Ressources pour le lycée général et technologique

Ressources pour la classe de première générale et technologique

Mathématiques
Série STD2A

Nuances de gris

24 octobre 2011

Fonctions, nuances de gris et dégradés

Thème

Le codage de la luminosité et des niveaux de gris, et les transformations qui peuvent y être appliquées.

Objectifs

- Associer les dégradés de gris et les fonctions de $[0;1]$ dans $[0;1]$.
- Consolider la maîtrise des fonctions mathématiques de référence.

Situation d'accroche

A quoi servent les fonctions mathématiques pour le traitement des images ?

Prérequis

Activité « Cube des couleurs »

Documents supports

Photographies en « noir et blanc »

Domaines du programme

- Fonctions de référence, capacités :
  - Connaître la représentation graphique de la fonction racine carrée.
  - Comparer les réels x, x^2 et $\sqrt{x}$ pour un réel x de $[0;1]$.
- Codage des couleurs

Outils

Logiciel de géométrie dynamique GeoGebra
Logiciel de traitement d'images (XnView, The Gimp, ...)

Auteurs

Jean-Marc Duquesnoy
Robert Cabane

Crédits

Les photographies sont issues des collections personnelles des auteurs.

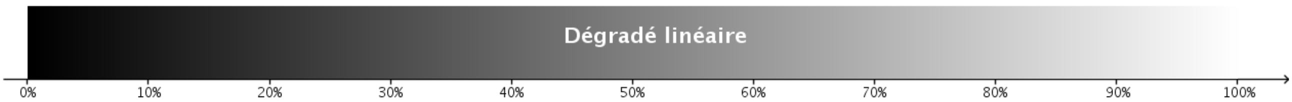
Fonctions, nuances de gris et dégradés

1. Brève introduction

Les notions physiques relatives à la lumière figurent dans le programme de Sciences Physiques et Chimiques de la série STD2A (BOEN spécial n°3 du 17 mars 2011). On pourra consulter les manuels de photométrie pour avoir les définitions des unités physiques correspondantes : candela, lumen, lux.

Dans ce document et les activités proposées nous ne nous occuperons que de lumière dite « blanche ». La discussion sur ce qu'est un « vrai blanc » relève de la Physique[1] ; nous partirons d'une source lumineuse supposée « blanche », éclairant une surface réceptrice (l'œil, un écran, le capteur d'un appareil photo numérique voire … une feuille d'arbre). L'éclairement reçu par cette surface se mesure en lumen (ou lux.m²). Si on désire réduire cet éclairement, on dispose un diaphragme qui permettra de n'obtenir qu'une fraction de l'éclairement initial ; nous associons l'éclairement ainsi obtenu à des nuances de gris[2].

On convient de désigner les gris par un pourcentage : le « gris moyen » ou « gris 50% » correspond à une atténuation du blanc initialement retenu par un diaphragme occultant la moitié de la source lumineuse ; aux extrêmes, le « gris 0% » est simplement le blanc initial et le « gris 100% » n'est autre que le noir, absence de lumière[3]. Le dégradé représenté ci-dessous correspond à ces conventions.



2. Le codage informatique et son abstraction

D'un point de vue informatique (ou infographique) les « niveaux de gris » sont codés sous forme de nombres entiers compris entre 0 et 255, pour la simple raison qu'avec huit chiffres binaires (bits) un maximum de $256=2^8$ valeurs distinctes de l'intensité lumineuse peuvent être atteintes. La valeur 0 représente la couleur noire, et la valeur 255 la couleur blanche (voir l'activité Cube des couleurs qui a permis de définir l'axe achromatique).

Certains logiciels proposent des « curseurs » allant de 0 à 255 (ou de 00 à FF en représentation hexadécimale), d'autres restent sur un pourcentage. Mathématiquement parlant, il est commode d'associer ces grandeurs aux nombres réels de l'intervalle $[0;1]$ tout en sachant que, dans une image numérique, le nombre effectif de niveaux de gris distincts reste fini..

