



éduscol



Ressources pour le lycée général et technologique

Ressources pour la classe de seconde
générale et technologique

Méthodes et pratiques scientifiques Thème science et aliments Projet « autour de l'abricot »

Enseignement d'exploration

Ces documents peuvent être utilisés et modifiés librement dans le cadre des activités d'enseignement scolaire, hors exploitation commerciale.

Toute reproduction totale ou partielle à d'autres fins est soumise à une autorisation préalable du directeur général de l'Enseignement scolaire.

La violation de ces dispositions est passible des sanctions édictées à l'article L.335-2 du Code de la propriété intellectuelle.

25 août 2010
(édition provisoire)

THÈME : SCIENCE ET ALIMENTS

Projet : « autour de l'abricot »

Le suivi de l'abricot depuis sa production jusqu'à sa consommation, conduit à s'intéresser à différentes thématiques pouvant donner lieu à des activités scientifiques et technologiques variées

Thématiques	Maths	SPC	SVT	SI
Production et conditionnement des fruits	Modèles de croissance du fruit. Problèmes d'empilement de sphères annexe 1 : empilements	Engrais et produits phytosanitaires ; identification de l'éthylène responsable du mûrissement et extraction de pigments.	De la fleur au fruit : croissance , mûrissement ; amélioration des variétés (croisement, greffes) ; conservation des espèces anciennes) ; taille et élagage des fruitiers (technique et rôle) ; protection des fruits contre les aléas climatiques ; cultures bio.	Emballages : choix et recyclage.
Transport des fruits	Algorithmes de plus court chemin Théorie des graphes annexe-2 plus court chemin	suivi du mûrissement par un procédé physique ou chimique. Cinétique chimique : effet de la température	effet de la température et du confinement sur la conservation ; contrôle de la maturation des fruits : accélération de la maturation ou limitation du mûrissement.	

Thématiques	Maths	SPC	SVT	SI
Transformation (conserves, pâtes de fruits, jus de fruits, confitures, abricots secs)	Optimisation des gains en fonction de la quantité de fruits soumis à deux traitements. (Optimisation linéaire)	Taux de sucre, gélifiants...	Utilisations des noyaux : extraction d'huiles d'amandes et d'autres composés alimentaires ; utilisation en cosmétologie, risques alimentaires (acide cyanhydrique) Développement de micro-organismes sur milieux sucrés	
Etalage de fruits frais	Problèmes d'empilement	Différentes méthodes de conservation	Maintien de l'état de turgescence par aspersion d'eau Conservation par ionisation.	
Conserves	Forme et dimensions des boîtes annexe 3 Boites de conserve		Relation entre pression osmotique et conservation des préparations	Etude des matériaux
Contrôle qualité	exploitation de tests, validité de l'échantillonnage ; intervalle de fluctuation. annexe 4		Tests et fonctionnement des organes des sens pour le mise en vente de produits nouveaux	Codes-barres : programmation et lecture

Annexe 1 :

Problème d'empilement de sphères

Devant certains musées, on peut parfois trouver des pyramides à base carrée comme ci-contre (formées de boulets de canons).



- 👉 Combien faut-il de boulets pour construire une telle pyramide ?
- 👉 En utilisant l'intégralité des boulets de deux pyramides identiques à celle représentée ci-dessus, est-il possible d'obtenir :
 - deux pyramides à base carrée de tailles différentes ;
 - trois pyramides à base carrée...
- 👉 **Nombre pyramidal :**

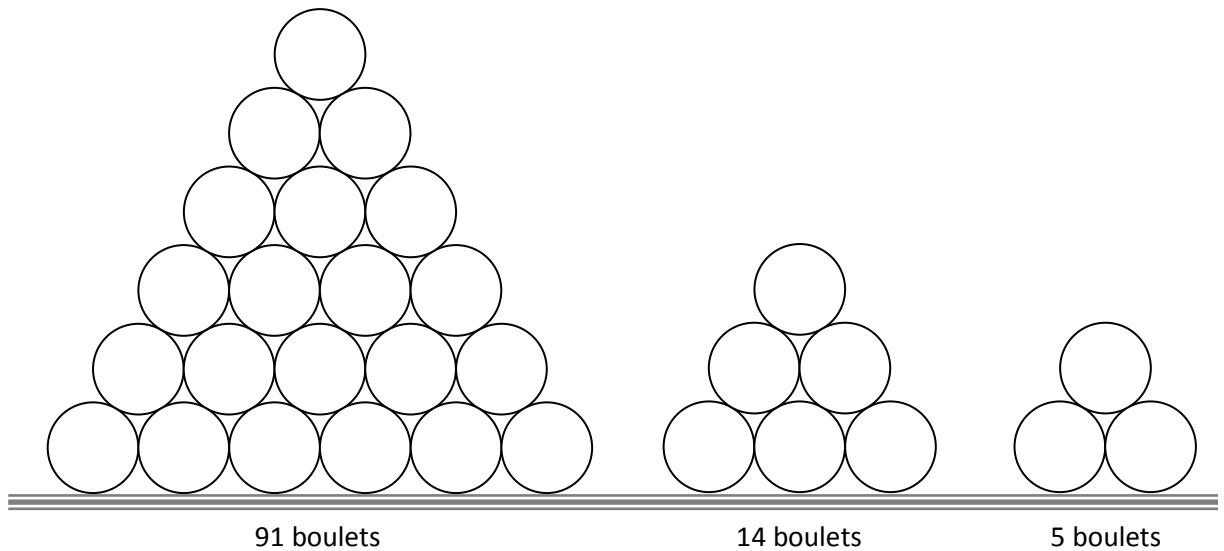
un nombre est dit pyramidal s'il représente le nombre de boulets nécessaires à la construction d'une pyramide dont la base est un polygone régulier. Ainsi 1, 5, 14, 55 et 91 sont des nombres pyramidaux à base carrée que l'on appellera plus simplement nombres pyramidaux carrés.

