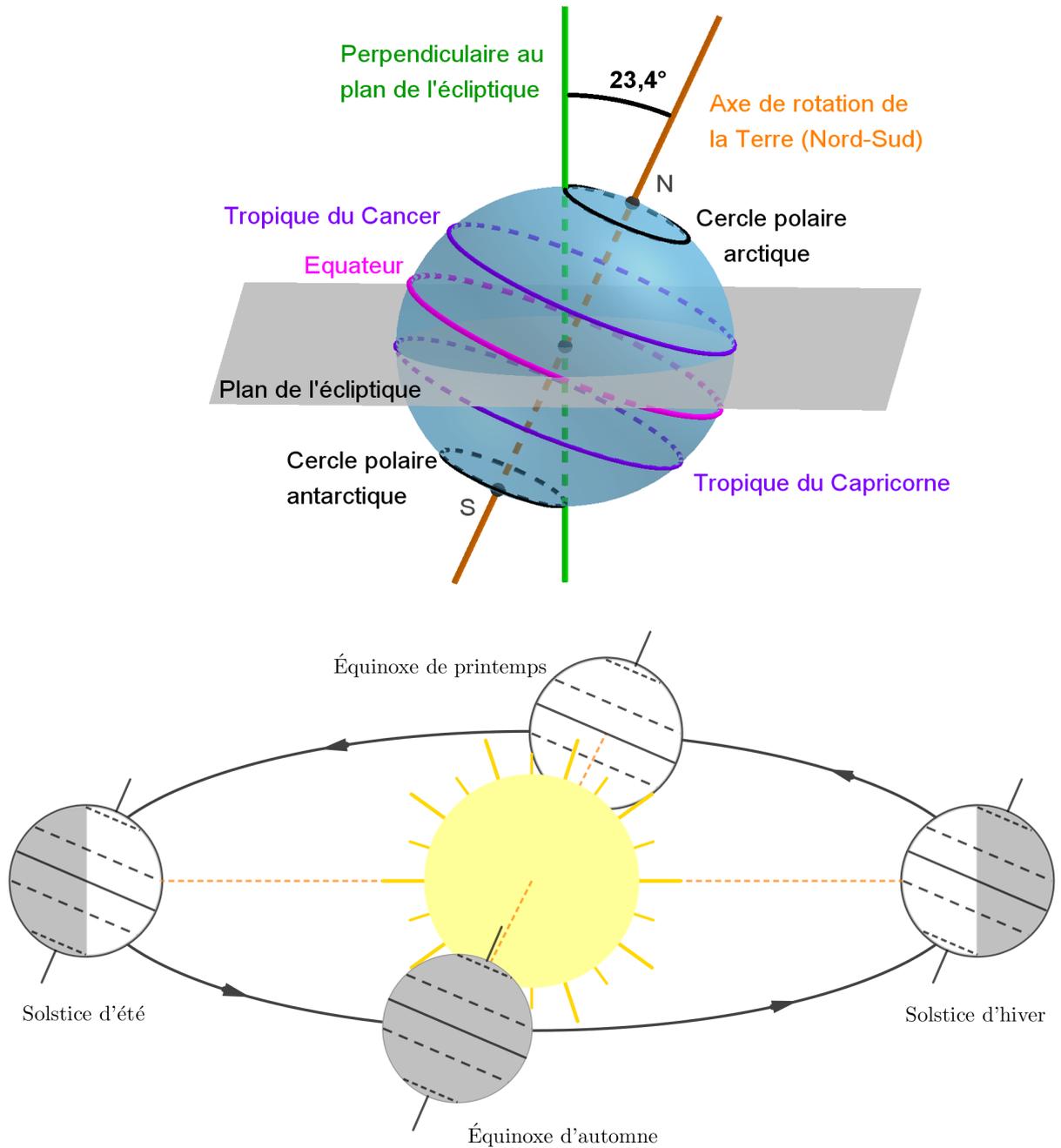
- le cercle polaire arctique et ;
- le cercle polaire antarctique.

Le cercle polaire arctique correspond à la latitude nord au-delà de laquelle il y a au moins une journée sans nuit et une journée sans jour pendant l'année. Les journées concernées se répartissent autour du solstice d'été et du solstice d'hiver. Au solstice de juin, les rayons solaires arrivent tangentiellement à la surface de la Terre en tout point du cercle arctique. Le cercle polaire arctique est le parallèle de latitude $66^{\circ} 53'$ Nord. Le cercle polaire antarctique est défini de manière similaire.



Retrouvez éduscol sur :

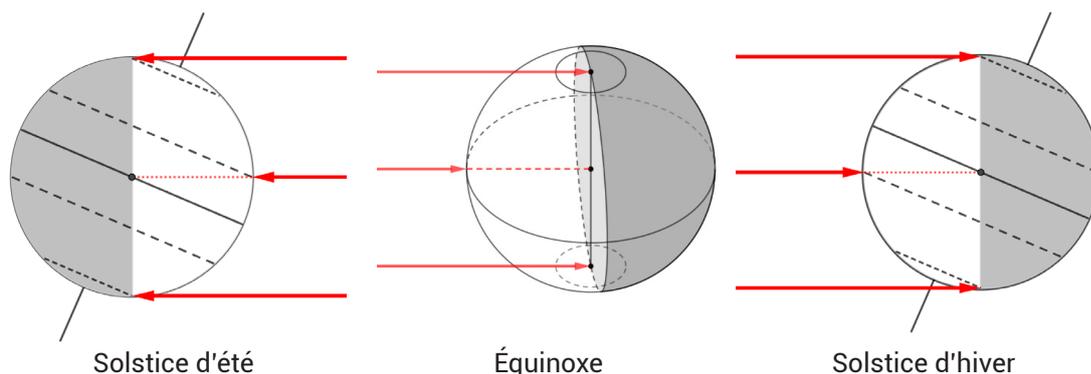




On notera, bien sûr, que le schéma précédent n'est pas réalisé à l'échelle.

Retrouvez éducol sur :





Vu de la Terre, le Soleil semble décrire un demi-cercle : il se lève à l'Est et se couche à l'Ouest. En un lieu donné, le midi solaire est l'instant de la journée où les rayons solaires indiquent la direction sud. C'est le moment de la journée où le Soleil semble être le plus haut dans le ciel.

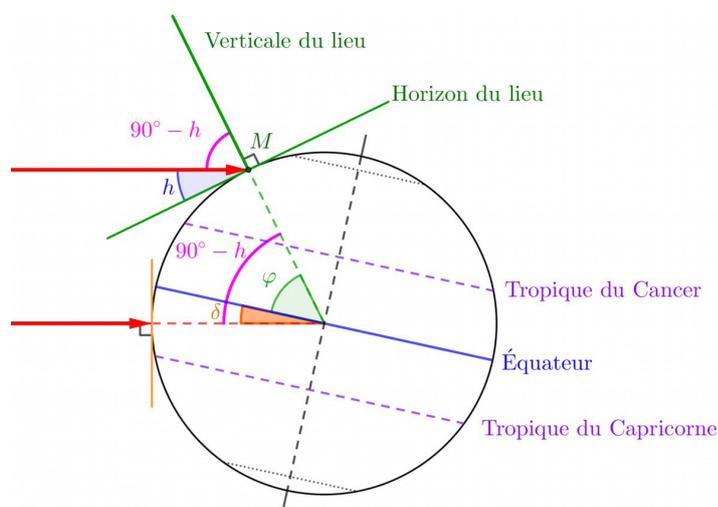
À une date quelconque, la déclinaison solaire δ est l'angle orienté entre le plan de l'équateur et les rayons solaires. Sa valeur dépend de l'inclinaison des rayons solaires par rapport à l'inclinaison de l'axe de la Terre, donc des saisons. Aux équinoxes, les rayons du Soleil sont parallèles au plan équatorial. La déclinaison est alors égale à zéro.

La valeur maximale de la déclinaison vaut $+ 23,45^\circ$. Elle correspond à la position du Soleil à midi solaire au solstice de juin en tout point du Tropique du Cancer (le soleil est alors au zénith).

La valeur minimale de la déclinaison vaut $- 23,45^\circ$. Elle correspond à la position du Soleil à midi solaire au solstice de décembre en tout point du Tropique du Capricorne (le soleil est alors au zénith).

La hauteur h du Soleil en un point de la surface de la Terre est définie comme étant l'angle aigu que forment, à midi solaire, les rayons solaires avec le plan de l'horizon.

Le dessin ci-dessous correspond à une déclinaison δ négative et à un point M situé dans l'hémisphère Nord.



Retrouvez éduscol sur :

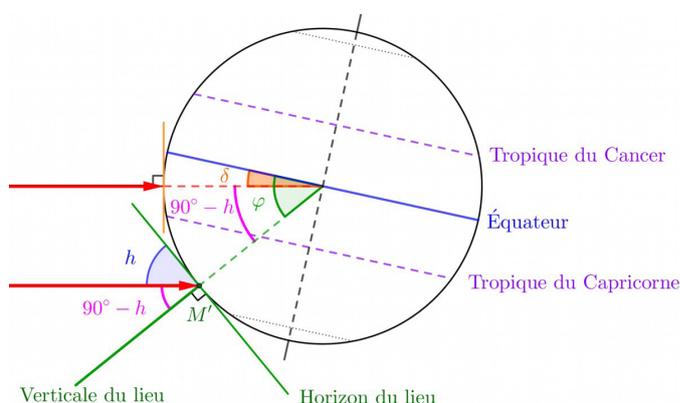


Un raisonnement sur les angles permet de montrer qu'au point M de latitude Nord égale à φ , la hauteur h_M du Soleil vérifie l'égalité :

$$\varphi = 90^\circ - h_M - |\delta|.$$

$$\text{Donc } h_M = 90^\circ - \varphi - |\delta|.$$

Un calcul similaire montre qu'au point M' de l'hémisphère Sud, ayant φ pour latitude sud et au même moment $\varphi = 90^\circ - h_{M'} + |\delta|$. Donc $h_{M'} = 90^\circ - \varphi + |\delta|$. On vérifie bien que le Soleil est plus haut dans le ciel en M' qu'en M.



Illustrations

Télécharger deux animations GeoGebra © intitulées « [Étalement d'un pinceau de lumière à la surface de la Terre](#) » et « [Puissance reçue par unité de surface – modèle discret](#) ».

La première a pour but de montrer qu'un pinceau cylindrique de lumière en provenance du Soleil s'étalement à la surface de la Terre et que cet étalement dépend de la latitude (déplacement Nord-Sud) mais aussi de l'heure de la journée (en se déplaçant vers l'Est ou l'Ouest). Pour cela, déplacer les points rouges et tourner la Terre. N.B. les rayons solaires sont perpendiculaires à la surface du globe au niveau de l'équateur, cette situation est un équinoxe.

La seconde discrétise la situation réelle. Ce nombre de points par unité de surface donne une idée de la variation de puissance reçue par unité de surface selon la latitude et l'heure de la journée. Cette animation est composée de plusieurs boutons :

- « Initialiser » pour initialiser la vue ;
- « Densité des rayons » pour varier le nombre de rayons par unité de surface ;
- « Points » pour faire apparaître une grille de particules (une par rayon) comme des photons
- « Projeter » pour projeter la grille de points à la surface de la Terre ;
- « zone d'aire constante » pour faire apparaître un cercle de rayon fixe à la surface de la Terre et calculer le nombre de points qui à l'intérieur de cette zone.

Retrouvez éducol sur :



Propositions d'activités

Activité 1

À quelle période de l'année correspond une déclinaison positive ?

Pour une déclinaison solaire positive, produire les schémas analogues à ceux qui figurent ci-dessus et relier la hauteur solaire, la déclinaison et la latitude.

Activité 2 : moyennes de températures

Une question fréquemment posée est de savoir si des données météorologiques récentes sont conformes aux températures calculées sur une période de référence.

La température moyenne saisonnière est définie comme la moyenne des températures mensuelles au cours des quatre saisons. Chaque saison correspond à trois mois consécutifs :

- printemps : les mois de mars, avril, mai ;
- été : les mois de juin, juillet, août ;
- automne : les mois de septembre, octobre, novembre ;
- hiver : les mois de décembre, janvier, février. Pour l'année n , l'hiver comprend le mois de décembre de l'année n et les mois de janvier et de février de l'année $n + 1$.

Pour un lieu donné, les températures de référence sont obtenues en calculant les moyennes de températures qui peuvent être mensuelles ou saisonnières sur une période de 30 ans.

Pour Météo-France, la période de référence s'étale entre 1981 et 2010.

La moyenne des moyennes saisonnières sur la durée de référence s'appelle la normale saisonnière.

Les données du fichier intitulé « [normales_saison.xls](#) » correspondent aux moyennes mensuelles des températures minimales enregistrées dans différentes villes ou lieux français (Ajaccio, Besançon, Biarritz, Cap de la Hève, Grenoble, île de Groix, Montpellier, Paris, Strasbourg).

Choisir un lieu donné pour lequel tous les calculs seront effectués.

1. Pour la période de référence 1981-2010, calculer et représenter graphiquement à l'aide d'un tableur :
 - les moyennes de températures minimales pour chacun des douze mois de l'année ;
 - les normales saisonnières.
2.
 - 2.1. Pour l'année 2016 ou pour la dernière année pour laquelle les données sont disponibles, calculer les moyennes saisonnières.
 - 2.2. Représenter graphiquement ces résultats et les comparer aux normales saisonnières.
3. Calculer au tableur et représenter graphiquement les écarts entre les températures mensuelles relevées en 2016 et les moyennes des températures mensuelles sur la période 1981-2010. Interpréter ces résultats.
4. Calculer au tableur et représenter graphiquement les écarts entre les moyennes saisonnières en 2016 et les normales saisonnières. Interpréter ces résultats.

Retrouvez éduscol sur :



Sitographie

- Site de [Météo France](#). Météo France propose une rubrique dédiée à l'[enseignement](#). Cette rubrique propose, par exemple une activité expérimentale pour [expliquer les saisons](#).
- Site de [données gouvernementales](#).
- Pour obtenir les données climatiques pour les villes du monde entier : [Climate-date.org](#).
- Futura Sciences : [Position et mouvement de la Terre autour du Soleil](#).
- Site [European Climate Assessment & Dataset](#).

Retrouvez éduscol sur :



LES MATHÉMATIQUES DE L'ENSEIGNEMENT SCIENTIFIQUE LA FORME DE LA TERRE ET LES MESURES À LA SURFACE DE LA TERRE

Mots-clés

Latitude, longitude, méridien, grand cercle, triangulation

Références au programme

L'environnement « plat » à notre échelle de perception cache la forme réelle de la Terre, dont la compréhension résulte d'une longue réflexion. Au-delà de la dimension historique et culturelle, la mise en œuvre de différentes méthodes de calcul de longueurs à la surface de la Terre permet de développer des compétences mathématiques de calcul et de représentation et invite à exercer un esprit critique sur les différents résultats obtenus, les approximations réalisées et les limites d'un modèle.

Savoirs

Dès l'Antiquité, des observations de différentes natures ont permis de conclure que la Terre était sphérique, alors même que, localement, elle apparaît plane dans la plupart des expériences quotidiennes.

Historiquement, des méthodes géométriques ont permis de calculer la longueur d'un méridien (environ 40 000 km) à partir de mesures d'angles ou de longueurs : méthodes dite d'Ératosthène et de triangulation plane. On repère un point à la surface de la Terre par deux coordonnées angulaires, sa latitude et sa longitude. Le plus court chemin entre deux points à la surface de la Terre est l'arc du grand cercle qui les relie.