1 C'est une question de températures !

2 Si la « source » lumineuse est une image déjà numérisée, formée de ses composantes rouge, verte et bleue, on peut convertir cette image en une image en « niveaux de gris » en assignant à chaque point une nuance de gris (luminosité) égale à une moyenne pondérée des valeurs des composantes R, V et B.

3 La terminologie en usage en colorimétrie nomme les nuances de gris en sens inverse d'après le principe de synthèse soustractive des couleurs ; c'est ainsi que la couleur nommée « Gris 10% » correspond à une intensité lumineuse 0,9=90%, donc à la valeur 230, approximation de 0,9 × 255.

En résumé :

0 représente le noir, ½=50% représente le gris moyen et 1=100% représente le blanc.

On passe de la représentation « mathématique » à la représentation « informatique » par la formule ENT(255*g), g désignant le niveau de gris dans $[0;1]$.

Le passage inverse se fait par une division par 255[4].

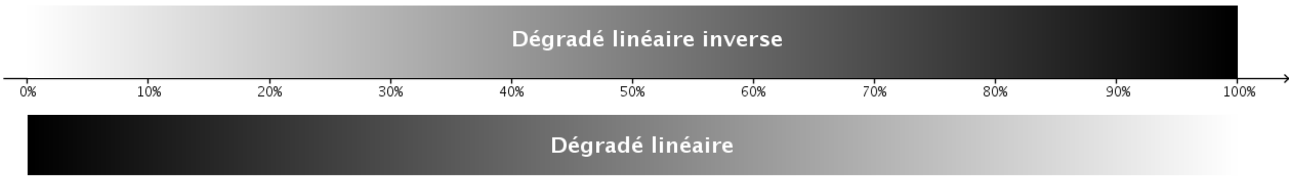
3. Comparer deux dégradés

Prenons le cas du passage au négatif d'une photo (exemple ci-contre). On voit bien que le blanc et le noir sont échangés, le gris moyen conservé (voir sur le pilier droit de l'arche).

Question : comment passe-t-on de l'un à l'autre ?

Réponse : pour chaque point (« pixel ») de l'image ayant une couleur (plutôt un niveau de gris) $x \in [0;1]$, le niveau de gris de l'image en négatif sera $1-x$.[5]

Nous pouvons donc abstraire ce procédé en figurant côte à côte les deux dégradés :



À l'abscisse x on trouve (en bas) le gris de « valeur » x. À cette même abscisse on a (en haut) la valeur du dégradé transformé par le passage en négatif[6], qui est $1-x$. On peut donc dire que le dégradé du haut est une sorte de représentation visuelle (graphique ?) de la fonction f définie par $f(x)=1-x$.

4. Un peu de pratique

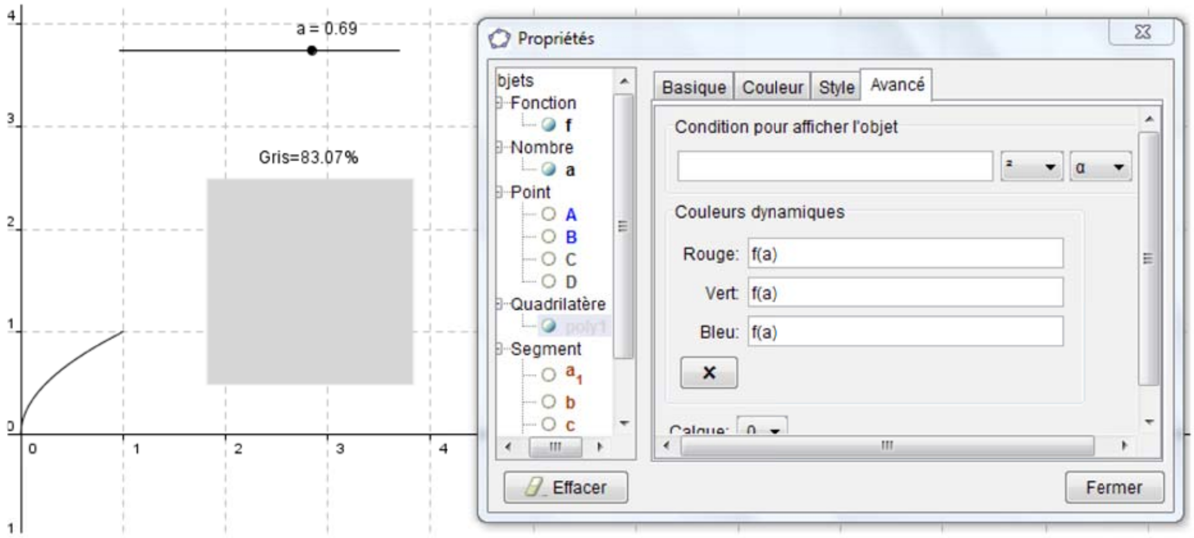
Une première expérimentation avec une figure dynamique déjà prête permettra à l'élève de prendre par la suite des initiatives pour trouver les associations entre dégradés de gris et fonctions mathématiques.