 - Quels sont les 15 premiers nombres pyramidaux carrés.
 - Établir quelques propriétés de ces nombres...
- 👉 En considérant que ces boulets sont bien sphériques et sachant que leur diamètre vaut 12 cm, quelle est la hauteur d'une telle pyramide (au mm près) ? Généralisation ?

Indications pour le professeur

Nombre de boulets : $5^2 + 4^2 + 3^2 + 2^2 + 1 = 25 + 16 + 9 + 4 + 1 = 55$

En utilisant l'intégralité de 110 boulets, il n'est pas possible d'obtenir deux pyramides à base carrée de tailles différentes ; en effet : $36 + 55 = 91$ mais $110 - 91 = 19$ et il n'existe pas de pyramide à base carrée utilisant 19 boulets... Par contre il est possible d'obtenir trois pyramides à base



carrée de tailles différentes car : $110 = 91 + 14 + 5$

Nombres pyramidaux :

a) **1, 5, 14, 30**, 55, **91**, 140, 204, 285, 385, 506, 650, 819, 1015 et 1240.

b) Le $n^{\text{ième}}$ nombre pyramidal carré est égal au cumul des carrés des n premiers entiers, c'est à dire à la somme des carrés des n premiers entiers successifs (autre que 0) ; par exemple :

$$30 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 1 + 4 + 9 + 16$$

c) Le $n^{\text{ième}}$ de ces nombres est égal à son prédécesseur, le $(n-1)^{\text{ième}}$, plus le carré du $n^{\text{ième}}$ nombre entier non nul ; par exemple, le $4^{\text{ème}}$ de ces nombres est 30 et on a bien :

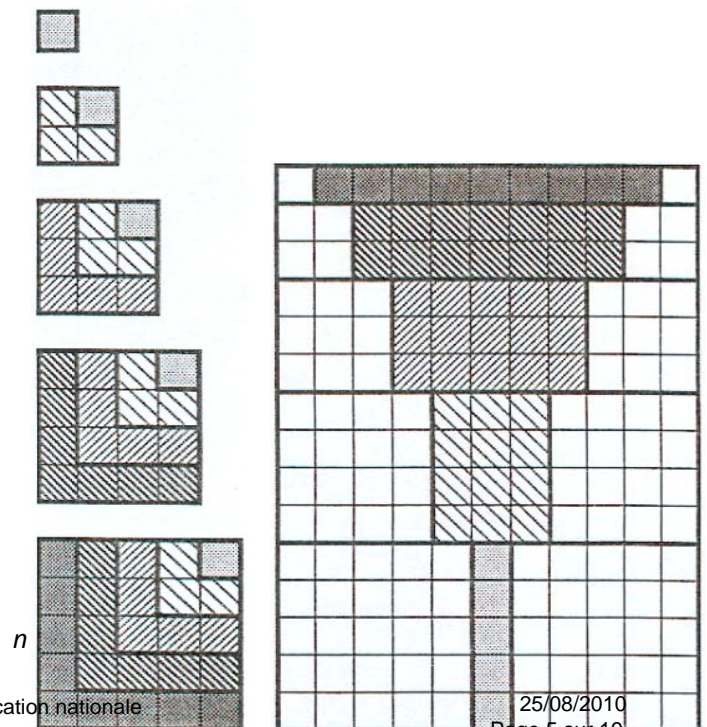
$$30 = 14 + 4^2 = 14 + 16.$$

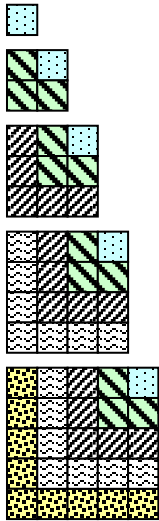
Conjecture admise : **$\text{Pycar}_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$**

Indications pour les élèves voulant aller plus loin dans le cadre d'une différenciation pédagogique :

À l'aide du puzzle ci-contre,

Déterminer le $n^{\text{ième}}$ nombre pyramidal carré en fonction de n ...





Clé pour comprendre le puzzle

Les 5 carrés en couleur sur le côté se retrouvent à deux endroits, tels quels, dans le rectangle : “colonne” de droite et “colonne” de gauche (cf. ci-contre).