Savoir-faire

- Calculer la longueur du méridien terrestre par la méthode dite d'Ératosthène.
- Calculer une longueur par la méthode de triangulation utilisée par Delambre et Méchain.
- Calculer le rayon de la Terre à partir de la longueur du méridien.
- Calculer la longueur d'un arc de méridien et d'un arc de parallèle.
- Comparer, à l'aide d'un système d'information géographique, les longueurs de différents chemins reliant deux points à la surface de la Terre.

Notions mathématiques mobilisées

- Proportionnalité.
- Géométrie dans le plan : angles alternes-internes, trigonométrie.
- Géométrie dans l'espace : repérage, sections planes de la sphère projections planes.
- Courbes à la surface de la Terre : méridiens, parallèles, géodésiques.

SOMMAIRE

<i>Histoire, enjeux et débats</i>	3
La forme de la Terre.....	3
Mesures du méridien terrestre.....	3
Histoire et définition du mètre.....	3
<i>Les mathématiques, la forme de la Terre et les mesures à la surface de la Terre</i>	4
Calcul du méridien terrestre par la méthode attribuée à Ératosthène.....	5
Calcul du méridien par triangulation.....	7
Repérage et chemins tracés à la surface de la Terre.....	13
<i>Propositions d'activités</i>	15
Activité 1 : calcul de la longueur du méridien sans aller en Égypte.....	15
Activité 2 : la rotondité de la Terre (source Hors-Série CLEA Maths et astronomie).....	15
Activité 3 : mise en œuvre de la triangulation plane.....	16
Activité 4 : triangulation et arpentage d'un terrain.....	17
Activité 5 : Triangulation et navigation par un amer.....	17
Activité 6 : longueurs de chemins à la surface de la Terre.....	18
Activité 7 : économie de carburant sur un vol Poitiers-Seattle.....	19
<i>Bibliographie et sitographie</i>	19

Retrouvez éduscol sur :



Histoire, enjeux et débats

La forme de la Terre

Au fil de l'Histoire, la forme de la Terre a posé question. Désormais, l'observation de la Terre depuis l'espace permet de constater qu'elle est presque ronde.

Avant la maîtrise des connaissances et des techniques pour effectuer une telle observation, la forme et la taille de la Terre ont suscité bien des débats scientifiques et se sont trouvées au cœur de nombreux enjeux.

Les éléments de cosmologie chinoise (quatrième siècle avant notre ère) reposent sur une Terre dont la surface est plane, en forme de disque, et sur un Soleil situé sur une demi-sphère s'appuyant sur le disque formé par la surface de la Terre.

Au Ve siècle av. J.-C., la Terre est considérée par les philosophes grecs comme étant plate, de la forme d'un disque, entièrement ceinturée par le fleuve Océan et recouverte d'un ciel en coupole hémisphérique. Cette conception, à l'origine de mesures effectuées par Anaxagore, fut remise en cause dès le IV^e siècle avant J.-C.

Platon (v. 428-348 av. J.-C.) justifie la rotondité de la Terre par deux observations :

- lors des éclipses de Lune, l'ombre projetée de la Terre est circulaire ;
- la configuration des cieux étoilés (hauteur des étoiles sur l'horizon) change lors des déplacements en latitude ; cela s'explique par la courbure de la Terre faisant obstacle à une vision complète du ciel.

Aristote (v. 384-322 av. J.-C.) donne quant à lui une explication – physique – à la rotondité de la Terre, en faisant apparaître la notion de figure d'équilibre.

Plus tard, Strabon (v. 58 av. J.-C. - 23 apr. J.-C.) observe que lorsqu'un bateau s'éloigne d'un port, sa coque, progressivement masquée par l'horizon (la courbure de la Terre), disparaît avant son mât.

Mesures du méridien terrestre

C'est à Ératosthène (284-192 av. J.-C.), pour qui la Terre était ronde, que serait attribuée la première estimation précise de la circonférence terrestre.

À Syène – aujourd'hui Assouan, dans la haute vallée du Nil en Égypte – le jour du solstice d'été à midi, les rayons du Soleil éclairent le fond des puits. Au même moment, à Alexandrie, ville située à peu près sur le même méridien, le soleil n'est déjà plus au zénith.

En s'appuyant sur le modèle d'une Terre sphérique située à distance infinie du soleil, Ératosthène aurait réalisé une étude géométrique et des calculs de proportionnalité lui permettant d'obtenir une valeur approchée de la circonférence terrestre.

Histoire et définition du mètre

Sous l'Ancien Régime, les seigneurs locaux imposent leurs mesures et leurs unités. L'expression « deux poids et deux mesures » devient en 1788 le symbole de l'inégalité, de l'injustice et du pouvoir des seigneurs. La Révolution française supprime le monopole seigneurial des poids et des mesures en abolissant les droits féodaux. Le climat de réforme

Retrouvez éduscol sur :



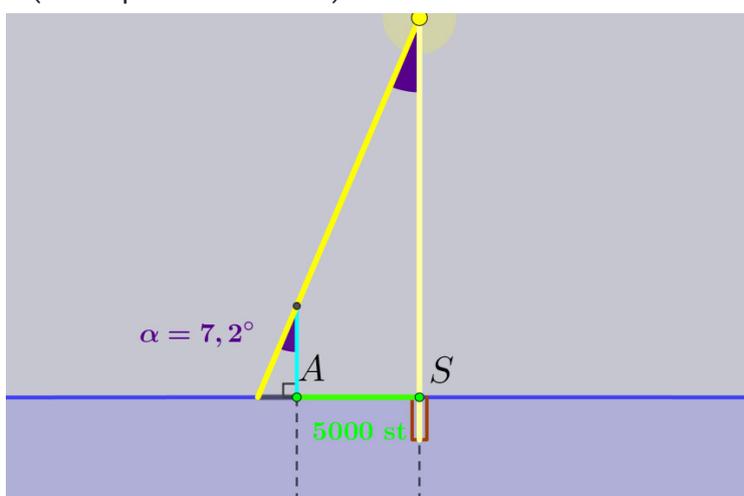
qui suit ces éléments révolutionnaires permet de précipiter le choix d'un étalon. L'idée est d'assurer l'invariabilité des mesures en les rapportant à un étalon universel qui ne soit fondé sur aucune vanité nationale, permettant ainsi l'adhésion de toutes les nations étrangères.

En 1791, Delambre et Méchain sont chargés par l'Assemblée Constituante de calculer la longueur de l'arc de méridien reliant Dunkerque à Barcelone afin de définir le mètre comme étant le dix millionième du quart du méridien terrestre. Ces travaux prennent plus de sept ans et conduisent ces deux scientifiques à effectuer des milliers de mesures pour réaliser une triangulation de Dunkerque à Barcelone : les deux tiers supérieurs, de Dunkerque à Rodez, incombent à Delambre, et le tiers inférieur de Rodez à Barcelone revient à Méchain. Les récits historiques témoignent d'une épopée très mouvementée.

Les mathématiques, la forme de la Terre et les mesures à la surface de la Terre

De tout temps, les mathématiques ont permis de représenter des objets inaccessibles à la vision directe et de calculer des longueurs inaccessibles à la mesure directe. La forme de la Terre et le calcul de la longueur du méridien en sont des exemples historiques. Les outils, objets et concepts mathématiques utilisés pour réaliser ces représentations et ces calculs opèrent non pas sur la réalité, mais sur des modèles. Un modèle, reposant sur des hypothèses, est une représentation simplifiée de la réalité.

Anaxagore (né vers 500 av. J.-C. et mort en 428 av. J.-C.) est un philosophe grec dont la théorie cosmique n'attribue pas les phénomènes célestes aux Dieux du Panthéon. Pour Anaxagore, la Terre est plate, de la forme d'un disque, alors que le Soleil est rond et à distance finie de la Terre. Vers l'an 434 av. J.-C., il estime la distance de la Terre au Soleil et le diamètre du soleil. Des voyageurs revenant de la ville de Syène (représentée sur la figure par la lettre S), en haute vallée du Nil (près du barrage d'Assouan) lui ont appris que le 21 juin, jour du solstice d'été, à midi, le Soleil se trouve exactement à la verticale du lieu, et donc que les objets verticaux n'ont pas d'ombre portée. D'autre part, il sait qu'Alexandrie (représentée par la lettre A), située à 5000 stades (800 km environ) au nord de Syène, le Soleil est ce même jour à midi, à $7,2^\circ$ (un cinquantième de tour) de la verticale.



Anaxagore (500 av. J.-C.) suppose la Terre plate et mesure la distance au Soleil.

Retrouvez éduscol sur :



Cela lui permet de calculer la distance d entre Alexandrie et le Soleil : la distance obtenue, en stades, correspond à 6500 km). À partir de ce résultat, mesurant le diamètre apparent du Soleil ($0,5^\circ$), il calcule le diamètre du Soleil (correspondant à 57 km). Accusé de porter atteinte aux dogmes de la religion, il est arrêté, puis banni d'Athènes, sa ville natale. Les calculs mathématiques d'Anaxagore sont corrects, mais l'hypothèse à la base de son modèle est fausse.

Deux siècles plus tard, le modèle d'Anaxagore est soi-disant réexaminé par Ératosthène. Pour lui, la Terre est ronde, comme le Soleil. On prétend qu'il fait l'hypothèse que la distance de la Terre au Soleil est si grande que ses rayons frappent la surface de la Terre selon un faisceau de droites parallèles. À partir de ce modèle, il aurait calculé la longueur du méridien terrestre.



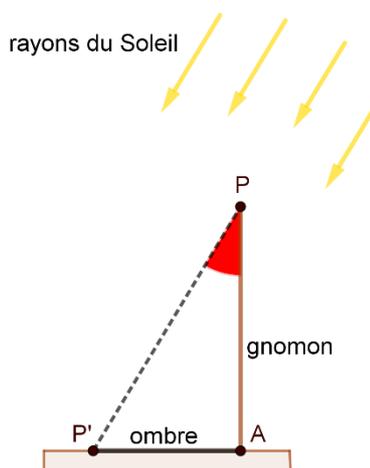
Télécharger l'animation Geogebra © intitulée « [Anaxagore vs Ératosthène](#) ». Cette animation permet de visualiser les deux modèles.

Calcul du méridien terrestre par la méthode attribuée à Ératosthène

Comme Anaxagore, Ératosthène serait parti de la constatation suivante : « *Dans la ville de Syène, à midi le jour du solstice d'été, le soleil éclaire le fond des puits* ».

Syène est approximativement située sur le tropique du Cancer, ce qui explique qu'au solstice d'été, le Soleil est à la verticale du sol. Cela permet aux rayons du soleil d'atteindre le fond des puits.

Le même jour à la même heure à Alexandrie, le Soleil n'est pas à la verticale. Ératosthène aurait mesuré l'angle entre les rayons solaires et la verticale : un angle évalué à environ $1/50^{\text{e}}$ d'angle plein (un angle plein est un angle de 360 degrés), soit par une mesure directe avec un goniomètre, soit par une comparaison entre l'ombre d'un gnomon planté verticalement au sol et le gnomon lui-même.



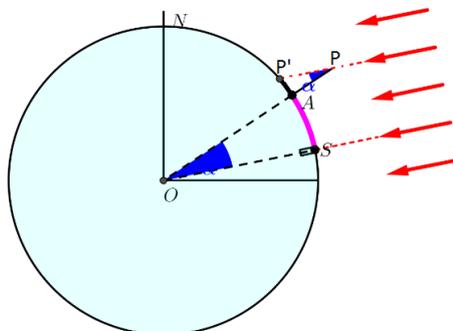
Dans la figure ci-dessus, le gnomon à Alexandrie est représenté par le segment $[AP]$, l'ombre du gnomon par le segment $[AP']$.

Syène et Alexandrie sont approximativement situées sur le même méridien.

Retrouvez éduscol sur :



Dans la figure ci-dessous, les notations précédentes sont conservées ; le point S correspond à Syène et le point O au centre de la Terre.

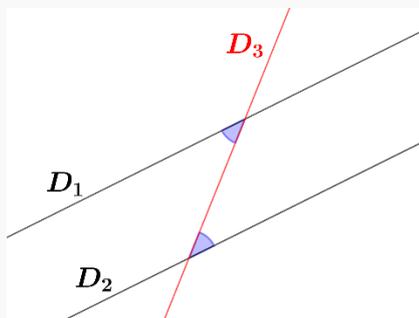


Les rayons du soleil étant parallèles, les droites (PP') et (OS) le sont. Elles forment donc avec la sécante (OP) des angles alternes-internes égaux.

Ainsi, $\widehat{P'PA} = \widehat{AOS} =$ « 1/50e d'angle plein ».

Les angles alternes-internes

Si deux droites D_1 et D_2 sont parallèles, alors elles forment avec une sécante D_3 des angles alternes-internes de même mesure.



De plus, les mesures des arcs et les mesures des angles qui les interceptent étant proportionnelles, l'arc AS – distance entre Syène et Alexandrie – mesure 1/50e de la circonférence de la Terre.

Comme Anaxagore, Ératosthène aurait estimé la distance entre Syène et Alexandrie à 5000 stades. On considère ici qu'un stade égyptien correspond à environ 157,5 mètres, même si on en fournit parfois d'autres valeurs (variant de 151,2 m à 158,1 m).

Une valeur approchée de la circonférence de la Terre est alors obtenue en multipliant la distance Syène-Alexandrie par 50 :

$$5\,000 \text{ stades} \times 50 = 250\,000 \text{ stades.}$$

Retrouvez éducol sur :



Avec nos unités de mesure, Ératosthène serait parvenu à estimer la circonférence de la Terre à :

$$250\,000 \times 157,5 \text{ m} = 39\,375\,000 \text{ m} = 39\,375 \text{ km.}$$

Hypothèses simplificatrices du modèle

- Le modèle présuppose que les rayons du soleil qui frappent la Terre sont parallèles entre eux, c'est-à-dire que le Soleil est à une distance infinie de la Terre. Il repose également sur l'hypothèse de propagation rectiligne de la lumière depuis le Soleil, ce qui suppose que les milieux traversés sont homogènes. Le modèle néglige le phénomène de réfraction à l'entrée dans l'atmosphère.
- Le modèle présuppose que Syène et Alexandrie sont situées sur le même méridien, ce qui n'est pas tout à fait exact, Syène et Alexandrie ayant respectivement environ 32° et 30° de longitude.
- Le modèle approche l'ombre du gnomon (arc de cercle à la surface de la Terre) par un segment.

En considérant que la Terre a une circonférence de 40 000 kilomètres, l'erreur commise par la méthode dite d'Ératosthène est d'environ 625 kilomètres ; l'erreur relative de cette méthode est donc :

$$\frac{625}{40\,000} \approx 0,0156 \approx 1,56 \% \text{ de la valeur réelle.}$$

L'erreur commise semble exceptionnellement petite compte tenu des hypothèses faites et des mesures approximatives sur lesquelles le calcul est basé. Manifestement, plusieurs imprécisions se compensent pour parvenir à ce résultat.



Télécharger l'animation Geogebra © intitulée « [Expérience d'Ératosthène](#) ». Cette animation permet d'illustrer la méthode attribuée à Ératosthène.

Calcul du méridien par triangulation

Principe de la triangulation plane

La triangulation plane consiste à « enfermer » une longueur inaccessible à la mesure dans une chaîne de triangles dont on est capable de mesurer les angles et dont la mesure de l'un des côtés est connue. Les calculs effectués par triangulation reposent sur les deux résultats suivants :

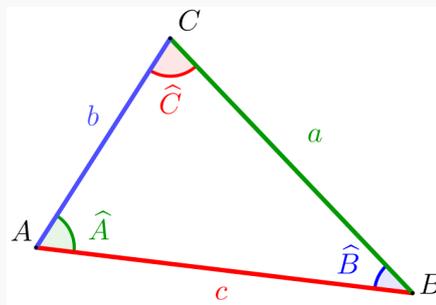
- la somme des angles d'un triangle et ;
- la loi des sinus.