Comment peut-on, à l'aide de Geogebra, associer une fonction (ici, la fonction racine carrée) à l'évolution de la couleur de remplissage d'un polygone ? La solution passe par un curseur et par l'assignation de « couleurs dynamiques » au remplissage du carré.

4 Il convient de faire attention aux erreurs d'arrondi, une formule plus adéquate serait `ARRONDI(255*g;0)`.

5 Cette transformation est fort simple quand on se sert de la représentation binaire ou hexadécimale, il suffit d'échanger les « bits » 0 et 1, ou les « chiffres » hexadécimaux 0 et F, 1 et E, 2 et D etc.

6 Également nommé « inversion vidéo ».



Ici a est un curseur variant de 0 à 1. On peut mettre en valeur les cas particuliers :

$a=\frac{1}{4}=0{,}25$, $a=\frac{1}{16}=0{,}0625$, $a=\frac{9}{16}=0{,}5625$ qui sont des valeurs décimales ayant des racines décimales.

5. Un exercice de reconnaissance visuelle

On présente un dégradé, par exemple celui associé à la fonction « bicorne » $f(x)=4x(1-x)$.

On donne un choix de plusieurs fonctions, par exemple $g(x)=\sqrt{x}$, x, $1-x$, $2x$ sur $[0;\frac{1}{2}]$ et $2-2x$ sur $[\frac{1}{2};1]$ (le chapeau de clown), x^2 et évidemment la fonction f. Si besoin, on peut ajouter la fonction « distance entre x et $\frac{1}{2}$ » (définie de cette façon, ou par morceaux, ou par son graphe) ou son double.

Il est déjà intéressant de faire vérifier que toutes ces fonctions envoient bien [0;1] dans [0;1] [7]!

On demande alors de retrouver la fonction associée au dégradé présenté.

Au préalable, on peut demander les représentations graphiques associées ; ou bien, si l'on part des représentations graphiques, demander de retrouver les formules définissant ces fonctions.

L'élève peut procéder par élimination ou appliquer la méthode dynamique vue précédemment.