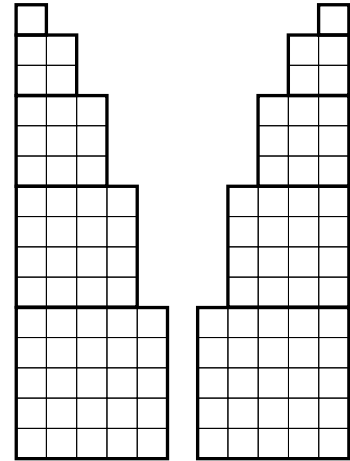
On les retrouve encore une fois “colonne centrale”, en effet avec ces 5 carrés on a : **1 fois 9**,

2 fois 7,

3 fois 5,

4 fois 3,

5 fois 1



En les empilant ainsi, on obtient bien la “pyramide centrale (cf. ci-contre)...

Le rectangle est donc constitué de 3 fois les carrés sur le côté et donc on a :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = \frac{(9+2) \times (1+2+3+4+5)}{3}$$

$$= \frac{11 \times 15}{3} = 55$$

Et ce procédé est généralisable :

Avec n carrés, le dernier ayant comme côté n , les carrés en couleur représenteront le nombre impair $n+n-1$, c'est-à-dire $2n-1$, le rang supérieur représentant $2n-3$, etc. et on aura :

1 fois $2n-1$,

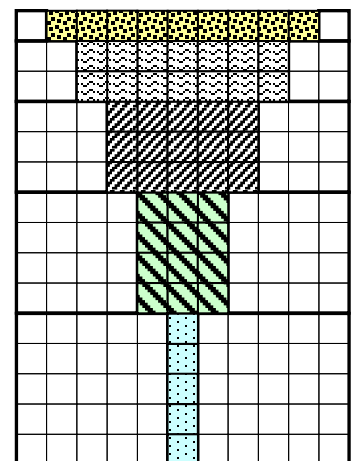
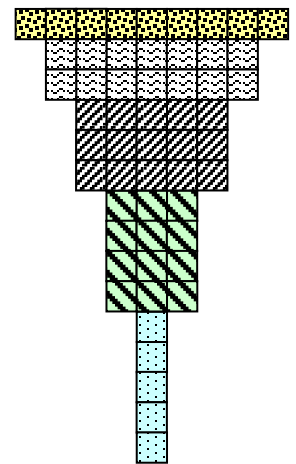
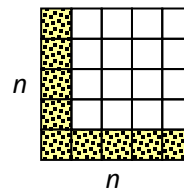
2 fois $(2n-3)$,

--- / ---

$(n-2)$ fois 5,

$(n-1)$ fois 3,

n fois 1



d'où :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{(2n-1+2) \times (1+2+3+\dots+n)}{3} = \frac{(2n+1) \times \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)}{3} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

↪ vérification pour $n = 1$, $n = 2$, etc.

Et pour $n = 2010$, **Pycar₂₀₁₀** = $\frac{2010 \times 2011 \times 4021}{6} = 2\,708\,887\,385$.

Hauteur d'une pyramide à base carrée...

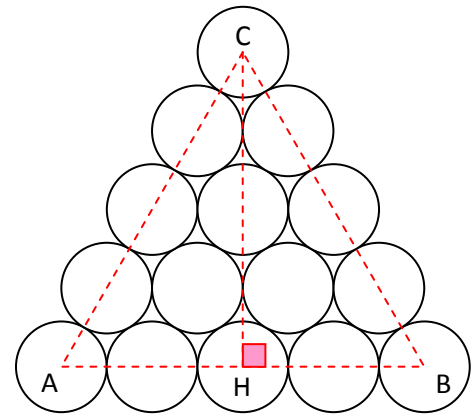
Étape 1 : 1 boulet et la hauteur de la pyramide vaut 12 cm.

Étape 2 : $1 + 2^2 = 5$ billes et $\ell_2 = \frac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$ et $(h_2)^2 = (6\sqrt{3})^2 - 6^2 = 72 = 36 \times 2$, d'où $h_2 = 6\sqrt{2}$; la hauteur de la pyramide est donc $H_2 = 6\sqrt{2} + 12$ soit environ 20,49 cm.

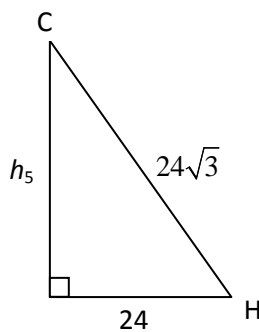
Étape 5 : $55 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25$; la base de la pyramide est donc constituée de 25 boulets et a 5 "étages" avec 4 **faces latérales** comme ci-contre...

Considérons le triangle ABC obtenu en joignant les centres des boulets aux "extrémités" : ce triangle est équilatéral de côté 4 diamètres c'est-à-dire 48 cm et donc la hauteur CH vaut :

$$\ell_5 = \frac{48\sqrt{3}}{2} = 24\sqrt{3} \text{ cm}$$



Considérons maintenant la pyramide en coupe comme ci-dessous (le plan de coupe est le plan perpendiculaire à la base passant par les points C et H) :



On a : $(h_5)^2 = (24\sqrt{3})^2 - 24^2 = 1728 - 576 = 1152 = 3^2 \times 8^2 \times 2$,

d'où : $h_5 = 24\sqrt{2}$; la hauteur de la pyramide vaut donc $H_5 = 24\sqrt{2} + 12$ c'est-à-dire environ 45,94 cm.