Retrouvez éduscol sur :



Géométrie

Soit ABC un triangle quelconque. La figure ci-dessous précise les notations utilisées pour les longueurs et les angles.



Somme des angles d'un triangle

La somme des angles d'un triangle est égale à 180° .

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$$

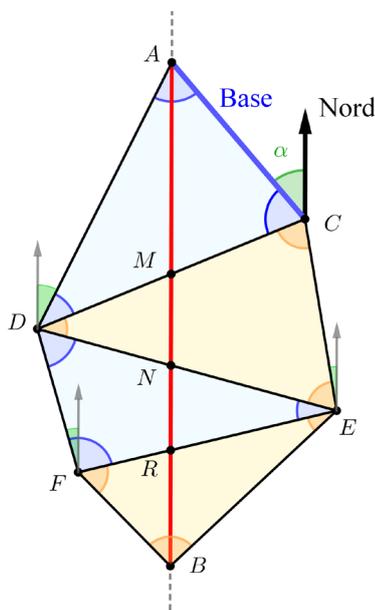
Loi de sinus

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}}$$

En appliquant ces résultats, à partir des mesures connues de l'un des côtés et de deux angles d'un triangle, on peut calculer les mesures du troisième angle et des deux autres côtés.

Considérons un segment de méridien $[AB]$ dont la longueur est inaccessible par une mesure directe. L'objectif est donc de calculer la longueur de ce segment.

De part et d'autre du segment $[AB]$, on construit autant de triangles que nécessaire. Dans l'exemple ci-dessous, la triangulation s'effectue avec quatre triangles ACD , CDE , DEF et FEB . Les longueurs AM , MN , NR et RB seront calculées à partir de mesures dans ces triangles.



Retrouvez éduscol sur :



La longueur AB est obtenue en additionnant les quatre longueurs AM , MN , NR et RB :

$$AB = AM + MN + NR + RB.$$

Calcul de la longueur AM

On se place dans le triangle ACM .

Expérimentalement, on peut mesurer au point C :

- l'angle \hat{C} , avec le cercle répétiteur, en visant les points A et M ;
- l'angle α entre AC et le Nord avec une boussole.

Le méridien (AM) ayant aussi la direction Nord-Sud, l'angle \hat{A} est égal à α (\hat{A} et α sont alternes-internes).

Or $\hat{A} + \hat{C} + \hat{M} = 180^\circ$. On en déduit la valeur de l'angle \hat{M} :

$$\hat{M} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{C}.$$

Ainsi, on connaît la longueur AC , et trois angles \hat{A} , \hat{C} , et \hat{M} .

Sur la figure expliquant le principe de triangulation, la loi des sinus dans le triangle ACM permet le calcul de la longueur AM :

$$AM = AC \times \frac{\sin(\hat{C})}{\sin(\hat{M})}.$$

Elle permet également le calcul de la longueur CM qui sera utile lors du calcul suivant.

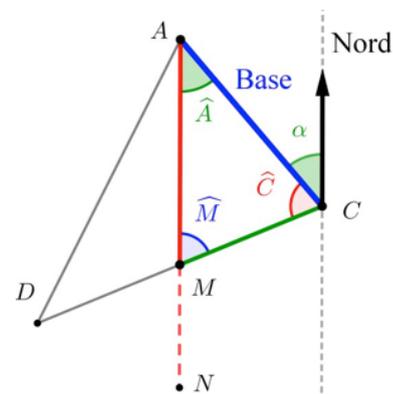
$$CM = AC \times \frac{\sin(\hat{A})}{\sin(\hat{M})}.$$

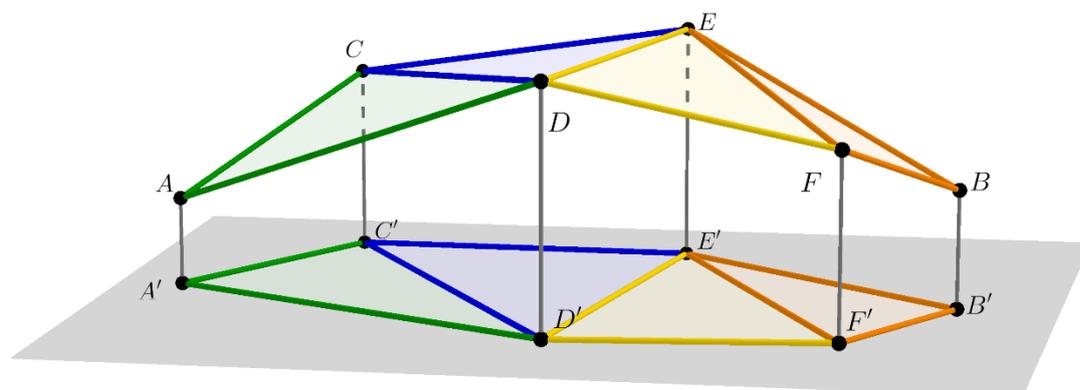
On calcule alors la longueur CD , qui va servir de nouvelle base. La loi des sinus dans le triangle ACD le permet :

$$CD = AC \times \frac{\sin(\hat{A})}{\sin(\hat{D}')}.$$

Le calcul des longueurs des autres morceaux de méridien MN , NR et RB s'effectue de proche en proche, en suivant la méthode décrite pour le calcul de AM .

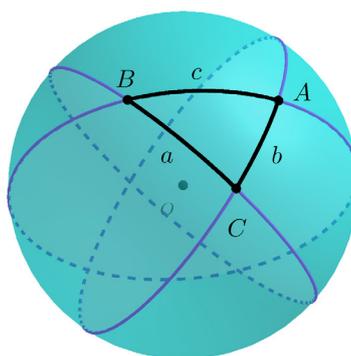
Remarque : Les sommets des triangles visés par Delambre et Méchain n'étant pas situés à la même hauteur (sommets de clochers, sommets de collines ou de tours), les triangles qui ont servi pour les mesures sont en fait « inclinés », alors que la méthode de triangulation s'applique pour des triangles plans. Delambre et Méchain ont dû mesurer l'angle que faisait chaque triangle incliné avec la verticale pour le ramener à l'horizontale.





Hypothèses simplificatrices du modèle

Dans la réalité, les arcs de méridien sont des arcs curvilignes et les triangles considérés sont des triangles sphériques.



Le modèle utilisé dans la triangulation assimile des arcs de cercles à des segments. Pour des longueurs petites par rapport à la distance entre Dunkerque et Barcelone, l'erreur commise est négligeable.

Histoire de la triangulation par Delambre et Méchain

Pour mesurer l'arc du méridien joignant Dunkerque à Barcelone, Delambre et Méchain construisent un enchevêtrement d'une centaine de triangles ayant pour sommets des lieux surélevés : clochers d'églises, sommets de collines, tours... visibles les uns depuis les autres. Les deux savants partent en pleine Révolution pour un périple qui aurait dû s'achever au bout d'un an. L'expédition se prolongera jusqu'en 1798 dans des conditions difficiles. Il faut monter le matériel au haut des clochers, franchir des montagnes, subir les intempéries, la méfiance des habitants et une situation politique agitée. Suscitant incompréhension et hostilité, risquant le froid, la maladie, la prison et la mort, ils parviennent à réaliser la mesure de l'arc au cours d'une des périodes les plus mouvementées de l'histoire. De 1792 à 1793, Delambre, suspecté de complot, a de nombreux démêlés avec des gardes nationaux locaux et ne peut travailler efficacement. Il est même emprisonné et manque d'y perdre la vie. Peu après son départ, Méchain est arrêté puis relâché, ses instruments de mesures étant jugés suspects. Quand il arrive en Espagne, les repères fiables nécessaires à la mesure des

Retrouvez éducol sur :

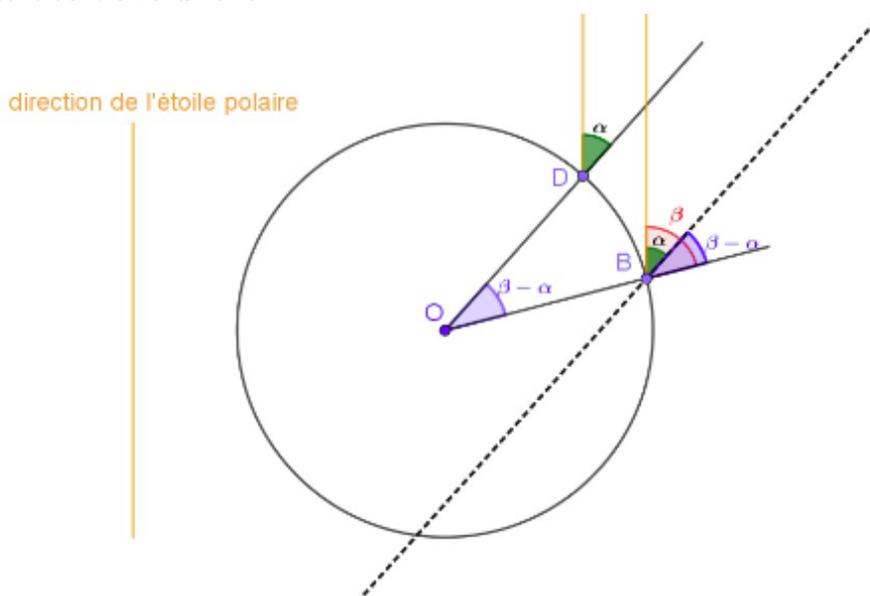


angles sont difficiles à trouver dans les montagnes pyrénéennes. Il est victime d'un grave accident dans lequel il perd l'usage du bras droit. La guerre entre la France et l'Espagne instaure le régime de la Terreur entre 1793 et 1795 ; elle empêche Méchain de rentrer en France alors qu'il a terminé toutes ses mesures. On lui confisque son matériel et son argent. Savant théoricien, Méchain veut vérifier la justesse de ses calculs. Il se rend compte d'une incohérence dans les résultats. Cette erreur, qu'il gardera secrète, le tourmentera jusqu'à la fin de sa vie et le conduira à la folie. Pour mesurer les angles des différents triangles, Delambre et Méchain ont utilisé le « cercle répétiteur » inventé par Borda et Lenoir dont le principe est de pouvoir répéter autant de fois que l'on veut la même mesure sans revenir à zéro. Delambre et Méchain ont lissé les erreurs de mesures par des calculs de moyennes. Cela a nécessité de répéter certaines visées plus d'une centaine de fois. En revanche, une unique mesure de longueur est nécessaire au départ : celle de la base. Elle a été effectuée à l'aide de règles plates mesurant 12 pieds, soit environ 4 mètres, entre Melun et Lieusaint, deux villes choisies pour être situées dans une région particulièrement plate (l'Île de France).

La longueur de l'arc de méridien reliant Dunkerque à Barcelone étant déterminée, la connaissance de la différence des latitudes de ces deux villes permet de déterminer la longueur du méridien.

Pour déterminer cet angle, les astronomes ont mesuré les angles α et β entre la verticale (passant par le centre de la Terre) et la direction d'une étoile lointaine, l'étoile polaire par exemple, à Dunkerque et à Barcelone.

La figure ci-dessous illustre ce procédé : le cercle tracé est le méridien passant par Dunkerque (représenté par le point D) et Barcelone (représenté par le point B). Le point O représente le centre de la Terre.



L'angle \widehat{BOD} , différence des latitudes entre Dunkerque et Barcelone, a pour mesure $\beta - \alpha$.

Retrouvez éducol sur :



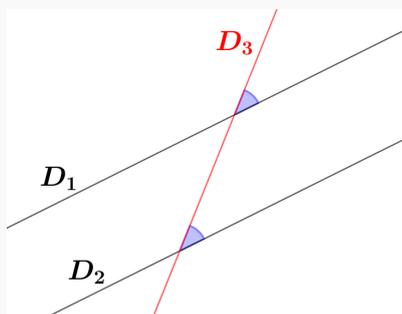
Démonstration

α est également la mesure de l'angle de sommet B formé par la parallèle à (OD) passant par B et la direction de l'étoile polaire. Par la relation de Chasles, $\beta - \alpha$ est la mesure de l'angle de sommet B formé par la droite (OB) et la parallèle à (OD) passant par B .

D'après l'égalité des angles correspondants, cet angle est aussi égal à l'angle \widehat{BOD} .

Les angles correspondants

Si deux droites D_1 et D_2 sont parallèles, alors elles forment avec une sécante D_3 des angles correspondants de même mesure.



La longueur du quart de méridienne ainsi calculée par Delambre et Méchain est de 5 130 740 toises. La dix-millionième partie de cette longueur a défini le mètre jusqu'en 1983.

Si le mètre correspond au dix-millionième de l'arc de méridien entre le pôle et l'équateur, l'arc en question devrait donc mesurer exactement 10 millions de mètres. Or les dernières mesures par satellite sont formelles : la longueur du méridien entre le pôle et l'équateur mesure 10 002 290 mètres. Il manque donc 0,229 millimètres au mètre de Delambre et Méchain.

Depuis 1983, le mètre n'est plus défini comme étant le quart du dix-millionième du méridien terrestre, mais comme étant la distance parcourue dans le vide par la lumière en $1/299\,792\,450$ de seconde. Cette distance est mesurée au laser.

Retrouvez éduscol sur :



Repérage et chemins tracés à la surface de la Terre



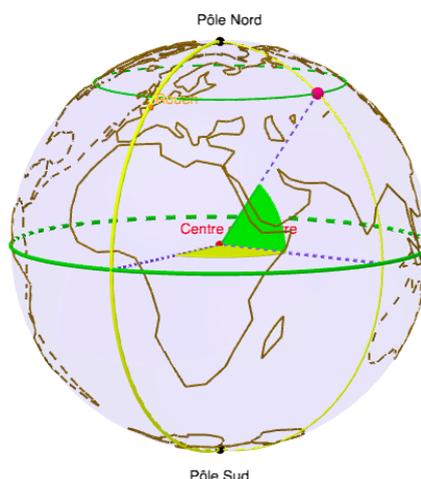
Télécharger l'animation Geogebra © intitulée « [Revoir latitude et longitude sur Terre](#) ». Cette animation permet de remobiliser le repérage d'un point à la surface de la Terre et les notions de méridien et de parallèle.

Méridien de Greenwich
 Equateur
 Rotation de la planète

Recherchez Rome 53°N latitude

41°N 12°E 82°E longitude

Opacité



Plus court chemin (géodésique)

Vocabulaire autour de la sphère

Considérons deux points A et B sur une sphère de centre O.

Le grand cercle

Lorsque deux points A et B ne sont pas diamétralement opposés, les points A, B et O définissent un unique plan. L'intersection de ce plan avec la sphère porte le nom de grand cercle.

Arc

Un arc de cercle est une partie de cercle délimitée par deux points.

On admet que le plus court chemin à la surface de la Terre reliant deux points A et B est le plus petit des deux arcs du grand cercle passant par A et B. Cette distance est également appelé géodésique.

Lorsque A et B sont diamétralement opposés sur la sphère terrestre, le plus court chemin à la surface de la Terre entre ces deux points a pour mesure celle du demi-méridien. Il est réalisé par une infinité de demi-cercles.