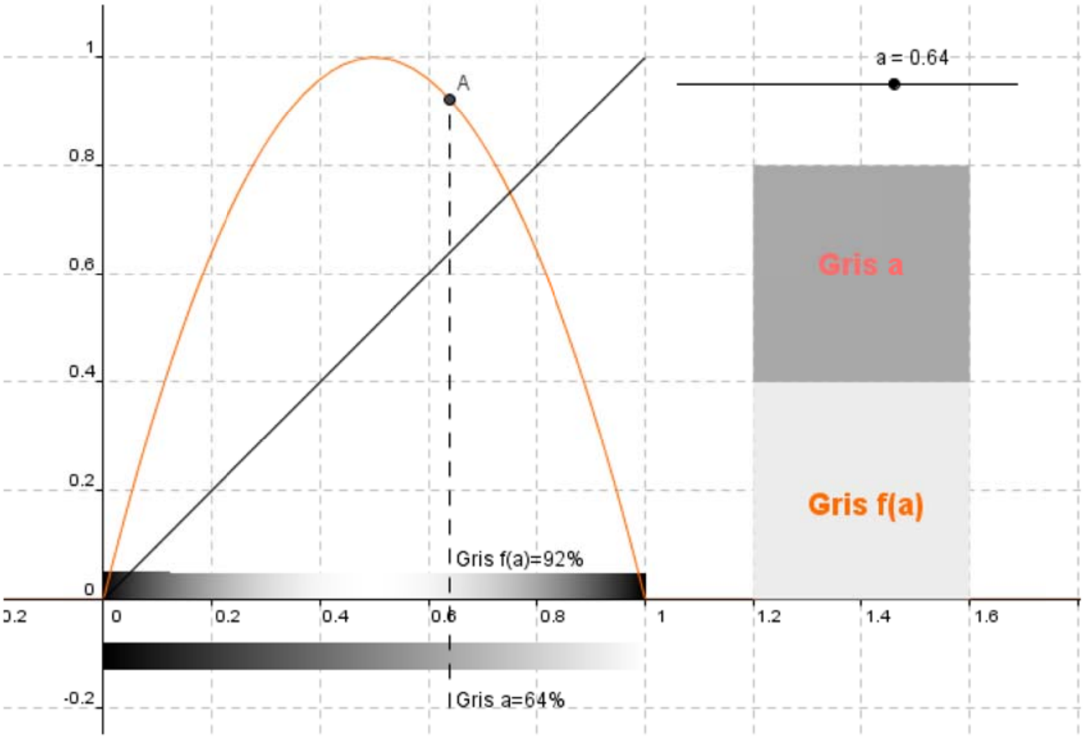
Ou bien, on donne deux dégradés, comme ci-dessous, et l'élève doit associer les deux dégradés horizontaux aux fonctions correspondantes.

6. Un exercice de résolution d'équation

C'est une variante de l'approche précédente, illustrant également le travail sur les fonctions du

7 Si l'on n'a pas encore étudié les fonctions du second degré, on peut tenter de poser $x=\frac{1}{2}+t$.

second degré.[8]



Lorsque l'élève a trouvé les associations, on peut lui demander de conjecturer les valeurs de x pour lesquelles les nuances de gris dans les deux carrés sont égales, puis de valider la conjecture à l'aide de la résolution d'une équation, en l'occurrence ici du second degré.

7. Une autre variante (plus visuelle)

On présente à l'élève une « collection de dégradés » ainsi qu'une « collection de fonctions ». Il s'agit de découvrir les bonnes associations.

Ce travail peut être mené en classe entière avec un vidéoprojecteur, ou sous forme de devoir avec un support papier.[9]

On donne ci-dessous un exemple de telles collections[10] ; il est intéressant d'y « glisser des intrus » pour entraîner le sens visuel des élèves qui peuvent appuyer leurs démarches sur des valeurs connues (blanc, noir, gris moyen), la symétrie voire une palette de référence.[11]

8 Le fichier geogebra de cette figure, ainsi que d'autres documents, est disponible à l'adresse suivante : http://igmaths.infos.st/spip/spip.php?article204

9 **Attention**, certaines photocopieuses et imprimantes laser transforment les niveaux de gris en trames plus ou moins réussies et généralement inappropriées par rapport au but visé.

10 L'exemple proposé ici est volontairement trop abondant et inclut des dégradés et fonctions assez peu évidents.

11 Les dégradés peuvent être fabriqués avec un tableur (voir l'activité Photo et tableur) ou avec un petit programme.

N°	Dégradés	Fonctions de x
1		2 fois la distance entre $\frac{1}{2}$ et x
2		x
3		x^2
4		$1-x$
5		$\sqrt{x}$
6		$4x(1-x)$
7		$2x$ sur $[0;\frac{1}{2}]$ et $2-2x$ sur $[\frac{1}{2};1]$
8		Inconnu ou x^3
9		Inconnu ou $6x^2(1-x)$

8. Le seuillage

Le « **seuillage** » consiste à mettre à 0 (noir) tous les pixels ayant un niveau de gris inférieur à une certaine valeur. Il permet de mettre en évidence des formes ou des objets dans une image.

C'est encore une fois l'occasion d'écrire un algorithme dans lequel l'instruction conditionnelle SI ... ALORS ... SINON ...[12] sera utile.