Au rang n, on aura : $\ell_n = (n-1) \times 12 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 6(n-1)\sqrt{3}$

$(h_n)^2 = (6(n-1)\sqrt{3})^2 - (6(n-1))^2 = (6(n-1))^2 \times 2$ et donc la hauteur de la pyramide est $H_n = 6(n-1)\sqrt{2} + 12$

Annexe 2 :

Un algorithme de plus court chemin

Une société de distribution de produits alimentaires veut optimiser ses coûts de transport entre différentes villes. Pour se rendre d'une ville A à une ville B, il vaut parfois mieux (en terme de coûts) faire un ou plusieurs détours par d'autres villes situées sur le chemin plutôt que de s'y rendre directement. Le problème est donc le suivant : connaissant les coûts de passage entre deux villes quelconques sur le trajet, comment déterminer l'itinéraire optimal entre deux villes données ?

Partons d'un exemple simple comportant seulement 4 villes. Les coûts (exprimés en centaines d'euros) sont résumés dans le tableau suivant :

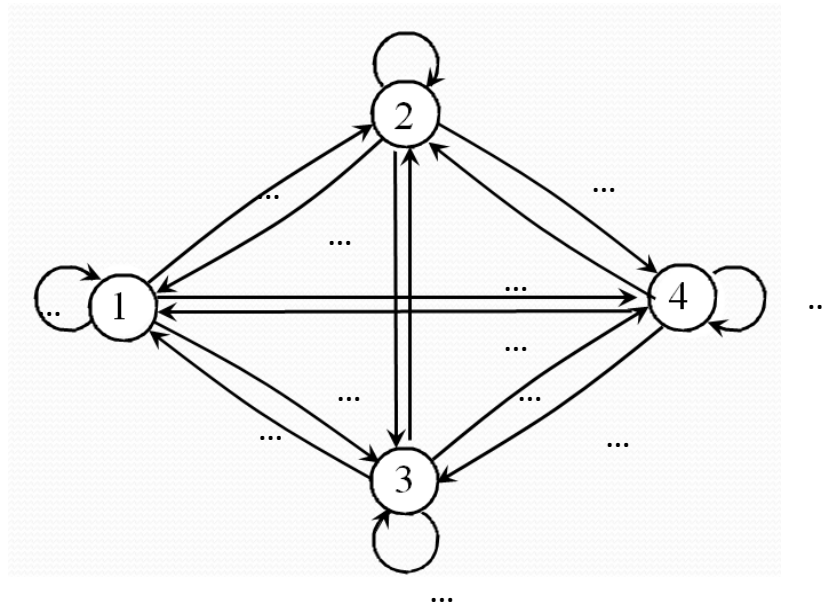
<div style="display: inline-block; vertical-align: middle;">Arrivée Départ</div>	Ville n°1	Ville n°2	Ville n°3	Ville n°4
Ville n°1	∞	1	2	∞
Ville n°2	1	∞	∞	3
Ville n°3	3	1	∞	4
Ville n°4	∞	∞	5	∞

Ce tableau se lit :

- « le coût du passage de la ville n°4 à la ville n°3 coûte 500 euros »,
- « le coût du passage de la ville n°1 à la ville n°4 est bien trop élevé pour être envisagé,
- « le coût du passage de la ville n°1 à la ville n°1 est bien trop élevé pour être envisagé: le temps de passage dans cette ville se limitera au temps nécessaire au déchargement des produits

A partir de ce tableau, on peut dessiner un schéma (appelé graphe) qui visualise par des flèches les coûts entre ces villes. Compléter le graphe suivant :

...



Trouver une justification permettant d'expliquer la différence de prix qu'il y a parfois entre l'aller et le retour.

On constate rapidement qu'il existe plusieurs coûts possibles pour passer d'une ville à l'autre : selon que le trajet est direct ou composé de deux ou de trois tronçons. Il s'avère parfois que le trajet direct n'est pas le moins cher.

Ainsi, on pourra demander tous les coûts possibles pour passer de la ville 4 à la ville 1

Comment expliquer qu'un *détour* peut parfois s'avérer moins cher qu'un *trajet direct* ?

Sur ces constats, remplir le tableau suivant donnant les meilleurs coûts pour passer d'une ville à l'autre :

Meilleur coût	Ville n°1	Ville n°2	Ville n°3	Ville n°4
Ville n°1				
Ville n°2				
Ville n°3				
Ville n°4				

Le problème du meilleur coût entre chaque ville est donc simple à résoudre lorsqu'il met en jeu un petit nombre de villes. Mais la résolution du même problème pour 500 villes rendrait la lecture, sur un tableau ou sur un graphe, très longue et très compliquée.

Comment faire dans ce cas ? Plusieurs algorithmes permettent de résoudre ce problème et on pourra se reporter à de nombreux articles mathématiques traitant ce sujet.

La méthode ici proposée repose sur une algèbre particulière, appelée algèbre tropicale reposant sur deux lois : Min et +. Cette algèbre s'appelle aussi l'algèbre (Min, +).

ALGÈBRE (Min,+)

L'algèbre (Min,+) s'obtient en posant de nouvelles opérations sur les nombres réels :

*L'addition de deux nombres devient la recherche du *minimum de ces deux nombres* :*

$a \oplus b = \min\{a;b\}$ (le *minimum entre a et b*). Par exemple : $3 \oplus 5 = 3$.