Retrouvez éduscol sur :

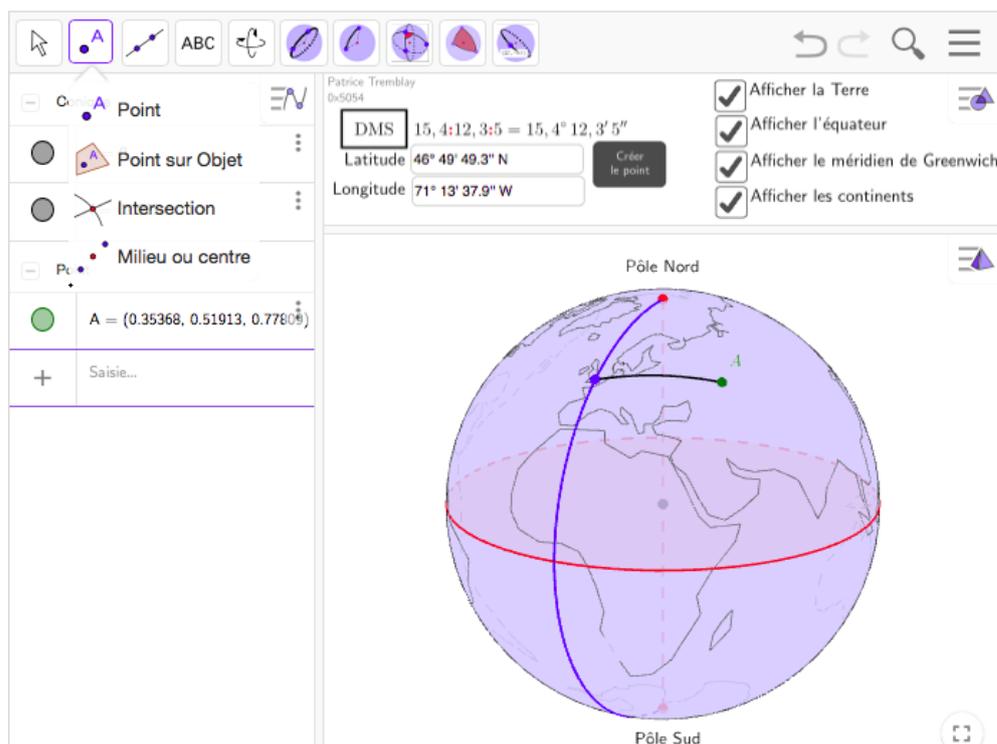




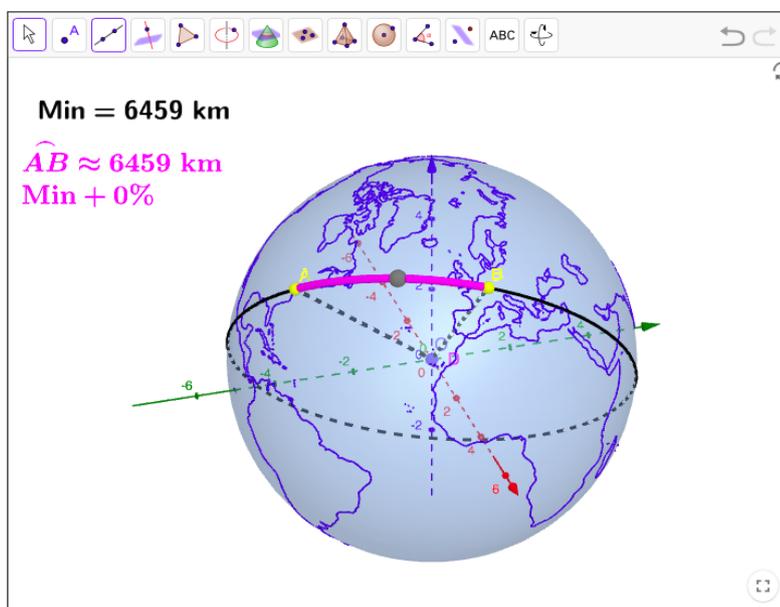
Illustrations

Télécharger l'animation Geogebra © intitulée « [Des constructions à la surface de la Terre](#) ». Cette animation donne des outils pour :

- construire des points de longitude et latitude données ;
- tracer le grand cercle passant par deux points non diamétralement opposés ;
- tracer des arcs de cercles et mesurer leur longueur ;
- tracer le méridien et le parallèle passant par un point ;
- tracer des triangles sphériques.



Télécharger l'animation Geogebra © intitulée « [Chemin le plus court à la surface de la Terre](#) ». Cette animation permet de conjecturer ou de visualiser le plus court chemin à la surface de la Terre entre deux points à la surface de la Terre.



Retrouvez éducol sur :



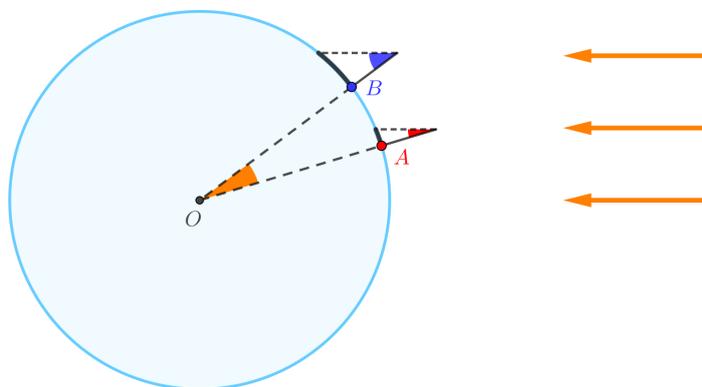
Propositions d'activités

Activité 1 : calcul de la longueur du méridien sans aller en Égypte

Dans deux villes A et B choisies sur un même méridien, planter le même jour à midi au soleil un bâton bien vertical dans le sol.

Pour chacune, à partir de l'ombre formée, calculer les angles au sommet.

Connaissant la distance entre les deux villes, retrouver une valeur approchée de la circonférence de la Terre.



Activité 2 : la rotondité de la Terre (source Hors-Série CLEA Maths et astronomie)

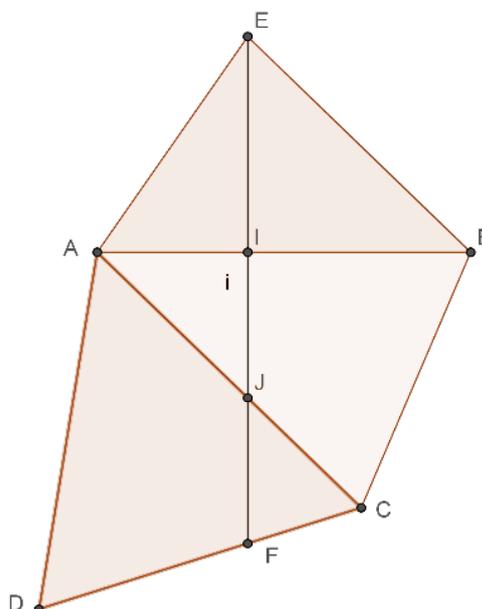
La Terre est supposée sphérique, de 6 370 km de rayon.

1. Un enfant situé au niveau de la mer voit s'éloigner un voilier de 20 m de hauteur. À quelle distance sera le voilier lorsqu'il aura totalement disparu pour la première fois de la vue de l'enfant ?
2. L'enfant décide de monter au sommet d'une colline qui culmine à 300 m au-dessus du niveau de la mer. À quelle distance sera le voilier lorsqu'il aura totalement disparu pour la première fois de la vue de l'enfant ?

Retrouvez éduscol sur :



Activité 3 : mise en œuvre de la triangulation plane



Le segment $[EF]$ joue ici le rôle de la méridienne Dunkerque-Barcelone. L'objectif est d'en mesurer la longueur.

La triangulation comporte ici quatre triangles. Les premières mesures réalisées sont :

- la base $AB = 7,5$ m ;
- les trois mesures d'angles : $\widehat{BAE} = 56^\circ$, $\widehat{AEF} = 30^\circ$ et $\widehat{ABE} = 45^\circ$.

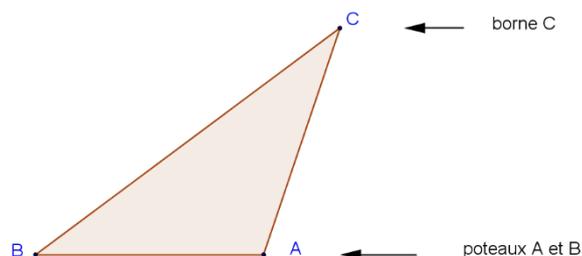
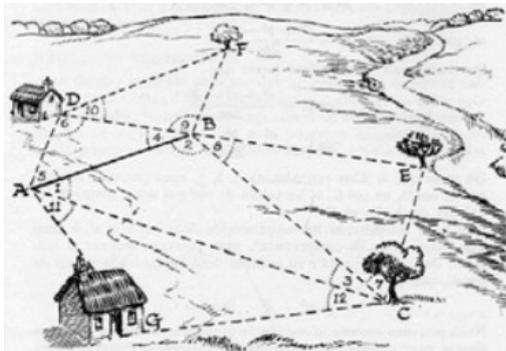
- Calculer la mesure de l'angle \widehat{AEB} , puis la longueur AE .
- À présent, dans le triangle AEI , on connaît un côté et deux angles. On peut donc le résoudre.
 - Calculer la mesure de l'angle \widehat{EIA} puis la longueur EI qui est le premier « morceau » de la méridienne.
 - Calculer la longueur AI .
- On mesure ensuite les angles : $\widehat{BAC} = 45^\circ$ et $\widehat{ABC} = 67^\circ$.
 - Calculer \widehat{ACB} et la longueur AC .
 - La résolution du triangle AIJ est possible. Déterminer IJ qui est le deuxième « morceau » de la méridienne.
 - Calculer la longueur AJ .
- On mesure les angles $\widehat{ADC} = 64^\circ$ et $\widehat{CAD} = 54^\circ$.
 - En résolvant le triangle CJK , déterminer la longueur JK qui est le troisième « morceau » de la méridienne.
 - Calculer la longueur KC .
- On mesure les angles $\widehat{DCF} = 46^\circ$ et $\widehat{ABC} = 67^\circ$. Calculer la longueur KF , quatrième « morceau » de la méridienne.
- Calculer la longueur EF de la méridienne.

Retrouvez éduscol sur :



Activité 4 : triangulation et arpentage d'un terrain

Cette activité est extraite du site de l'institut de recherche sur l'enseignement des mathématiques (IREM) de la Réunion.



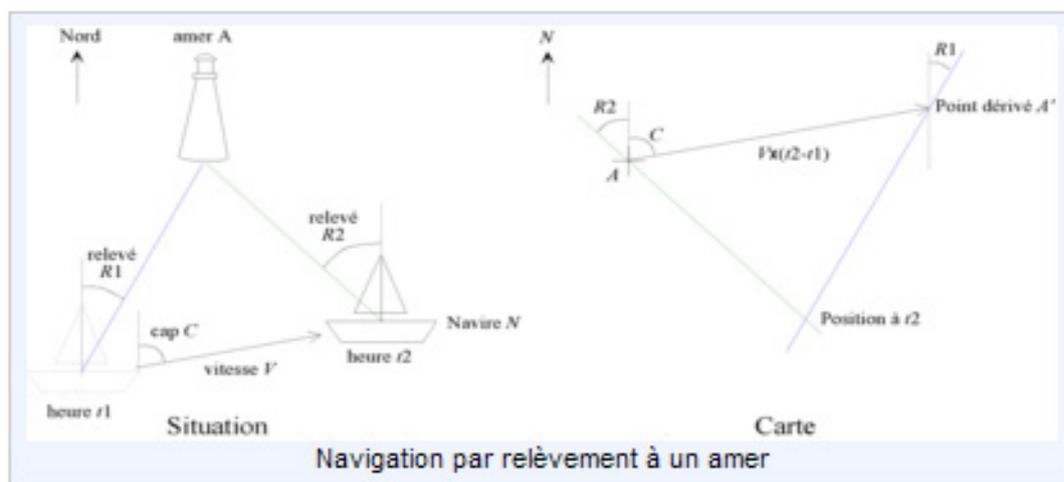
Pour mesurer l'aire d'un triangle, la démarche habituelle (voir figure) consiste à planter deux poteaux aux points A et B et, avec un décimètre ou une chaîne d'arpenteur, à mesurer la distance qui les sépare : c'est la ligne de base. Une lunette d'arpenteur placée en A permet de repérer sa direction (« azimut »). Deux visées successives de la borne C puis du poteau B permettent d'obtenir l'angle \hat{A} du triangle ABC par soustraction des valeurs lues sur le plateau d'azimut. À partir du point B on mesure l'angle \hat{B} de façon analogue.

Un travail analogue peut être mené à partir de plans cadastraux.

Activité 5 : Triangulation et navigation par un amer

Cette activité est extraite du site de l'institut de recherche sur l'enseignement des mathématiques (IREM) de la Réunion.

Comment se repérer en mer lorsqu'on aperçoit une terre ?



D'après le site <http://irem.univ-reunion.fr/IMG/png/application2.png>

Jusque dans les années 1980, la triangulation était essentiellement utilisée pour mesurer les distances.

Retrouvez éducol sur :



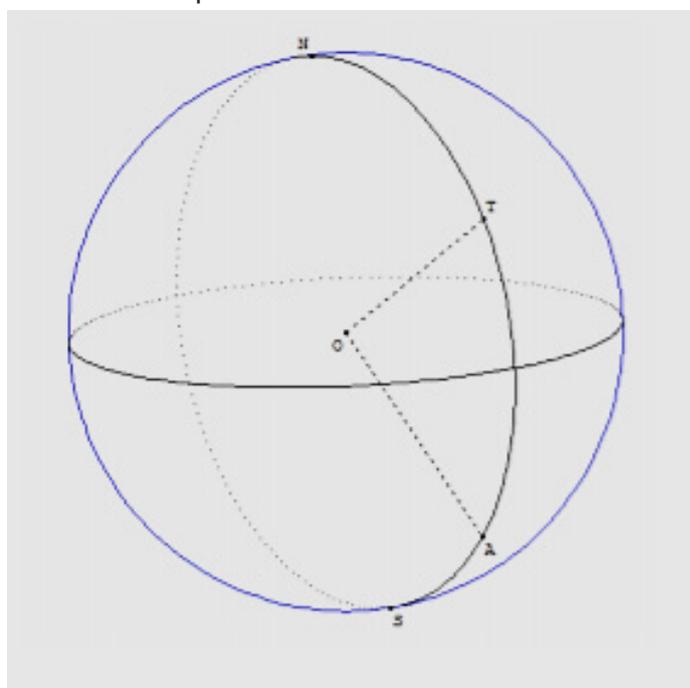
Considérons un navire placé au point B. Le marin voit la lumière émise par un phare situé au point A. Le marin effectue alors un relèvement pour mesurer l'angle fait entre la droite (AB) et le Nord indiqué par une boussole. Il obtient la mesure de l'angle $\widehat{R1}$.

Le bateau dérive à une certaine vitesse connue, il se trouve alors en un point C. Le marin mesure l'angle fait entre la droite (AC) et le Nord, il obtient la mesure de l'angle $\widehat{R2}$.

Le marin se trouve donc dans un triangle ABC dont deux angles et la mesure d'un côté [BC] sont connus. Le procédé de triangulation peut être appliqué pour se repérer en mer.

Activité 6 : longueurs de chemins à la surface de la Terre

- Plus court chemin entre deux points situés sur un même méridien.



- 1.1. Trouver les coordonnées géographiques des villes Tokyo et Adélaïde. Justifier que ces deux villes sont situées sur un même méridien.
 - 1.2. Quelle est la longueur du plus court chemin joignant ces deux villes ? Justifier la réponse.
- Plus court chemin entre deux points situés sur des demi-méridiens opposés.
 - 2.1. Vérifier que les villes de Jakarta et Montréal sont situées sur des demi-méridiens opposés.
 - 2.2. Calculer la longueur du plus court chemin reliant ces deux villes.
- Chemins entre deux points situés sur un même parallèle et diamétralement opposés. On donne les coordonnées géographiques des villes d'Anchorage et Saint-Pétersbourg : Anchorage ($60^\circ \text{ N} - 150^\circ \text{ O}$) ; Saint-Pétersbourg ($60^\circ \text{ N} - 30^\circ \text{ E}$).
 - 3.1. Justifier que ces deux villes sont situées sur un même parallèle et qu'elles sont diamétralement opposées sur ce parallèle.
 - 3.2. Calculer la longueur du chemin reliant Anchorage à Saint-Pétersbourg le long de ce parallèle.
 - 3.3. Un avion a le choix entre deux itinéraires : celui qui suit le soixantième parallèle et celui qui passe par le pôle Nord. Indiquer, en justifiant, le meilleur choix pour la compagnie aérienne.