Question : à quoi ressemble le dégradé correspondant à la fonction « seuil » ?

Prolongement : seuillage « haut et bas ».

9. L'assombrissement/éclaircissement

On cherche à assombrir une photo numérique (en niveaux de gris) trop claire. On commence par faire un « cahier des charges » :

Pour assombrir la photo, il faut agir sur les niveaux de gris des pixels de sorte que :

- le noir reste noir
- le blanc reste blanc
- le gris final doit être plus sombre que le gris initial
- respect des contrastes : si la zone A initiale est plus foncée que la zone B initiale, alors la zone A finale doit être plus foncée que la zone B finale

12 IF THEN ELSE selon les langages ...

On commence par traduire ce cahier des charges en termes mathématiques :

On cherche une fonction f :
- croissante
- qui agit sur l'intervalle [0;1]
- qui laisse 0 « invariant » ($f(0)=0$)
- qui laisse 1 invariant
- telle que $f(x)\leq x$ pour tout x

Cette partie peut être menée en classe entière sous forme de dialogue avec la classe.

Les élèves peuvent proposer la fonction carré mais aussi la fonction « moitié » (elle ne respecte pas l'un des critères) voire, pour les plus aguerris, la fonction cube.

Il est à ce point tout naturel de chercher l'**éclaircissement d'une image** trop sombre ; on peut passer par l'étape « cahier des charges » ou considérer qu'il s'agit de l'opération inverse. Les élèves arriveront naturellement à la racine carrée voire, pour les plus aguerris, à $f(x)=x(2-x)$.

On peut enfin se demander si l'éclaircissement (fourni par la fonction racine) est vraiment l'action réciproque de l'assombrissement (fourni par la fonction carré). Cela est exact mathématiquement, mais ne fonctionne pas dans les faits : la mise en œuvre pratique de chacune des transformations va passer par une partie entière afin de coder les nombres comme des entiers compris entre 0 et 255. On pourra vérifier ce fait en créant l'image « différence » : elle contient des valeurs très faibles (0 à 4, c'est-à-dire presque noir) mais pas toutes nulles.

Cela peut faire l'objet d'un problème ouvert et d'un travail de groupe avec exposé oral devant la classe.[14]

10. Niveau Terminale : l'accentuation du contraste

Nous allons à présent mettre à profit un des points forts du programme de Terminale STD2A, à sa voir la fonction « cube » et les polynômes du troisième degré.

a / Recherche d'une fonction qui accentue le contraste.

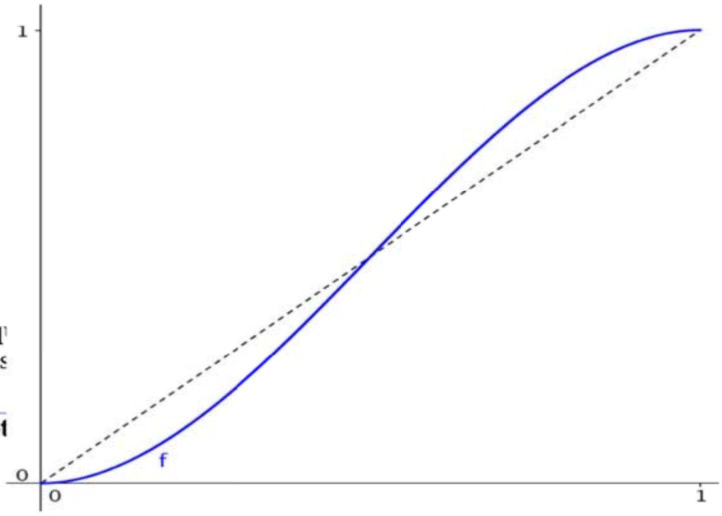
Soit en termes de cahier des charges :
- le blanc doit rester blanc,
- le noir doit rester noir,
- les nuances proches du noir doivent être assombries,
- les nuances proches du blanc doivent être éclaircies.

Dans un premier temps, il s'agit de traduire ces exigences en termes mathématiques : $f(0)=0$, $f(1)=1$,

et pour $0<x<½$: $f(x)<x$,

et pour $½<x<1$: $f(x)>x$.