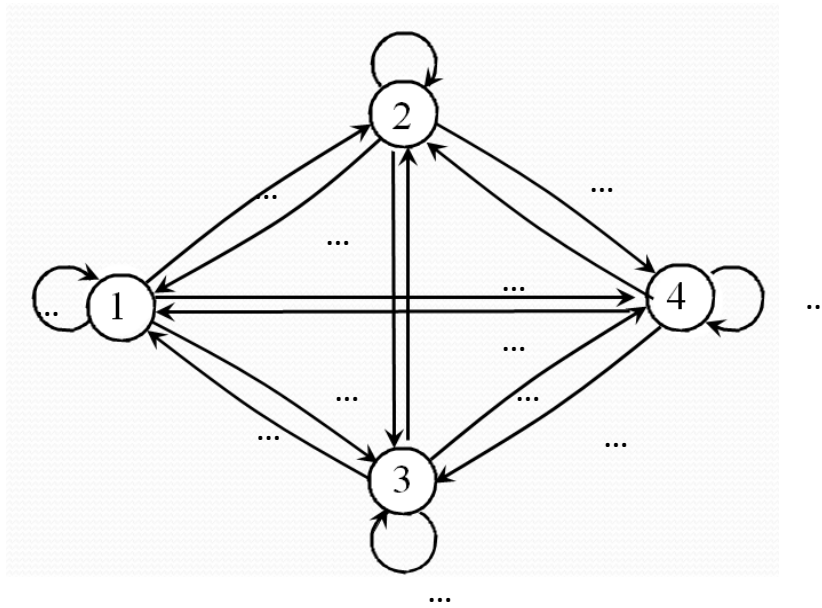
La multiplication devient l'addition classique de ces deux nombres :

$a \otimes b = a + b$. Par exemple : $3 \otimes 5 = 8$

La puissance devient alors la multiplication : $5^{(4)} = 5 \otimes 5 \otimes 5 \otimes 5 = 20$.

Nous savons que, sur notre exemple à 4 villes, il existe plusieurs coûts possibles pour passer d'une ville à l'autre : soit directement, soit en deux tronçons, soit en trois tronçons :

...



Il y a 4 manières pour passer d'une ville à l'autre en 2 tronçons. Par exemple, pour passer de la ville n°1 à la ville n°2, on peut aller de 1 en 1 puis de 1 en 2, de 1 en 2 puis de 2 en 2, de 1 en 3 puis de 3 en 2, enfin de 1 en 4 puis de 4 en 2

En utilisant les opérations (Min,+), écrire une ligne de calcul qui exprime le choix du meilleur coût pour passer en 2 tronçons de la ville n°1 à la ville n°2 :

Faire de même pour passer en deux tronçons de la ville i à la ville j

(i et j quelconques entre 1 et 4)

ECRITURE DU TABLEAU SOUS FORME DEMATRICE

En fait, le tableau de départ peut s'écrire en retirant les numéros des villes sur les bords et les lignes du tableau :

Coûts	Ville n°1	Ville n°2	Ville n°3	Ville n°4
Ville n°1	∞	1	2	∞
Ville n°2	1	∞	∞	3
Ville n°3	3	1	∞	4
Ville n°4	∞	∞	5	∞

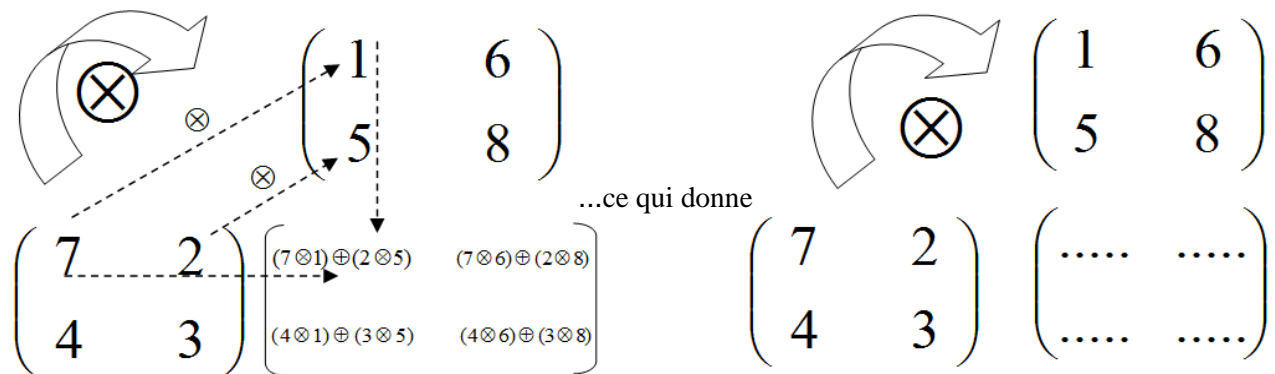
→ $C = \begin{pmatrix} \infty & 1 & 2 & \infty \\ 1 & \infty & \infty & 3 \\ 3 & 1 & \infty & 4 \\ \infty & \infty & 5 & \infty \end{pmatrix}$

Ce nouveau tableau simplifié est la matrice des coûts entre chaque ville (une matrice de taille 4 : 4 lignes et 4 colonnes).