Retrouvez éducol sur :



Activité 7 : économie de carburant sur un vol Poitiers-Seattle

Les villes de Seattle et Poitiers sont situées toutes deux sur le parallèle de latitude 47° . On note J le centre de ce parallèle, S la position de Seattle et P celle de Poitiers sur ce parallèle.



1. Calculer le rayon de ce parallèle.
2. Calculer la longueur du plus petit arc du parallèle reliant S à P.
3. Calculer la longueur du chemin reliant Seattle au Pôle Nord en suivant le méridien passant par Seattle.
4. Calculer la longueur du chemin reliant Poitiers au Pôle Nord en suivant le méridien passant par Poitiers.
5. Sur un vol Poitiers-Seattle par un avion consommant 3 L de carburant pour 100 km par passager, quelle serait l'économie de carburant réalisée par une compagnie aérienne optant pour un itinéraire passant par le Pôle Nord plutôt que de suivre le parallèle reliant Poitiers à Seattle ?
6. Déterminer, à l'aide d'un système d'information géographique, le plus court chemin joignant ces deux villes et expliquer les écarts avec les longueurs calculées précédemment.

Bibliographie et sitographie

- Michel Serres, Les origines de la géométrie, Flammarion, 2011.
- Denis Guedj, La méridienne, Points, 2008.
- Denis Guedj, Le Mètre du monde, Points, 2000.
- Denis Guedj, Les cheveux de Bérénice, Points, 2007.
- Site [Planet Terre](#).
- Site de l'université Lille : [comment fonctionne un GPS ?](#)
- Site du réseau national de la métrologie française : [Le LNE pilote le réseau de la métrologie française](#), [Histoire de la mesure](#).

Retrouvez éducol sur :



LES MATHÉMATIQUES DE L'ENSEIGNEMENT SCIENTIFIQUE LES SONS PURS ET COMPOSÉS

Mots-clés

Fréquence, période, harmoniques, fondamentale.

Références au programme

La banalité du son dans l'environnement cache une réalité physique précise.

Savoir

Un son pur est associé à un signal dépendant du temps de façon sinusoïdale.

Un signal périodique de fréquence f se décompose en une somme de signaux sinusoïdaux de fréquences multiples de f . Le son associé à ce signal est alors appelé son composé.

f est appelée fréquence fondamentale. Les autres fréquences sont appelées harmoniques.

La puissance par unité de surface transportée par une onde sonore est quantifiée par son intensité. Son niveau d'intensité sonore est exprimé en décibels selon une échelle logarithmique.

Savoir-faire

- Utiliser un logiciel permettant de visualiser le spectre d'un son. Utiliser un logiciel pour produire des sons purs et des sons composés.
- Relier puissance sonore par unité de surface et niveau d'intensité sonore exprimé en décibels.

Notions mathématiques mobilisées

- Fonctions sinusoïdales, période, fréquence.
- Fonctions périodiques, période, fréquence.
- Fonction logarithme décimal, échelle logarithmique.

Histoire, enjeux, débats

Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830), mathématicien et physicien français, est connu pour avoir déterminé, par le calcul, une solution au problème de la diffusion de la chaleur le long d'une barre métallique. Sa méthode de résolution repose sur la décomposition de la fonction inconnue en somme de fonctions particulières (sinusoïdes). On parle de décomposition en série trigonométrique (ou série de Fourier). Cette méthode très féconde est largement utilisée en dehors du champ qui a servi de cadre à sa découverte puisqu'elle est à la base de la théorie du signal avec des applications majeures pour le traitement et la compression des sons.

Au XXe siècle, les travaux de mathématiciennes et mathématiciens comme Dennis Gabor, Yves Meyer, Ingrid Daubechies ou Stéphane Mallat, ont permis d'étendre la théorie de Fourier à celle des ondelettes. Parmi les applications de cette théorie, on peut citer la compression d'images (format JPEG 2000) ou l'imagerie médicale (imagerie par résonance magnétique).

Les mathématiques et les sons purs et composés

Un son est provoqué par un mouvement vibratoire de l'air s'accompagnant de compressions et dépressions locales.

Pour visualiser une onde sonore, on peut par exemple représenter le déplacement de la membrane d'un microphone en fonction du temps. On modélise mathématiquement ce déplacement par une fonction dépendant du temps.

Son pur

Un son pur, comme le La3 d'un diapason, est modélisé par une fonction appelée sinusoïde.

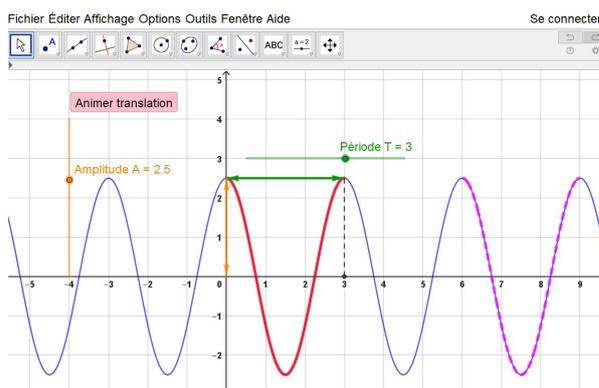
Il est caractérisé par son intensité et sa fréquence. L'intensité, qui traduit la puissance par unité de surface transportée par l'onde sonore, est reliée à l'amplitude de la sinusoïde.

La fréquence indique le nombre d'oscillations (compressions et dépressions) complètes subies par l'air en une seconde. Elle s'exprime en Hertz, noté Hz, et correspond à un nombre par seconde. La hauteur d'un son pur est la fréquence de l'onde sonore associée. Plus la fréquence est élevée, plus le son est aigu.

L'inverse de la fréquence, qui s'exprime en seconde, s'appelle la période de la sinusoïde. C'est l'intervalle de temps au bout duquel la sinusoïde se reproduit à l'identique.



Télécharger l'animation GeoGebra © intitulée « [Sinusoïdes](#) ». Cette animation permet de visualiser les variations l'amplitude et la période d'une sinusoïde.



Retrouvez éducol sur :



Son composé

Le son correspondant à une note jouée par un instrument de musique n'est pas un son pur, mais le signal sonore s qui lui est associé a la particularité d'être périodique. Cela signifie que la courbe représentative de la fonction s qui la modélise contient un motif qui se répète à l'identique. Mathématiquement, la répétition du motif s'exprime par l'existence d'un nombre T tel que, pour tout temps t , $s(t + T) = s(t)$. La période du signal est définie comme étant le plus petit nombre strictement positif T vérifiant cette propriété.

L'inverse $\frac{1}{T}$ de la période T est la fréquence de l'onde et se note f . Elle s'exprime en Hertz. En étudiant la propagation de la chaleur le long d'une tige métallique, Joseph Fourier démontra que toute fonction périodique s de fréquence f s'écrit comme une somme de fonctions trigonométriques dont les fréquences sont des multiples de f .

Au niveau des sons, cela se traduit de la manière suivante : un son composé (représenté par une fonction périodique) résulte de la combinaison de sons purs (associés à des sinusoides) dont les fréquences sont toutes multiples de l'une d'elles, appelée la fréquence fondamentale. La fréquence fondamentale f est perçue par l'oreille comme étant la fréquence du son. C'est pourquoi elle est encore appelée hauteur du son. L'ensemble des fréquences $f, 2f, 3f \dots$ et des amplitudes associées constitue le spectre du son.

La décomposition d'un son composé en somme de sons purs de fréquences multiples de la fréquence fondamentale permet d'expliquer pourquoi certains sons produits simultanément sont agréables à l'oreille ; on dit alors qu'ils sont consonants.

En fait, deux sons « sonnent » bien ensemble si leurs spectres ont beaucoup de fréquences en commun. Prenons l'exemple de deux sons dont le rapport des fréquences fondamentales est égal à 2. On dit que ces deux sons sont à l'octave l'un de l'autre, ou encore que l'intervalle musical qui les sépare est une octave.

C'est le cas du Do₃ de fréquence $f = 262$ Hz et du Do₄ de fréquence $2f = 524$ Hz.

Les fréquences du spectre de la note la plus grave sont $f, 2f, 3f, 4f, 5f, 6f \dots$

Les fréquences du spectre de la note la plus aigüe sont $2f, 4f, 6f, 8f \dots$ Elles font toutes parties du spectre de la note la plus grave. Même si elles n'ont pas la même hauteur, ces deux notes sonnent bien ensemble.

Deux sons dont le rapport des fréquences fondamentales est égal à $3/2$ sont à la quinte l'un de l'autre. Ils sont consonants car la moitié des fréquences du spectre $3f, 6f, 9f, 12f, 15f, 18f \dots$ du son de fréquence fondamentale $3f$ sont contenues dans le spectre $2f, 4f, 6f, 8f, 10f, 12f, 14f \dots$ du son de fréquence fondamentale $2f$. Les fréquences de ces deux spectres sont d'ailleurs toutes contenues dans celles du spectre du son de fréquence fondamentale f . Cette raison mathématique explique a posteriori pourquoi les Grecs de l'école pythagoricienne relient l'harmonie des sons à celle des nombres.

En revanche des sons de fréquences f et $1,9f$ ne sont pas consonants.



Télécharger l'animation GeoGebra © intitulée « [Écouter une fréquence et son double](#) ». Cette animation permet de visualiser différents signaux sonores et d'entendre les sons associés.

Retrouvez eduscol sur :



Niveau d'intensité sonore

La puissance par unité de surface transportée par une onde sonore est quantifiée par son intensité I , exprimée en Watt par m^2 ($\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$).

Le niveau d'intensité sonore, noté L et exprimé en décibels (dB), associé à l'intensité sonore I est défini par la relation :

$$L = 10 \cdot \text{Log} \left(\frac{I}{I_0} \right)$$

où $I_0 = 10^{-12} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ est l'intensité sonore minimale à laquelle l'oreille est sensible pour un son de fréquence 1000 Hz et Log désigne le logarithme décimal.

Le seuil de douleur auditive se situe à un niveau d'intensité sonore compris entre 120 et 130 dB. Les bruits deviennent nocifs à partir d'un niveau d'intensité sonore de 80 à 90 dB

Propositions d'activités

Activité 1



Télécharger l'animation GeoGebra © intitulée « [Écouter une fréquence et son double](#) ».

Utiliser l'animation pour :

- créer et représenter des sons purs et des sons composés, les écouter ;
- modifier un son pur en jouant sur sa fréquence, son intensité.

Activité 2

1. Calculer le niveau d'intensité sonore correspondant à une intensité sonore de $10^{-5} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$.
2. Quel est l'effet sur l'intensité sonore d'une augmentation du niveau sonore de 10 dB ?
3. Une scie produit une intensité sonore $I = 5 \times 10^{-4} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ à une distance de 10 m. Calculer le niveau L d'intensité sonore correspondant.
4. On estime à 70 dB le niveau d'intensité sonore produit par un violon situé à 5 m de l'auditeur. En admettant que les intensités sonores des différents instruments s'ajoutent, calculer le niveau sonore produit par un orchestre de 16 premiers violons et 14 seconds violons. On fait l'hypothèse que tous ces violons sont situés à 5 m de l'auditeur.
5. Le niveau d'intensité sonore d'un concert de rock est estimé à 100 dB. Calculer l'intensité sonore correspondante.
6. On estime que l'exposition à une intensité sonore $I = 1,0 \times 10^{-1} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ peut endommager l'oreille. Interpréter cette donnée dans le contexte d'un concert donné par un orchestre de 30 violons, puis dans celui d'un concert de rock.

Retrouvez éducol sur :



Intentions pédagogiques : aucune construction de la fonction logarithme décimal n'est attendue et on recourt à la calculatrice pour calculer ses valeurs ainsi que celles de sa fonction réciproque $x \mapsto 10^x$. Les propriétés de la fonction logarithme utiles pour traiter des problèmes liés à l'intensité sonore sont limitées à celles indiquées ci-dessous.

Propriétés de la fonction logarithme décimal

Soient a et b deux réels strictement positifs, alors :

$$\text{Log}(ab) = \text{Log}(a) + \text{Log}(b);$$

$$\text{Log}\left(\frac{a}{b}\right) = \text{Log}(a) - \text{Log}(b).$$

$\text{Log}(10^n) = n$, pour tout entier relatif n étendue à $\text{Log}(10^x) = x$ pour tout nombre réel x .

Cette dernière propriété justifie le choix d'une échelle logarithmique pour représenter des intensités sonores dont les ordres de grandeurs sont très différents.

Retrouvez éduscol sur :



LES MATHÉMATIQUES DE L'ENSEIGNEMENT SCIENTIFIQUE LA MUSIQUE OU L'ART DE FAIRE ENTENDRE LES NOMBRES

Mots-clés

Intervalle musical ; octave ; quinte ; gammes.

Références au programme

La musique et les mathématiques sont deux langages universels. Les Grecs anciens les ont dotés d'une origine commune puisque la théorie pythagoricienne des proportions avait pour but de percer les secrets de l'harmonie musicale. Depuis, les évolutions de la musique et des mathématiques se sont enrichies mutuellement.

Savoirs

Intervalle musical, octave, quinte, cycle des quintes, gammes de Pythagore, gamme tempérée.

Savoir-faire

- Mettre en place un raisonnement mathématique pour prouver que le cycle des quintes est infini.
- Utiliser la racine douzième de 2 pour partager l'octave en douze intervalles égaux.

Notions mathématiques mobilisées

- Fractions, quotients, puissances (notamment les puissances de 2).
- Nombres rationnels et irrationnels.
- Arithmétique.

Nombres rationnels et irrationnels

- Un nombre est rationnel s'il peut s'écrire comme quotient de deux nombres entiers. Par

exemple, 0,75 et $\sqrt[3]{\frac{27}{8}}$ sont des nombres rationnels puisqu'ils peuvent aussi s'écrire

respectivement $\frac{3}{4}$ et $\frac{3}{2}$.

- Un nombre irrationnel est un nombre qui ne peut pas s'écrire comme quotient de deux entiers. Par exemple, $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel (il est possible de démontrer ce résultat à l'aide d'un raisonnement par l'absurde).

Histoire, enjeux, débats

- La vision de l'Univers selon l'école de Pythagore.
- La gamme à tempérament mésotonique ; la gamme tempérée de Werckmeister et son utilisation par Bach.
- Les premières gammes à tempérament égal (Rameau et d'Alembert).

Les mathématiques et la musique

Pour reprendre une citation extraite d'un courrier adressé par Leibnitz à Goldbach en 1712, « La musique est un exercice d'arithmétique secrète et celui qui s'y livre ignore qu'il manie des nombres ».

L'étude des intervalles musicaux et des gammes permet en effet de manipuler les nombres (rationnels pour les gammes dites de Pythagore, irrationnels pour les gammes au tempérament égal) et d'entendre les sons associés. Les premières gammes musicales auraient été créées par l'école pythagoricienne au VI^e siècle avant J.-C.