(on peut admettre ou faire deviner que ces



13 En infographie on a rarement des solutions « uniq

14 On sensibilise ainsi les élèves au fait que la success celle-ci.

exigences vont obliger à avoir $f(½)=½$, c'est-à-dire que le gris moyen sera inchangé)[15].

On peut demander aux élèves de tracer « à la main » une fonction qui répond au cahier des charges.

On peut ajouter au cahier des charges que la courbe doit admettre une tangente horizontale en 0 et en 1.

Dans un deuxième temps on donne la feuille de calcul formel suivante[16] et on demande la commenter, puis de justifier que la fonction polynôme de degré 3 convient.

```
(%i1) f(x):=a*x^3+b*x^2+c*x+d;
(%o1) f(x):=a x^3+b x^2+c x+d

(%i2) linsolve([f(0)=0, f(1)=1, f(1/2)=1/2, 3*a+2*b+c=0], [a,b,c,d]);
(%o2) [a=-2,b=3,c=0,d=0]
```

Enfin, on peut tenter d'appliquer plusieurs fois cette fonction (ou transformation) ; on aboutit à un seuillage au niveau 50%.

On peut envisager cette séance au vidéoprojecteur en classe entière.

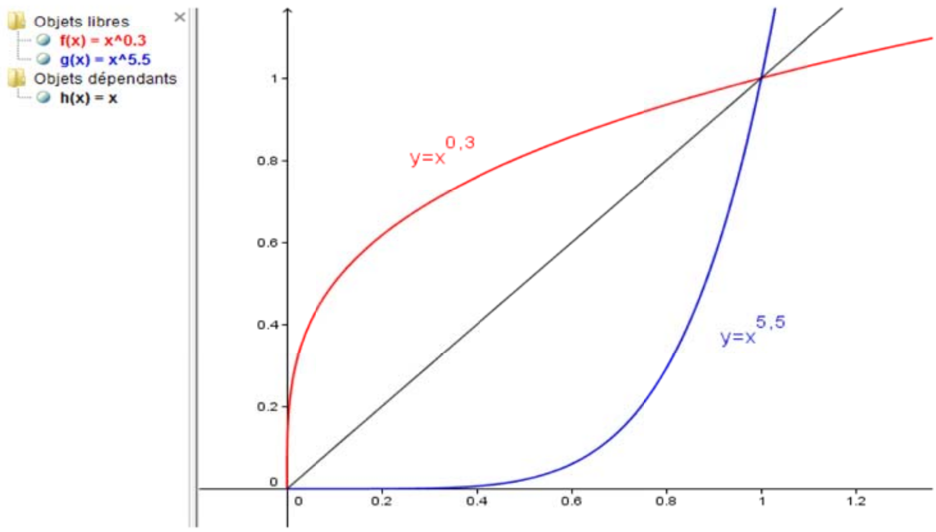
b / Éclaircissement et fonction Gamma

Nous avons vu dans les paragraphes précédents que l'on représente le niveau de gris de chaque pixel d'une image à l'aide d'un réel x appartenant à l'intervalle $[0;1]$, et que l'on peut appliquer diverses transformations (ou fonctions) sur ces nombres. En imagerie ces fonctions sont nommées « fonctions de transfert ».

On utilise souvent comme « fonction de transfert » la fonction f définie sur $[0;1]$ qui à x associe $f(x)=x^{\gamma}$, avec $\gamma>0$.

Le résultat obtenu est un éclaircissement ou un assombrissement de l'image.

En effet la fonction f est, selon la position de γ par rapport à 1, convexe ou concave.



On a aussi, pour tout x appartenant à $[0;1]$, l'égalité : $(x^{\gamma})^{\frac{1}{\gamma}} = x$.

15 Une fonction de contraste basée sur un autre « seuil » que ½=50% est bien sûr possible, mais sera plus compliquée.

16 Ici réalisée avec Maxima, un travail similaire est tout à fait possible avec Xcas :

```
f:= (x)->a*x*x*x+b*x*x+c*x+d;
linsolve([f(0)=0,f(1)=1,f(1/2)=(1/2),(function_diff(f))(0)=0],[a,b,c,d]);
```

Donc, en théorie, si l'on applique à l'image successivement la transformation associée à g, puis celle associée à $\frac{1}{\gamma}$ on devrait revenir à l'image initiale... sous réserve d'ignorer la discrétisation (voir le paragraphe correspondant).