On peut définir des opérations (min,+) entre matrices. On peut les additionner :

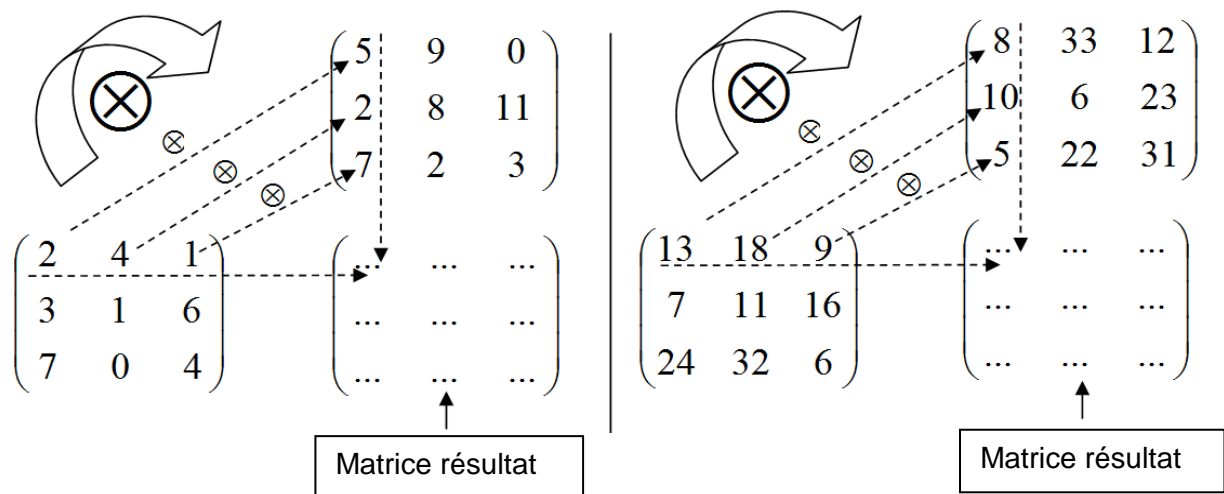
$$\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \oplus 1 & \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots\dots & \dots\dots \\ \dots\dots & \dots\dots \end{pmatrix}$$

et les multiplier :



Finir ces calculs.

Les règles de multiplication matricielles (min,+) restent les mêmes pour une matrice à trois lignes et trois colonnes :



Comment, grâce à ces règles de calcul, peut-on trouver la matrice des meilleurs coûts de passage d'une ville à l'autre éventuellement en transitant par une ou plusieurs autres villes ?

$$C = \begin{pmatrix} \infty & 1 & 2 & \infty \\ 1 & \infty & \infty & 3 \\ 3 & 1 & \infty & 4 \\ \infty & \infty & 5 & \infty \end{pmatrix}$$

La matrice C ci-dessus donne les coûts de passage direct d'une ville à l'autre.

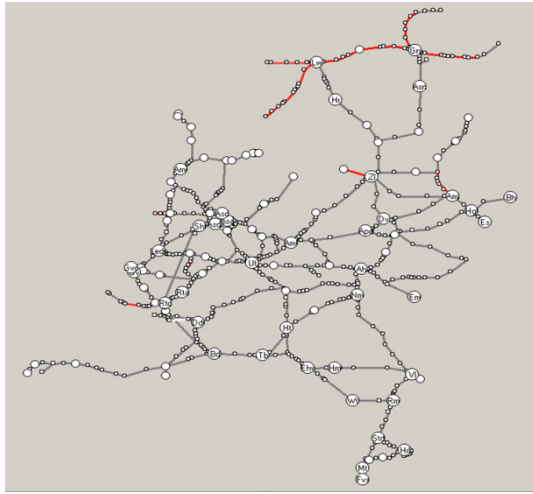
Calculer les matrices $C^{(2)} = C \otimes C$ et $C^{(3)} = C^{(2)} \otimes C$

The diagram illustrates the calculation of $C^{(2)}$ and $C^{(3)}$ from matrix C . It shows the original matrix C on the left. To its right, a diagram shows $C \otimes C$ with a red dashed box around the resulting matrix. Further right, a diagram shows $C^{(2)} \otimes C$ with a red dashed box around the first two matrices and a blue solid box around the third matrix.

Calculer enfin $C^* = C \oplus C^{(2)} \oplus C^{(3)}$ et en donner une interprétation en terme de plus court chemin.

Sur cet exemple, le calcul peut se faire à la main. Mais pour étendre ces calculs à des réseaux de grande taille, on est amené à écrire un algorithme et à le coder dans un langage de programmation. Un tel travail pourra être proposé aux élèves.

Ces algorithmes sont utilisés pour optimiser la régulation des réseaux, comme les réseaux de télécommunication (internet), les réseaux fluviaux ou les réseaux ferroviaires.



Réseau ferroviaire des Pays-Bas

Annexe 3 : dimensions des boîtes de conserve

La question qui fait l'objet de cette étude est la suivante :

Existe-t-il des situations **réelles** liées à liées au conditionnement et à la cuisson des aliments pour lesquelles la quantité de métal utilisé est minimale un cylindre de volume donné ?

a. Le point de départ concerne les boîtes de conserves.