Le système musical des Grecs anciens était construit à partir de la position des doigts sur un instrument très simple appelé monocorde. En faisant varier la longueur d'une corde, à l'aide de chevalets, les Pythagoriciens ont constaté que plus la longueur de la corde est courte, plus le son émis est aigu. En plaçant un chevalet exactement au milieu de la corde, ils ont constaté que les deux moitiés produisaient exactement le même son, ressemblant d'ailleurs beaucoup à celui produit par la vibration de la corde entière. On sait aujourd'hui qu'un son est une variation de la pression de l'air au cours du temps. Dans le cas d'un son pur, cette variation de la pression est représentée par une courbe particulière, appelée sinusoïde. Un son composé résulte de la combinaison d'un son simple principal, appelé le fondamental et de sons complémentaires, appelés harmoniques. Le son fondamental fixe la fréquence perçue par l'oreille, appelée hauteur du son, ou fréquence fondamentale. Les fréquences des harmoniques sont toutes des multiples de la fréquence fondamentale. Mathématiquement, un son composé est représenté par une fonction périodique. Nous savons aujourd'hui, grâce à la théorie de Joseph Fourier (1768-1830), qu'une telle fonction peut être décomposée en une somme infinie de fonctions trigonométriques (représentant des sons purs) dont les fréquences sont multiples de l'une d'elle (la fréquence fondamentale). De ce fait, si f est la fréquence fondamentale d'un son composé, les fréquences $2f$ et $3f$ sont également contenues dans le spectre du son ; ce sont les fréquences des harmoniques de rang 2 et de rang 3. C'est la raison pour laquelle la combinaison de deux sons dont les fréquences sont dans un rapport $2/1$ ou $3/2$ est agréable à l'oreille. Ces sons sont dits consonants. Ces aspects sont détaillés dans la ressource « Les sons purs et composés ».

Ces considérations n'étaient pas connues des Grecs anciens. Le fait que deux sons dont les fréquences fondamentales sont dans le rapport 2 ont la même consonance était pour eux une preuve que l'harmonie de l'univers est régie par les nombres. Selon la théorie pythagoricienne, les accords musicaux les plus harmonieux s'expriment par les rapports arithmétiques les plus simples. Les Pythagoriciens furent les premiers à établir les quatre consonances fondamentales de la gamme musicale. Ces consonances, qui correspondent à des rapports de fréquence, sont l'unisson (de rapport $1/1$), l'octave (de rapport $2/1$), la quinte (de rapport $3/2$) et la quarte (de rapport $4/3$), dont elle est le « renversement » de la quinte.

Retrouvez éduscol sur :



Principe de construction des gammes de Pythagore

Une octave est un intervalle musical dans lequel le rapport des fréquences entre l'extrémité et l'origine est égal à 2. Comme toute la théorie est fondée sur des rapports de fréquences, on décide ici de simplifier les calculs en fixant à 1 la fréquence f_0 de l'origine de l'octave, qui correspond à une note de référence (440 Hz pour le La du diapason ou 262 Hz pour le Do 3). On verra ultérieurement qu'on peut aussi démarrer le cycle des quintes avec une autre valeur.

On retrouvera ensuite les fréquences réelles en multipliant les valeurs calculées par la fréquence de la note de référence. L'octave est donc représentée par l'intervalle musical $[1,2]$.

On veillera à bien distinguer cet intervalle musical, dans lequel l'écart entre deux notes est défini par le rapport des fréquences entre la note la plus aigüe et la note la plus grave, d'un intervalle mathématique habituel, dans lequel l'écart entre deux nombres est défini par la valeur absolue de leur différence.

Une gamme est une suite finie de notes « régulièrement » réparties (au sens du rapport de leurs fréquences) sur une octave.

Après le rapport $\frac{2}{1}$ qui définit l'octave, le rapport le plus simple est la quinte pure, égale à $\frac{3}{2}$. C'est la fréquence du son obtenu en faisant vibrer le tétracorde aux $\frac{2}{3}$ de sa longueur. L'échelle pythagoricienne est fondée sur ces deux seuls intervalles, l'octave et la quinte pure, à partir desquels sont construites toutes les notes de la gamme, selon le cycle des quintes.

Après avoir calculé la quinte correspondant au rapport $3/2$, on calcule la quinte de la quinte $\frac{3}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{9}{4}$.

Comme $\frac{9}{4} > 2$, la quinte de la quinte est sortie de l'octave. On l'y ramène en divisant $\frac{9}{4}$ par 2, ce qui donne $\frac{9}{8}$.

On poursuit le procédé en calculant la quinte de la quinte de la quinte, que l'on ramène si nécessaire dans l'octave (c'est-à-dire entre 1 et 2) en divisant par 2. Cette division par 2 correspond à l'identification de sons correspondant à une même note, l'un étant une octave plus grave que l'autre. On construit ainsi une suite de rapports de plus en plus complexes.



Télécharger l'animation Geogebra © intitulée « [Construction de la gamme Pythagoricienne](#) ». Cette animation permet de construire pas à pas la gamme en faisant entendre, à chaque étape, les quintes obtenues.

On constate qu'aucun de ces rapports ne vaut 1 ou 2 (on dit que le cycle des quintes ne « reboucle pas »). Un raisonnement mathématique très simple (par l'absurde) permet de démontrer que la suite des quintes ramenées à l'octave est infinie.

En effet, si la suite des quintes ramenées à l'octave repassait par une valeur déjà atteinte, alors il existerait un couple d'entiers (k, n) tel que $\frac{3^k}{2^n} = 1$ c'est-à-dire $3^k = 2^n$. Or 3^k est impair alors que 2^n est pair. L'égalité est donc impossible.

Puisqu'aucune quinte de la suite ne revient sur 1 ou 2 alors qu'on souhaite construire un nombre fini de quintes dans l'intervalle $[1,2]$, on est amené à chercher une valeur de k pour laquelle la k -ième quinte « se rapproche » de 1 ou de 2 (donc de la note située sur la note

Retrouvez éduscol sur :



initiale ou à l'octave de la note initiale). On voit dans le tableau ci-dessous que la cinquième quinte correspond à une fréquence proche de 2 puisqu'elle est égale à 1,898 4. On décide de l'identifier à la note initiale. On réordonne ensuite les quintes par ordre croissant et on donne un nom aux notes associées. On a ainsi construit la gamme pentatonique (gamme à 5 notes) de Pythagore.

Les notes de la dernière ligne du tableau correspondent au cas où la note de référence est un do (par exemple $f_0 = 264$ Hz).

k	0	1	2	3	4	5
Quinte	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{3^2}{2^2} = \frac{9}{4}$	$\frac{3^3}{2^4} = \frac{27}{16}$	$\frac{3^4}{2^5} = \frac{81}{32}$	$\frac{3^5}{2^7} = \frac{243}{128}$
Quinte ramenées à l'octave	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{3^2}{2^3} = \frac{9}{8}$	$\frac{3^3}{2^4} = \frac{27}{16}$	$\frac{3^4}{2^6} = \frac{81}{64}$	$\frac{3^5}{2^7} = \frac{243}{128}$
Valeur décimale approchée	1	1,5	0,178 0	1,687 5	1,265 7	1,8984 \approx 2
Quintes ordonnées	1	$\frac{9}{8}$	$\frac{81}{64}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{27}{16}$	2
Exemple de gamme si la première note est un Do	Do	Ré	Mi	Sol	La	Do
Rapport de fréquences entre 2 notes consécutives		$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{32}{27}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{32}{27}$

On peut poursuivre la suite des quintes et constater que la huitième quinte ramenée à l'octave est presque égale à 1. On construit ainsi une gamme de Pythagore à sept notes.

Quintes dans l'ordre d'apparition	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{3^2}{2^2} = \frac{9}{4}$	$\frac{3^3}{2^4} = \frac{27}{16}$	$\frac{3^4}{2^5} = \frac{81}{32}$	$\frac{3^5}{2^7} = \frac{243}{128}$	$\frac{3^6}{2^8} = \frac{729}{256}$	$\frac{3^7}{2^{10}} = \frac{2187}{1024}$
Quintes ramenées à l'octave	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{3^2}{2^3} = \frac{9}{8}$	$\frac{3^3}{2^4} = \frac{27}{16}$	$\frac{3^4}{2^6} = \frac{81}{64}$	$\frac{3^5}{2^7} = \frac{243}{128}$	$\frac{3^6}{2^9} = \frac{729}{512}$	$\frac{3^7}{2^{11}} = \frac{2187}{2048}$
Valeurs décimales approchées	1	1,5	1 125	1,687 5	1,265 6	1,898 4	1,423 8	1,067 9
Quintes ordonnées	1	$\frac{9}{8}$	$\frac{81}{64}$	$\frac{729}{512}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{243}{128}$	
Exemple de gamme si la première note est un Do	Do	Ré	Mi	Fa#	Sol	La	Si	

Retrouvez éducol sur :



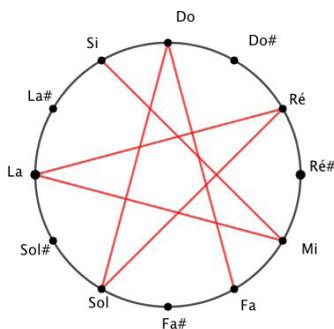
Rapport de fréquences entre 2 notes consécutives	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{256}{243}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	
--	---------------	---------------	-------------------	---------------	---------------	---------------	--

Pour construire la gamme habituelle à sept notes (dite gamme diatonique) et entendre comme quatrième note un Fa et non un Fa#, il suffit de prendre comme fréquence de départ non pas 1, mais $\frac{4}{3}$ (la quarte). On remarque ici que $\frac{4}{3} \times \frac{3}{2} = 2$. La quinte de la quarte est égale à l'octave (que l'on peut assimiler à la note initiale, de fréquence 1). C'est en ce sens que la quarte est le « renversement » (au sens de l'inverse) de la quinte.

Le cycle ne reboucle toujours pas exactement, mais presque, au bout de la huitième quinte.

Quintes dans l'ordre d'apparition	$\frac{4}{3}$	2	$\frac{3}{2}$	$\frac{3^2}{2^2} = \frac{9}{4}$	$\frac{3^3}{2^4} = \frac{27}{16}$	$\frac{3^4}{2^5} = \frac{81}{32}$	$\frac{3^5}{2^7} = \frac{243}{128}$	$\frac{3^6}{2^8} = \frac{729}{256}$
Quintes ramenées à l'octave	$\frac{4}{3}$	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{3^2}{2^3} = \frac{9}{8}$	$\frac{3^3}{2^4} = \frac{27}{16}$	$\frac{3^4}{2^6} = \frac{81}{64}$	$\frac{3^5}{2^7} = \frac{243}{128}$	$\frac{3^6}{2^9} = \frac{729}{512}$
Valeurs décimales approchées	1,333 3	1	1,5	1 125	1,687 5	1,265 6	1,898 4	1,4238 \approx 1,33 \approx 1,33
Quintes ordonnées	1	$\frac{9}{8}$	$\frac{81}{64}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{243}{128}$	
Exemple de gamme	Do	Ré	Mi	Fa	Sol	La	Si	
Rapport de fréquences entre notes consécutives		$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{256}{243}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{256}{243}$

La « ronde » des quintes dans leur ordre d'apparition



Selon le même principe, on peut poursuivre encore le cycle des quintes jusqu'à la treizième quinte (qui est presque égale à la quarte de départ).

On a ainsi construit la gamme de Pythagore à douze notes.

Retrouvez eduscol sur :

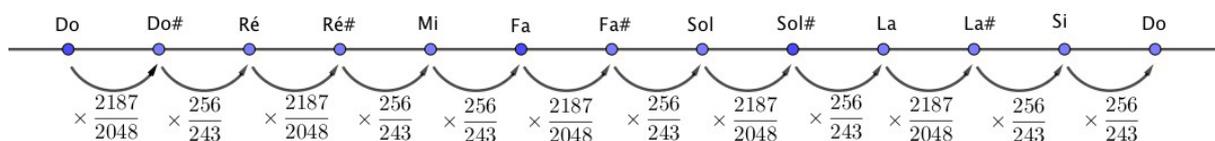


n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Quintes dans l'ordre d'apparition	$4 \frac{4}{3}$	1	$3 \frac{3}{2}$	$\frac{3^2}{2^2} = \frac{9}{4}$	$\frac{3^3}{2^4} = \frac{27}{16}$	$\frac{3^4}{2^5} = \frac{81}{32}$	$\frac{3^5}{2^7} = \frac{243}{128}$	$\frac{3^6}{2^8} = \frac{729}{256}$	$\frac{3^7}{2^{10}} = \frac{2187}{1024}$	$\frac{3^8}{2^{12}} = \frac{6561}{4096}$	$\frac{3^9}{2^{13}} = \frac{19683}{8192}$	$\frac{3^{10}}{2^{14}} = \frac{59059}{16384}$	$\frac{3^{11}}{2^{16}} = \frac{177147}{65536}$
Quintes ramenées à l'octave	$4 \frac{4}{3}$	1	$3 \frac{3}{2}$	$\frac{3^2}{2^3} = \frac{9}{8}$	$\frac{3^3}{2^4} = \frac{27}{16}$	$\frac{3^4}{2^6} = \frac{81}{64}$	$\frac{243}{128}$	$\frac{3^6}{2^9} = \frac{729}{512}$	$\frac{3^7}{2^{11}} = \frac{2187}{2048}$	$\frac{3^8}{2^{12}} = \frac{6561}{4096}$	$\frac{3^9}{2^{13}} = \frac{19683}{16384}$	$\frac{3^{10}}{2^{15}} = \frac{59059}{32768}$	$\frac{3^{11}}{2^{17}} = \frac{177147}{131072}$
Valeurs décimales approchées	1,3	1	1,5	1,125	1,6875	1,2656	1,8984	1,4238	1,0678	1,6018	1,2013	1,8020	1,3515
Quintes ordonnées	1	$\frac{2187}{2048}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{19683}{16384}$	$\frac{81}{64}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{729}{512}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{6561}{4096}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{59059}{32768}$	$\frac{243}{128}$	2
Norm des notes	Do	Do#	Ré	Ré#	Mi	Fa	Fa#	Sol	Sol#	La	La#	Si	Do
Rapport entre deux notes consécutives		$\frac{2187}{2048}$	$\frac{256}{243} = \frac{256}{243}$ $\approx 1,05344$	$\frac{2187}{2048}$	$\frac{256}{243}$	$\frac{256}{243}$	$\frac{2187}{2048}$	$\frac{256}{243}$	$\frac{2187}{2048}$	$\frac{256}{243}$	$\frac{2187}{2048}$	$\frac{256}{243}$	$\frac{256}{243}$

Retrouvez éduscol sur :



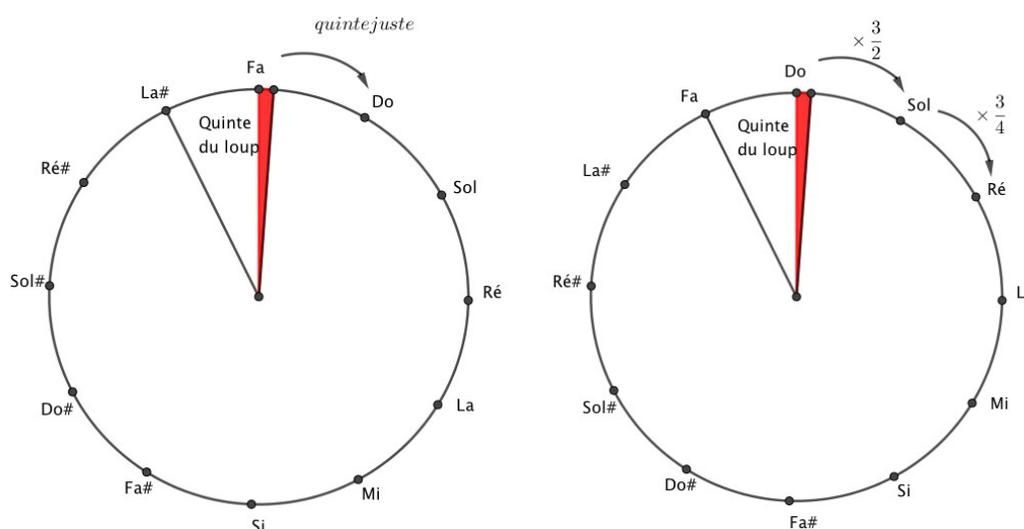
La gamme de Pythagore à 12 notes



Les problèmes posés par les gammes de Pythagore

La quinte du loup

Dans une gamme de Pythagore à 5, 7 ou 12 notes, l'une des quintes n'est pas pure (sa valeur a été choisie pour arrêter le cycle alors qu'on ne rebouclait pas exactement sur 1). Cette quinte, appelée la quinte du loup parce qu'elle rappelle le hurlement du loup, n'est pas consonante avec les autres (elle sonne faux). L'écart entre la quinte du loup et les autres quintes est appelé comma pythagoricien (représenté en rouge ci-dessous). Pour contourner cette difficulté, les compositeurs choisissaient de positionner la quinte du loup dans le cycle sur un intervalle peu utilisé dans leur composition musicale, généralement entre Si et Fa#.