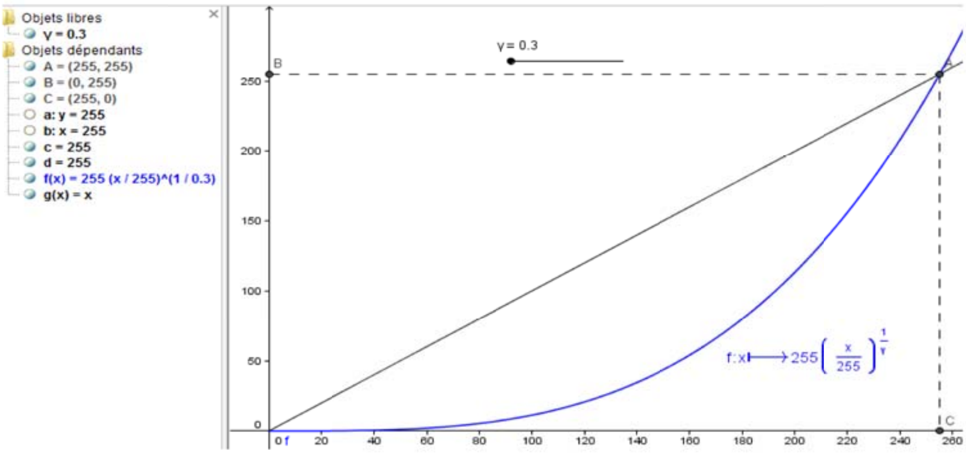
Question : en pratique, que se passe-t-il si on code l'intensité lumineuse (ou niveau de gris) i avec un entier appartenant à [0;255] ?

Réponse : la fonction de transfert adéquate est définie par :

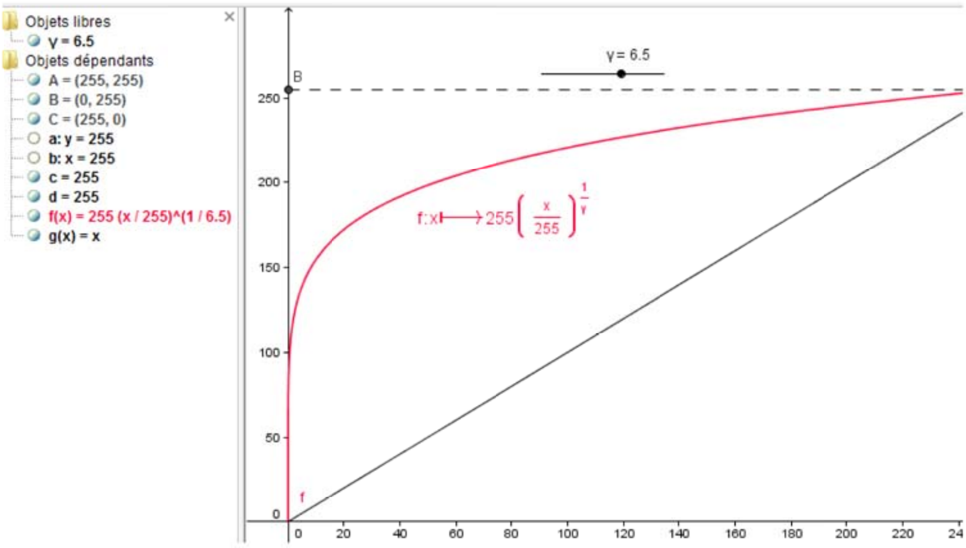
$$f(i)=255.\mathrm{Ent}\left[\left(\frac{i}{255}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right] \text{ avec } \gamma>0 \text{ .}$$

Activité, étape 1 : les élèves peuvent expérimenter l'aspect de la courbe représentative de la fonction *f* selon les valeurs de γ, en utilisant un logiciel (ici GeoGebra).