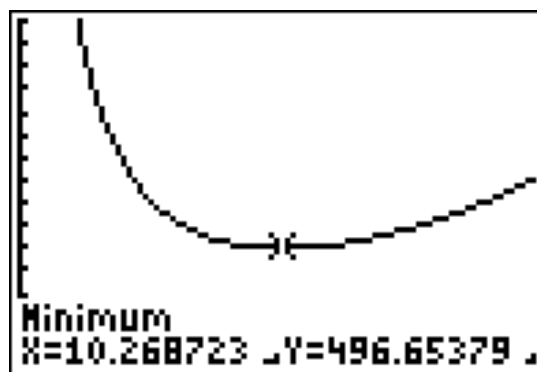
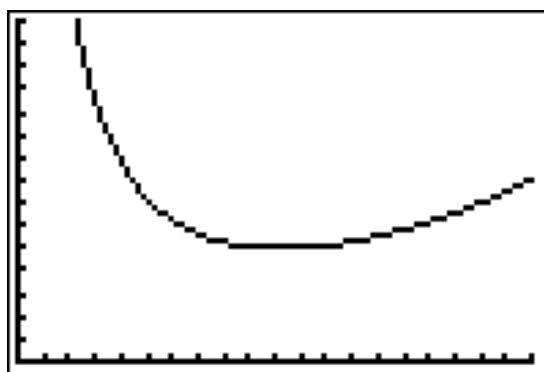
On peut se poser la question classique de la construction d'une boîte conserve utilisant le minimum d'acier pour un volume donné, traité habituellement à partir de la première.

En utilisant la partie agrandissement et réduction du programme de troisième, on arrive au constat qu'il suffit de résoudre le problème pour une boîte d'un volume choisi au hasard.

Pour les fabricants de conserves, l'unité de base (appelée 4/4) est la boîte de 850 ml.

On peut donc faire exprimer aux élèves pour ce volume l'aire de cette boîte (travail sur les aires, les conversions, l'homogénéité des formules) en fonction du diamètre d exprimé en cm, puis représenter cette fonction (utilisation de la calculatrice, choix de la fenêtre adaptée) et trouver de manière approchée (en utilisant la fonction minimum de la calculatrice) ou exacte grâce à un logiciel de calcul formel le rayon des couvercles ainsi que la hauteur.

$$\text{Ici l'aire est : } A_{\text{cons}}(d) = \frac{4 \times 850}{d} + \frac{\pi}{2} d^2 = \frac{3400}{d} + \frac{\pi}{2} d^2$$



On obtient que le diamètre est égal à la hauteur au centième (les valeurs étant rigoureusement égales si on ne prend pas d'approximation pour π).

Ainsi, on sait que c'est valable pour n'importe quelle boîte de conserve par propriété des rapports dans le cas des agrandissements et réduction.

On peut faire constater par les élèves que dans la réalité peu de boîtes sont optimales et se demander pourquoi ;

Un prolongement possible est le calcul par les élèves du pourcentage de perte pour un certain type de boîte donné par rapport au modèle optimisé

b. Et pour les casseroles ?

On va prendre le cas d'une casserole de 1,2l

Ici l'aire est : $A(x) = \frac{1200}{x} + \pi x^2$ où x est le rayon de la casserole.

Ici par contre, la forme optimale est atteinte pour une hauteur égale au rayon

Dans un cas trouvé au hasard, on est dans le cadre de la quasi optimisation, et toutes les autres casseroles sont un agrandissement de la première.

Annexe 4 :

Contrôle qualité

Carte de contrôle qualité

Un employé travaille dans une usine qui fabrique des bonbons à l'abricot. Il contrôle le nombre de bonbons par paquets, en prélevant régulièrement des échantillons aléatoires de taille 30 dans chacune des productions de trois machines.

Lorsque le processus est sous contrôle (machine fonctionnant correctement), la proportion de paquets contenant exactement 50 bonbons dans la production d'une machine est $p = 0,7$.

L'employé surveille si la qualité est inférieure, supérieure, ou égale à cette norme.