La transposition

Chacune des dernières lignes des tableaux précédents fait apparaître que les intervalles correspondant aux notes successives de la gamme ne sont pas tous égaux. On dit que les gammes de Pythagore sont à tempéraments inégaux. Ainsi, la gamme à sept notes fait apparaître des intervalles de rapport $\frac{9}{8}$ (qui définit le ton pythagoricien) et des intervalles de rapport $\frac{256}{243}$, appelé limma pythagoricien (très légèrement inférieur à un demi-ton puisque $(\frac{256}{243})^2 < \frac{9}{8}$).

L'existence de ces deux types d'intervalles pose problème pour la transposition d'un morceau de musique, qui consiste à décaler d'un intervalle fixe toutes les notes de ce morceau afin de l'adapter à la tonalité des instruments ou de la voix. Par exemple, un claveciniste accompagnant une mezzo-soprano pourrait vouloir baisser d'un limma chaque note d'un morceau écrit pour une soprano.

Retrouvez éducol sur :



Dans le cas de la gamme pythagoricienne à 12 notes, les notes obtenues ne vont alors pas toutes retomber exactement sur des notes de la gamme. Le Fa va bien se retrouver sur le Mi et le Do sur le Si, mais les autres arriveront à côté des notes existantes.

Ceci est dû à la coexistence de deux types d'intervalles : un intervalle de rapport $\frac{2187}{2048}$ appelé demi-ton chromatique et un intervalle de rapport $\frac{256}{243}$ appelé demi-ton diatonique.

La gamme tempérée

Le modèle des gammes à tempérament égal permet de régler le problème de la transposition. En effet, pour pouvoir transposer dans toutes les tonalités, il suffit que l'intervalle entre deux notes consécutives d'une octave soit toujours le même. Mathématiquement, dans le cas d'une gamme à douze notes, on cherche donc un nombre t qui permet de partager l'octave en douze intervalles égaux. On passe dans ce cas de la fréquence de référence 1 à la fréquence 2 par douze multiplications successives par un certain nombre k . Ainsi, $k^{12} = 2$ et $k = 2^{1/12}$ encore noté $\sqrt[12]{2}$ (racine douzième de 2). Par une démonstration similaire à celle de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ étudiée par les élèves en classe de seconde, on peut démontrer que le nombre $\sqrt[12]{2}$ est irrationnel. C'est la valeur du demi-ton tempéré. La gamme tempérée a été inventée à la fin du XVII^e siècle par A. Werckmeister. Dans ses *Éléments de musique* (1752), d'Alembert insiste sur les douze demi-tons égaux de la gamme tempérée à douze notes. La construction de ces douze demi-tons égaux nécessitait d'admettre que des sons harmonieux pouvaient provenir de rapports de fréquences irrationnels. C'est le prix à payer pour permettre toutes les transpositions sans altération de la musique. Il fallut attendre 1825 pour que la gamme tempérée s'impose dans la musique occidentale où elle est toujours utilisée de nos jours.



Télécharger l'animation GeoGebra © intitulée « [Fréquences et notes de la gamme tempérée](#) ». Cette animation permet de construire une gamme à tempérament égal et d'écouter les notes associées.

Activités possibles

Activité 1 : octaves

1. Sachant que la fréquence du Do 0, arrondie au Hz, est de 33 Hz, calculer la fréquence du Do 1 situé une octave au-dessus du Do 0.
2. L'oreille humaine est capable de percevoir des sons dont la fréquence est comprise entre 20 Hz et 20 000 Hz. Déterminer le nombre de Do différents audibles par l'oreille humaine.
3. La note la plus basse d'un piano a une fréquence de 27,5 Hz et la note la plus haute a une fréquence d'environ 4 186 Hz. Combien y a-t-il d'octaves dans un piano ?

Retrouvez éduscol sur :



Activité 2 : construction pas-à-pas de la suite des quintes ramenées à l'octave

1. L'algorithme suivant permet de construire la suite des quintes à partir de $f = 1$.

```

f ← 1
Pour k allant de 1 à n faire
    f ←  $\frac{3}{2}$  f
    Si f ≥ 2 alors
        f ←  $\frac{1}{2}$  f
    FinSi
FinPour

```

- 1.1. Démontrer que, si $1 \leq f < 2$, alors :

ou bien $1 \leq \frac{3}{2}f < 2$ (la fréquence se situe dans l'octave) ;

ou bien $2 \leq \frac{3}{2}f$ et $1 \leq \frac{1}{2} \times \frac{3}{2}f < 2$ (on ramène la fréquence dans l'octave par division par 2).

- 1.2. Calculer à la main les valeurs obtenues pour les 6 premières fréquences. Les exprimer sous forme de quotients d'une puissance de 3 par une puissance de 2.



- 1.3. Coder cet algorithme en Python pour qu'il renvoie la liste des 13 premières fréquences obtenues.

- 1.4. Parmi les fréquences obtenues, y en a-t-il une égale à 1 ? Si non, lesquelles s'en approchent le plus ?

2. Démontrer que l'équation $\frac{3^n}{2^m} = 1$, d'inconnue le couple d'entiers (n, m) , n'a pas de solution.
3. En déduire que le cycle des quintes ne reboucle pas.

Activité 3 : construction au tableur de la suite des quintes à partir de la suite des puissances de 3/2

1. À l'aide d'un tableur, construire les 20 premiers éléments des suites de termes généraux $2^k, 3^k, (\frac{3}{2})^k$. À partir des valeurs décimales approchées de $(\frac{3}{2})^k$, trouver la valeur de l'entier n tel qu'en divisant $(\frac{3}{2})^k$ par 2^n on se ramène dans l'octave.

Retrouvez éduscol sur :



k	Puissances de 3	Puissances de 2	Quotient	2^n	Quinte ramenée dans l'octave
0	1	1	1,00		
1	3	2	1,50		
2	9	4	2,25	2	1,125
3	27	8	3,38	2	1,6875
4	81	16	5,06	4	1,265625
5	243	32	7,59	4	1,8984375
6	729	64	11,39	8	1,423828125
7	2187	128	17,09	16	1,067871094
8	6561	256	25,63	16	1,601806641
9	19683	512	38,44	32	1,20135498
10	59049	1024	57,67	32	1,802032471
11	177147	2048	86,50	64	1,351524353
12	531441	4096	129,75	128	1,013643265
13	1594323	8192	194,62	128	1,520464897
14	4782969	16384	291,93	256	1,140348673
15	14348907	32768	437,89	256	1,710523009
16	43046721	65536	656,84	512	1,282892257
17	129140163	131072	985,26	512	1,924338385
18	387420489	262144	1477,89	1024	1,443253789
19	1162261467	524288	2216,84	2048	1,082440342
20	3486784401	1048576	3325,26	2048	1,623660513
21	10460353203	2097152	4987,89	4096	1,217745385

2. Démontrer que l'équation $\left(\frac{3}{2}\right)^k = 2^n$ d'inconnue le couple d'entiers (k, n) n'a pas de solution.

Activité 4 : la gamme tempérée

On appelle demi-ton tempéré la solution positive de l'équation $x^{12} = 2$.

- Par tâtonnement et à l'aide d'une calculatrice, trouver un encadrement à 10^{-2} près du demi-ton tempéré.
- Par une méthode de balayage et à l'aide d'un tableur, calculer une valeur décimale approchée à 10^{-3} près du demi-ton tempéré.
- Écrire un algorithme permettant de trouver une valeur approchée à 10^{-k} près du demi-ton tempéré, par dichotomie ou par balayage. Programmer cet algorithme en Python.
- Expliquer pourquoi le ton tempéré est le carré du demi-ton tempéré. Calculer une valeur décimale approchée à 10^{-2} près du ton tempéré.
- Sachant que la quinte tempérée est égale à sept demi-tons tempérés, la calculer et la comparer à la quinte pure.



Intentions pédagogiques

Les calculs figurant dans les tableaux ci-dessus sont présentés pour expliquer le principe de construction des gammes dites de Pythagore. L'objectif pédagogique n'est pas de faire faire aux élèves l'intégralité de ces calculs. Cependant, il est essentiel qu'à travers la construction des gammes de Pythagore, ils manipulent des fractions, des puissances et les opérations qui s'y rapportent afin de consolider leurs connaissances et leur pratique des nombres rationnels, la maîtrise de ce type de calculs faisant partie du bagage mathématique de base de tout citoyen.

Les animations GeoGebra ©, présentées en classe par le professeur, permettent à la fois d'automatiser le calcul des quintes successives, de consigner dans le tableur les fréquences associées et d'entendre les sons.

Retrouvez éducol sur :



Les programmes en Python, complétés par les élèves à partir de lignes de commande fournies, permettent de travailler des algorithmes simples et d'écouter des sons.

L'introduction de la racine douzième de 2 peut être précédée par la recherche d'une valeur approchée de la solution positive de l'équation $x^{12} = 2$ à l'aide d'une méthode de balayage ou de dichotomie.

Pour aller plus loin : la musique contemporaine

Des compositeurs comme Iannis Xénakis et Pierre Boulez utilisent dans leurs écritures musicales des sons déterminés aléatoirement sur ordinateur et composent à l'aide d'algorithmes : on parle de musique stochastique.

Les techniques numériques d'échantillonnage consistent à remplacer une onde sonore, définie par la mesure continue $p(t)$ de la pression de l'air en fonction du temps, par une suite discrète d'échantillons $p_n(t)$, réalisant ainsi une synthèse de sons, y compris de ceux que ne peuvent produire des instruments de musique ordinaires. La ressource « numérisation du son » détaille ces aspects.

Bibliographie et sitographie

- Maths et musique Hors-série n° 11 Tangente.
- Pourquoi les maths ? Ellipses : chapitre 4 « la portée des mathématiques »
- Conférence du collège de France : [D'où nous viennent nos idées et comment évoluent-elles ? La créativité en mathématiques et en musique.](#)
- Document de travail ([ressources d'accompagnement du programme de la série TMD](#)).

Retrouvez éduscol sur :



LES MATHÉMATIQUES DE L'ENSEIGNEMENT SCIENTIFIQUE LA NUMÉRISATION ET LE CODAGE D'UN SON

Mots-clés

Échantillonnage ; quantification ; codage ; compression.

Références au programme

Le son, vibration de l'air, peut être enregistré sur un support informatique. Les techniques numériques ont mis en évidence un nouveau type de relations entre les sciences et les sons, le processus de numérisation dérivant lui-même de théories mathématiques et informatiques.

Savoir

Pour numériser un son, on procède à la discrétisation du signal analogique sonore (échantillonnage et quantification).

Plus la fréquence d'échantillonnage est élevée et la quantification est fine, plus la numérisation est fidèle, mais plus la taille du fichier audio est grande.

La reproduction fidèle du signal analogique nécessite une fréquence d'échantillonnage au moins double de celle du son.

La compression consiste à diminuer la taille d'un fichier afin de faciliter son stockage et sa transmission.

Les techniques de compression spécifiques au son, dites « avec perte d'information », éliminent les informations sonores auxquelles l'oreille est peu sensible. Il existe aussi des techniques de compression sans perte d'information.

Savoir-faire

- Justifier le choix des paramètres de numérisation d'un son.
- Estimer la taille d'un fichier audio.
- Calculer un taux de compression.
- Comparer des caractéristiques et des qualités de fichiers audio compressés.

Notions mathématiques mobilisées

- Discrétisation d'une fonction.
- Nombres en écriture binaire.
- Unités de temps, unités de quantité de données, débit.
- Taux (de compression).
- Lecture de courbes.

Histoire, enjeux, débats

Claude Shannon (1916-2001), ingénieur en génie électrique et mathématicien, est considéré comme l'un des pères de la théorie de l'information dont l'une des problématiques consiste à représenter, compresser, stocker, communiquer des informations.

Vues du côté de l'utilisateur, ces informations peuvent prendre la forme de textes, d'images, de sons, de vidéos. On peut donc s'interroger sur la manière dont un ordinateur, dont la mémoire est constituée d'un très grand nombre de circuits électroniques, peut traiter des informations aussi sophistiquées. La numérisation des sons permet d'appréhender cette problématique.

Dans un sens plus général, une théorie de l'information est une théorie visant à quantifier et qualifier la notion de « contenu en information » présent dans un ensemble de données. À ce titre, il existe une autre théorie de l'information : la théorie algorithmique de l'information, créée par Kolmogorov, Solomonov et Chaitin au début des années 1960.

Au plan sociétal, la compression de données et la transmission en flux (streaming) ont fait évoluer les pratiques culturelles d'écoute de la musique.

Les mathématiques et la numérisation et le codage d'un son

La mémoire d'un ordinateur est constituée d'un très grand nombre de circuits électroniques dont chacun peut se retrouver dans l'un ou l'autre de deux états, qu'on désigne conventionnellement 0 et 1. Un bit d'information (Binary digiT) est donc l'un ou l'autre de ces deux chiffres. L'état d'un circuit composé de plusieurs circuits mémoires à un bit se décrit par une suite finie de 0 et de 1.

Par exemple, un octet est un mot formé de huit bits. On voit alors pourquoi il est nécessaire de coder les nombres, non pas en base dix comme on le fait habituellement (à l'origine parce qu'on a dix doigts), mais en base deux. Selon le principe de la numération de position en base 10, l'écriture 235 traduit que :

$$235 = 2 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 5 \times 10^0$$

Selon le même principe :

$$235 = 128 + 64 + 32 + 8 + 2 + 1$$

$$235 = 1 \times 2^7 + 1 \times 2^6 + 1 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1$$

L'écriture en base deux d'un nombre est appelée écriture binaire. L'écriture binaire de 235 est :

$$11\ 101\ 011.$$

Codage au son

Un son est une vibration mécanique se propageant dans l'air ou dans un autre milieu (fluide, solide...). À l'aide d'un micro, un son peut être capté et converti en un signal analogique modélisé mathématiquement par une fonction représentant par exemple une tension en fonction du temps.

Retrouvez éduscol sur :



On conjecture que le premier échantillon permettra une reconstitution du son analogique initial plus fidèle que le second.

En introduction de l'énoncé du théorème de Nyquist-Shannon, on peut, sur des exemples, faire varier la fréquence du son analogique et celle de de l'échantillonnage. Ce théorème, dont la démonstration est inaccessible à ce niveau mais dont le résultat est à connaître, stipule que la reproduction fidèle d'un signal analogique à partir d'un échantillon nécessite d'avoir échantillonné avec une fréquence au moins double de la fréquence initiale.