Ci-contre, avec $\gamma=0{,}3$:



Puis, avec $\gamma=6{,}5$:

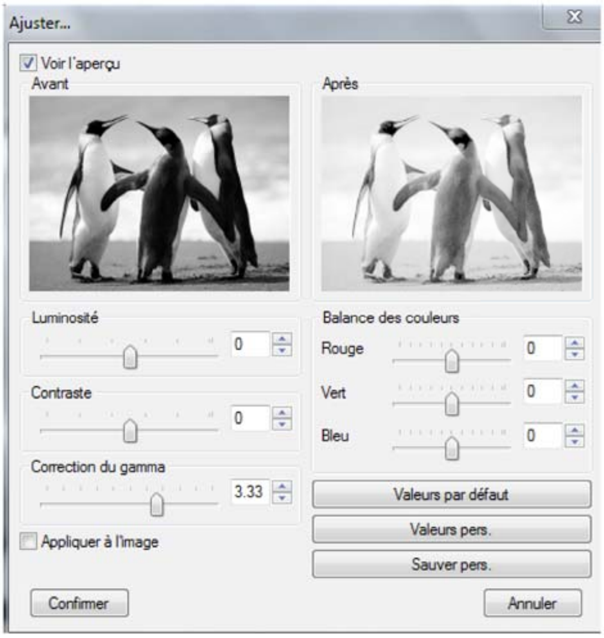


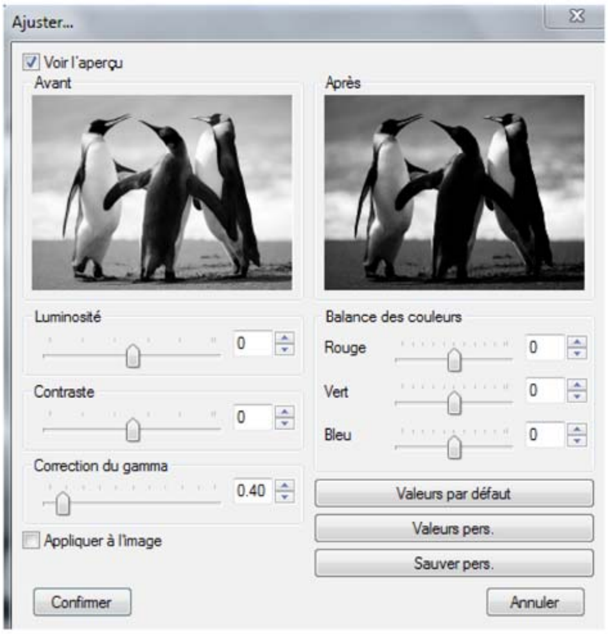
Questions :

a. Suivant la valeur γ, comment se situe la courbe par rapport à la droite d'équation $y=x$?

b. Quel sera l'effet sur les niveaux de gris, suivant les valeurs de γ ?

Activité, étape 2 : On ouvre une photo avec un logiciel de visualisation et de traitement d'images (XnView, ACDSee, The Gimp, GwenView, etc.). Suivant la valeur de γ, on éclaircit ou assombrit l'image.





Activité, étape 3 : Se pose maintenant la question suivante : si on applique à une image la fonction associée à une valeur de γ donnée, puis la fonction associée à $1/\gamma$, obtient-on l'image initiale ?

On fait l'essai avec l'image suivante :

On prend $\gamma = 0{,}25$. On obtient l'image transformée suivante qui est normalement éclaircie :

Sur cette image, on applique la transformation associée à $\gamma = 4$. On obtient l'image suivante :

La composée des deux transformations permet de revenir à une image dont les niveaux de gris sont apparemment identiques à ceux de l'image initiale. Comme la mise en œuvre évoquée précédemment nécessite le recours à la fonction partie entière, une première fois pour éclaircir, puis une seconde fois pour assombrir, des erreurs d'arrondi surviennent. On peut le vérifier en créant l'image « différence » : elle contient des nombres très petits (compris entre 0 et 4), assimilés à du noir, mais en normalisant le résultat on perçoit très bien le « bruit » lié à la discrétisation.