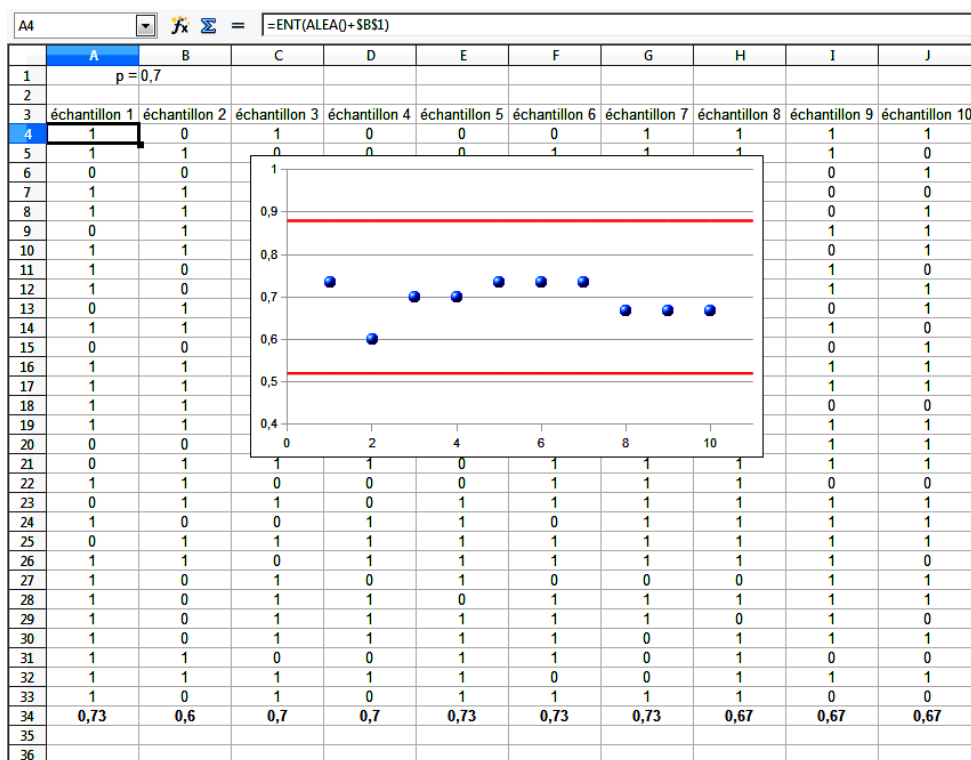
❖ 1. Élaboration d'une carte de contrôle

a) Calculer les limites de surveillance de la carte de contrôle, correspondant à

$$p - \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ et } p + \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ (arrondir à } 10^{-2}\text{)}.$$

b) D'après le cours de mathématiques, que peut-on dire de la proportion des échantillons aléatoires de taille 30 fournissant une fréquence f de paquets contenant exactement 50 bonbons lorsque le processus est sous contrôle ?

❖ 2. Simulation lorsque le processus est sous contrôle



Préparer une feuille de calcul comme ci-dessus.

- En B1, entrer 0,7.
- En A4, entrer la formule = ENT(ALEA()+\$B\$1) puis recopier vers le bas jusqu'en A33.
- En A34, entrer la formule = SOMME(A4:A33)/30.

□ Compléter la feuille de calcul pour simuler 10 échantillons, puis représenter les fréquences de la ligne 34 sous forme d'un nuage de point (la carte de contrôle), en fixant les échelles comme sur l'image d'écran.

□ Représenter les droites rouges correspondant aux limites de surveillance calculées dans la partie 1.

a) Faire de nombreuses fois F9. Voit-on des points en dehors des limites de surveillance ?

b) Un point en dehors des limites de surveillance correspond ici à une fausse alerte. À combien estimez-vous le pourcentage de fausses alertes ?

❖ 3. Simulation d'un défaut de qualité

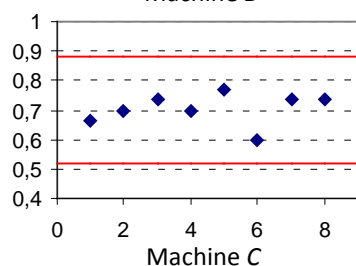
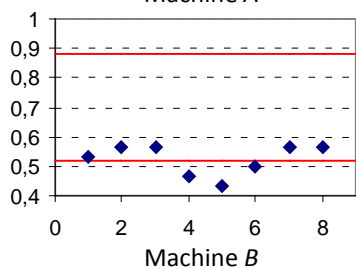
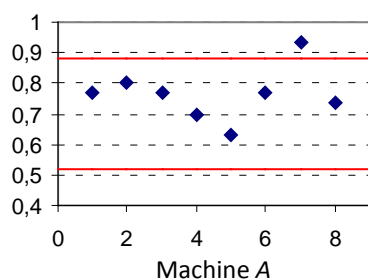
Entrer en B1 la valeur 0,6.

a) Quelle la fréquence p des paquets contenant exactement 50 bonbons dans toute la production de la machine ?

b) Faire plusieurs fois F9. Les cartes de contrôles (avec 10 échantillons) donnent-elle l'alerte ?

❖ 4. Diagnostiques d'après des cartes de contrôle

Voici les cartes de contrôle obtenues pour les trois machines. Que pouvez-vous dire à propos de chaque machine ?



❖ Éléments de réponse

1. a) Les limites de surveillance sont 0,52 et 0,88.

b) Lorsque le processus est sous contrôle, $p = 0,7$, et la probabilité qu'un échantillon de 30 paquets fournisse une fréquence f de paquets contenant exactement 50 bonbons est supérieure à 95 %. Autrement dit, plus de 95 % des échantillons de taille 30 fournissent un pourcentage de paquets comprenant exactement 50 bonbons compris entre 52 % et 88 %.

2. a) Cela se produit.

b) Le pourcentage de fausses alertes est inférieur à 5 %.

3. a) $p = 0,6$.

b) Les cartes de contrôle donnent très fréquemment l'alerte (au moins un point en-dessous de la ligne rouge inférieure).

4. Machine A : production vraisemblablement de très bonne qualité (il se peut que l'on soit un peu au-dessus de la norme).

Machine B : alerte ; qualité très vraisemblablement inférieure à la norme.

Machine C : processus sous contrôle.