Ce théorème, démontré par Shannon en 1949, utilise des outils mathématiques en lien avec la théorie de Fourier (1768 – 1830). Il est à la base de la numérisation de l'information.

Écriture binaire d'un nombre entier

0 et 1 sont les seuls nombres que l'on peut coder sur un seul bit. Sur deux bits, il y a quatre nombres codés : 00, 01, 10 et 11.

Plus généralement, si p est un entier naturel non nul, on peut coder 2^p nombres entiers sur p bits.

Nombre p de bits	1	2	3	4	8	10	16	24
Nombre de nombres codables sur p bits	2	4	8	16	256	1 024	65 536	16 777 216

On voit ainsi qu'un octet, constitué de 8 bits, permet de représenter 256 nombres distincts.

L'octet est l'unité qui, en informatique, permet de mesurer la quantité de données.

Des multiples de l'octet, utilisant les préfixes décimaux du Système International, sont régulièrement employés.

Nom	Kilooctet	Mégaoctet	Gigaoctet	Téraoctet	Pétaoctet
Valeur en octets	10^3	10^6	10^9	10^{12}	10^{15}
Notation	ko	Mo	Go	To	Po

Les ordres de grandeurs s'expriment suivant les puissances de dix en raison de l'écriture décimale ; en informatique, le codage en base deux induit l'utilisation de puissances de deux. On emploie alors des préfixes proches de ceux en bases dix en remarquant que $2^{10} = 1024 \approx 10^3$.

Nom	Kibioctet	Mébioctet	Gibioctet	Tébioctet	Pébioctet
Valeur en octets	2^{10}	2^{20}	2^{30}	2^{40}	2^{50}
Notation	Kio	Mio	Gio	Tio	Pio

Retrouvez éduscol sur :



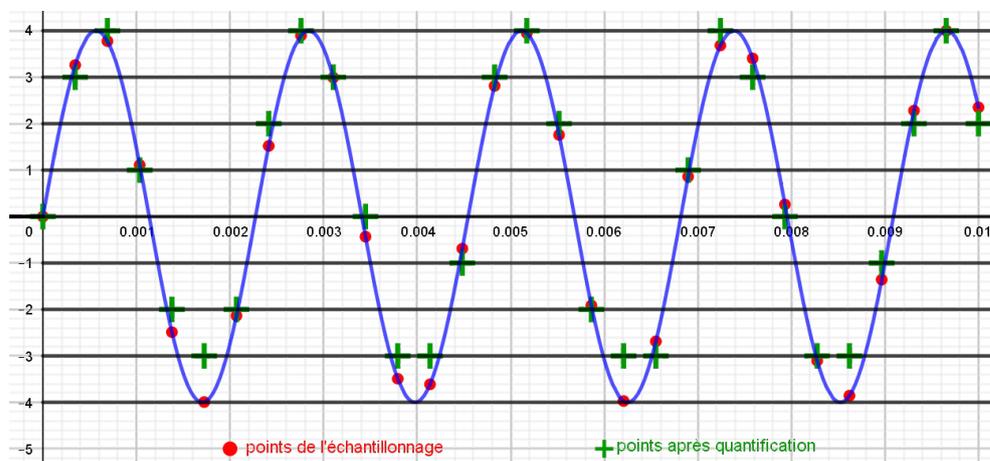
Quantification

Les valeurs des tensions, en nombre fini, obtenues après échantillonnage sont des nombres réels. Il faut les coder en mots uniquement formés de 0 et de 1 sur le nombre de bits utilisés pour le codage.

La quantification consiste alors à approcher au mieux les valeurs des tensions échantillonnées par des nombres, dont la taille de l'écriture binaire est fixée par le nombre de bits retenu.

Si on choisit une quantification sur p bits, alors on peut coder 2^p nombres différents.

Ainsi, si on choisit de coder sur trois bits, il y a seulement huit valeurs possibles. L'amplitude des tensions doit alors être découpée en huit intervalles de même longueur. Toutes les valeurs issues de l'échantillonnage situées dans un même intervalle sont quantifiées par le même nombre écrit en binaire sur trois bits.



Sur l'exemple ci-dessus, il faut représenter sur trois bits les nombres -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 et 4. Le tableau ci-dessous donne une façon de le faire à l'aide d'une représentation dite « complément à 2 » :

Nombres entiers	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
Codages binaires	101	110	111	000	001	010	011	100

Dans cette représentation, un nombre x négatif est représenté par le codage du nombre positif $2^3 - |x|$. Cette précision sur la représentation des nombres pourra être réservée aux élèves suivant la spécialité NSI.

Valeurs usuelles

- Les fréquences audibles par l'oreille humaine sont comprises entre 20 Hz et 20 000 Hz. Le théorème d'échantillonnage de Nyquist-Shannon amène à choisir une fréquence d'échantillonnage supérieure au double de la fréquence maximum audible, soit 40 000 Hz.
- La voix humaine oscille entre des fréquences allant de 100 Hz à 3 400 Hz. La fréquence d'échantillonnage pour numériser la voix doit donc être supérieure à 6 800 Hz. Pour transmettre une voix sur une ligne téléphonique, celle-ci est échantillonnée avec une fréquence de 8 000 Hz et est codée sur 8 bits. Diffuser un son sur une ligne téléphonique nécessite donc de transmettre $8 \times 8000 = 64\,000$ bits par seconde.

Retrouvez éducol sur :



- Sur les disques audionumériques (CD) la musique est enregistrée en stéréo. Elle est codée sur 16 bits avec une fréquence d'échantillonnage de 44,1 kHz. Ainsi, l'enregistrement d'une seconde de musique nécessite un espace de stockage de $2 \times 16 \times 44\,100 = 1\,411\,200$ bits (2 car c'est un enregistrement stéréo, 16 est le nombre de valeurs possibles pour la quantification, enfin l'échantillonnage à la fréquence de 44 100 Hz fournit 44 100 échantillons par seconde).

Notons que $1\,411\,200 \text{ bits} = \frac{1\,411\,200}{8} \text{ octets} = 176,4 \times 10^3 \text{ octets} = 176,4 \text{ ko}$. Une seconde de musique nécessite un espace de stockage de 176,4 ko.

- Le débit binaire mesure la quantité de données numériques transmises par unité de temps. L'unité utilisée est le bit par seconde (bit/s) et ses multiples kbit/s, Mbit/s ou Gbit/s. Quelques débits binaires peuvent faire référence :
 - un code Morse : 40 bit/s ;
 - un câble avec prise USB.2 : 480 Mbit/s ;
 - une connexion Bluetooth : 3 Mbit/s ;
 - une connexion ADSL à Internet : 13 Mbit/s.

Compression

Pour réduire les difficultés liées au stockage et à la transmission de fichiers audio, on effectue des compressions des données. Il existe des techniques de compression sans perte et d'autres avec perte.

Une compression est dite sans perte d'information si elle permet de récupérer, après décompression, l'intégralité des sons produits. Elle est réalisée par des algorithmes exploitant les redondances et la prévision de ces redondances dans les fichiers audio. Ainsi, le format FLAC permet de réduire de 30 % à 70 % la taille d'un fichier audio sans perte d'information.

Dans le cas contraire, la compression est dite avec perte. La compression avec perte supprime les sons peu audibles. La compression est effectuée par des algorithmes. Un format très connu de compression de ce type est le MP3.

Les services de musique en ligne proposent en streaming ou en téléchargement des fichiers MP3 à 128 kbit/s. Cela signifie que, pour un tel fichier, une seconde de musique nécessite 128 kbit de données.

Comme pour un CD audio, une seconde de musique nécessite 1411 kbit de données. On en déduit que le taux de compression d'un CD audio vers un fichier MP3 à 128 kbit/s est égal à $\frac{128}{1411} \approx 0,091$.

Le taux de compression est d'environ 9 % ou encore dans le ratio de 1:11 puisque $0,09 \approx \frac{1}{11}$.

Intentions pédagogiques

Le sous-thème de la numérisation des sons fournit l'occasion de mettre en action des concepts et des pratiques issues de différentes sciences (physique, mathématiques, informatique). L'animation GeoGebra®, qui peut être présentée en classe par le professeur ou fournie aux élèves pour faire des manipulations et émettre des conjectures, permet de visualiser les différentes étapes de l'échantillonnage et de la quantification.

Le travail sur les nombres en écriture binaire, en lien avec le programme de SNT, permet à la fois d'appréhender l'un des fondements de l'informatique, de manipuler des puissances de 2 et de réinterroger les algorithmes opératoires en base dix.

Retrouvez eduscol sur :

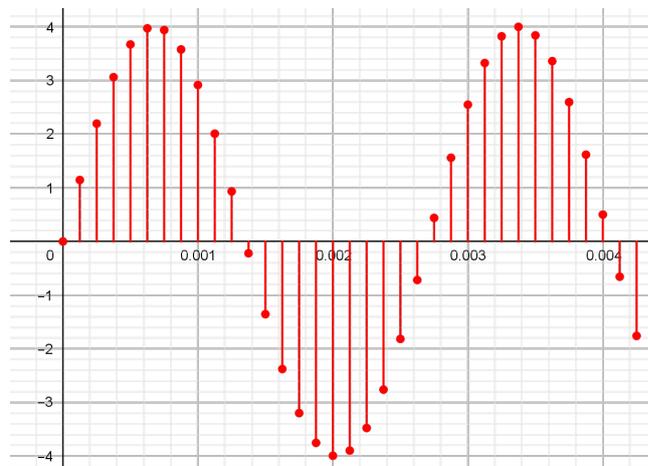


La manipulation de différentes grandeurs et de leurs unités permet de consolider le sens des opérations et les ordres de grandeurs utilisés en informatique, dans un contexte lié aux usages des fichiers numériques.

Propositions d'Activités

Activité 1 : lecture de courbes illustrant l'échantillonnage et la quantification

On considère un ensemble de valeurs obtenues par échantillonnage d'un son pur. L'unité portée sur l'axe des abscisses est la seconde.



1.

1.1. Déterminer la fréquence du son échantillonné.

1.2. Déterminer la fréquence f d'échantillonnage.

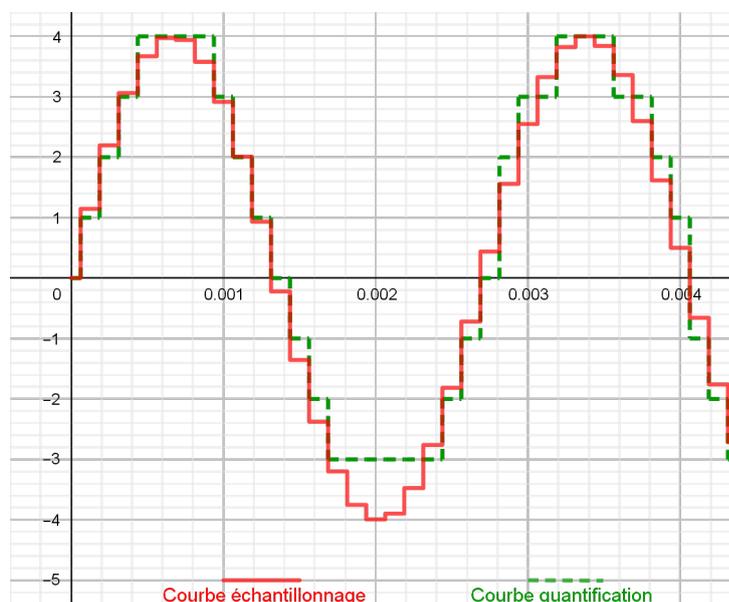
À partir de l'échantillon réalisé ci-dessus, on trace la courbe d'échantillonnage de la manière suivante : on associe à chaque point de l'échantillon un segment parallèle à l'axe des abscisses, centré sur le point, de longueur $\frac{1}{f}$ (période de l'échantillonnage). Cela revient à considérer que la tension du signal est constante sur une durée, exprimée en seconde, égale à $\frac{1}{f}$ autour de chaque prise de tension.

On construit également la courbe obtenue après quantification, sur le même principe, mais avec les valeurs quantifiées.

Retrouvez éduscol sur :



On obtient les graphiques suivants.



2.

2.1. À partir de la courbe d'échantillonnage, déterminer la fréquence d'échantillonnage et indiquer sur combien de bits sont codées les valeurs quantifiées.

2.2. Les nombres positifs sont simplement écrits dans leur écriture binaire : ainsi le nombre 3 a-t-il pour écriture binaire 011.

Pour coder un nombre négatif :

- On considère l'écriture binaire de sa valeur absolue. Par exemple pour -3 on commence par écrire 011.
- On détermine le complément à 1 de ce dernier nombre, ce qui revient à prendre la négation de chaque bit : 0 est remplacé par 1 et 1 est remplacé par 0. Par exemple, 011 devient 100.
- On ajoute 1 au nombre obtenu (ne pas oublier les retenues éventuelles), ce qui constitue le code cherché. Par exemple, en ajoutant 1 à 100, on obtient 101. Le codage de -3 est 101.

Appliquer l'algorithme ci-dessus pour déterminer le codage de -1 et -2 .



Télécharger l'animation GeoGebra® intitulée « [Échantillonnage et quantification d'un son](#) ». Cette animation permet de construire des courbes d'échantillonnage et de quantification d'un son pur dont on peut faire varier la fréquence (encore appelée hauteur).

Retrouvez éducol sur :



Activité 2 : taille de fichiers audio et débit binaire

Les services de musique en ligne proposent en téléchargement de la musique en diverses résolutions. L'un d'eux propose des fichiers « haute résolution » correspondant à un échantillonnage à 96 kHz, un codage sur 24 bits et un enregistrement stéréo.

On fait l'hypothèse totalement irréaliste que les fichiers proposés ne sont pas compressés.

1. Quel est l'espace de stockage nécessaire pour enregistrer une seconde de musique de cette qualité ?
2. Quelle est la taille d'un fichier pouvant contenir un enregistrement de cette qualité des six suites pour violoncelle de Bach, d'une durée totale de 2 h 15 min ?
3. Pour une connexion Internet dont le débit est 8 Mbit/s, peut-on écouter en streaming un enregistrement de cette qualité ?
4. Avec cette même connexion internet, combien de temps faut-il pour télécharger les six suites de Bach ?

Activité 3 : fichiers compressés

Un fichier audio, stéréo, échantillonné à 44,1 kHz et codé sur 16 bits, contenant les six suites pour violoncelle de Bach d'une durée totale de 2 h 15 min est compressé en un fichier MP3 à 320 kbit/s.

1. Combien de données sont utilisées pour coder 1 seconde de musique sur le fichier avant compression ?
2. Calculer le taux de compression pour passer d'un fichier à l'autre.
3. Quelle est la taille du fichier MP3 obtenu ?
4. Combien de temps faut-il pour télécharger ce fichier avec une connexion Internet de 8 Mbit/s ?
5. Un mélomane possède dans son audiodépot de nombreux CD, tous enregistrés en stéréo, échantillonnés à 44,1 kHz et codés sur 16 bits. Il estime qu'en moyenne, chaque CD dure une heure et décide de stocker sa musique sous forme de fichiers MP3 à 320 kbit/s.
Combien peut-il stocker de fichiers MP3 sur un disque dur ayant une capacité de 1 To ?

Pour aller plus loin : calcul en binaire

Addition et soustraction en écriture binaire. Les opérations entre nombres écrits en base deux permettent de prendre conscience de certains processus opératoires (notamment ceux qui sont liés à la retenue) devenus automatiques en base dix.

Bibliographie et sitographie

- Site internet lors du [centenaire Claude E. Shannon](#).
- Article « [Représenter les sons musicaux](#) » sur le site de la revue pour la science.
- Site interstices [Joseph Fourier](#) et les sons.

Retrouvez éducol sur :

