Lois à densité

Loi à densité

Définitions

Si X est une variable aléatoire qui à chaque issue d'un univers Ω associe un élément de l'intervalle I, et si f est une fonction (continue ? positive ?) définie sur I, on dit que X suit la **loi de densité** f et que f est la **fonction de densité** de la loi de X si, pour tout intervalle J contenu dans I, la probabilité de l'événement $\{X \in J\}$ est

Loi à densité

Définitions

Si X est une variable aléatoire qui à chaque issue d'un univers Ω associe un élément de l'intervalle I, et si f est une fonction (continue ? positive ?) définie sur I, on dit que X suit la **loi de densité** f et que f est la **fonction de densité** de la loi de X si, pour tout intervalle J contenu dans I, la probabilité de l'événement $\{X \in J\}$ est

l'aire de l'ensemble des points de coordonnées $(x; y)$ telles que $x \in J$ et $0 \leqslant y \leqslant f(x)$.

(*définition générale en S et ES/L ; uniquement pour la loi uniforme en STI2D et STL*)

Loi uniforme : espérance

$$E(X) = \int_a^b \frac{t}{b-a}\mathrm{d}t = \frac{1}{b-a}\left[\frac{t^2}{2}\right]_a^b = \frac{a+b}{2}.$$

On peut observer à cette occasion que la définition de l'espérance par la formule $E(X) = \displaystyle\int_a^b t\, f(t)\mathrm{d}t$ constitue un prolongement au cas continu de la définition de l'espérance d'une variable aléatoire discrète.

Représentation graphique (lien)

Lois exponentielles (S, STI2D, STL) - Espérance

L'**espérance** de X est la limite quand x tend vers $+\infty$ de $\displaystyle\int_0^x \lambda t\, \mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{d}t$.

Pour calculer cette intégrale, on peut :

Lois exponentielles (S, STI2D, STL) - Espérance

L'**espérance** de X est la limite quand x tend vers $+\infty$ de $\displaystyle\int_0^x \lambda t\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{d}t$.

Pour calculer cette intégrale, on peut :

- chercher une primitive de la fonction $t \longrightarrow t\,\mathrm{e}^{-\lambda t}$ de la forme $t \longrightarrow (at+b)\mathrm{e}^{-\lambda t}$

Lois exponentielles (S, STI2D, STL) - Espérance

L'**espérance** de X est la limite quand x tend vers $+\infty$ de $\displaystyle\int_0^x \lambda t\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{d}t$.

Pour calculer cette intégrale, on peut :

- chercher une primitive de la fonction $t \longrightarrow t\,\mathrm{e}^{-\lambda t}$ de la forme $t \longrightarrow (at+b)\mathrm{e}^{-\lambda t}$
- calculer la dérivée de la fonction g définie sur $[0,+\infty[$ par : $g(t) = t\,\mathrm{e}^{-\lambda t}$ et utiliser $\displaystyle\int_0^x g'(t)\mathrm{d}t = g(x)$

Lois exponentielles (S, STI2D, STL) - Espérance

L'**espérance** de X est la limite quand x tend vers $+\infty$ de $\displaystyle\int_0^x \lambda t\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{d}t$.

Pour calculer cette intégrale, on peut :

- chercher une primitive de la fonction $t \longrightarrow t\,\mathrm{e}^{-\lambda t}$ de la forme $t \longrightarrow (at+b)\mathrm{e}^{-\lambda t}$
- calculer la dérivée de la fonction g définie sur $[0,+\infty[$ par : $g(t) = t\,\mathrm{e}^{-\lambda t}$ et utiliser $\displaystyle\int_0^x g'(t)\mathrm{d}t = g(x)$
- expliquer éventuellement sur cet exemple le principe de l'intégration par parties ...

(*voir d.r. page 44*)

Loi normale centrée réduite : introduction

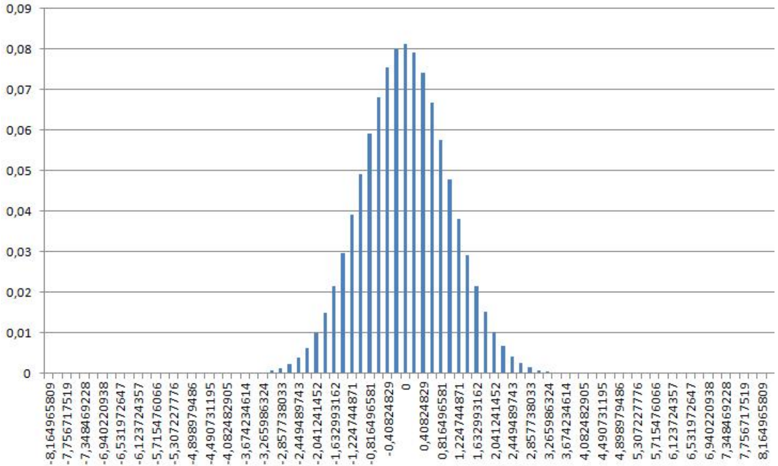
Programme (S, ES/L) :

"Pour introduire la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$, on s'appuie sur l'observation des représentations graphiques de la loi de la variable aléatoire $Z_n = \dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$, où X_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$, et cela pour de grandes valeurs de n et une valeur de p fixée entre 0 et 1."

(L'introduction de Z_n peut être justifiée par le fait que ses paramètres ne dépendent pas de ceux de X_n.)

Loi normale centrée réduite : introduction

$p = 0.4$; $n = 100$



Loi normale centrée réduite : introduction

Théorème de Moivre-Laplace (au progr. de TS mais admis !)
Avec les notations précédentes, pour tous réels a et b,

$$\lim_{n\to+\infty} P(a \leqslant Z_n \leqslant b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x.$$

(Z_n converge en loi vers la loi $\mathcal{N}(0,1)$)

Conséquence
La loi binomiale $\mathcal{B}(n\,;\,p)$ peut être approchée par la loi normale $\mathcal{N}(np\,;\,np(1-p))$, c'est-à-dire par la loi normale de même espérance et même écart type.

Loi normale centrée réduite

Démonstration exigible en TS

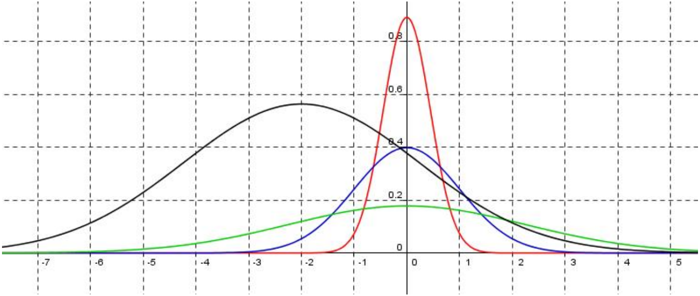
Démontrer que, pour $\alpha \in]0\,;\,1[$, il existe un unique réel positif u_α tel que $P\left(-u_\alpha \leqslant X \leqslant u_\alpha\right) = 1 - \alpha$ lorsque X suit la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.
La démonstration utilise le théorème des valeurs intermédiaires. Voir d.r. pages 8 et 9.

Valeurs approchées à connaître :
$u_{0,05} \simeq 1,96$; $u_{0,01} \simeq 2,58$
c'est-à-dire :
$P\left(-1,96 \leqslant X \leqslant 1,96\right) \simeq 0,95$;
$P\left(-2,58 \leqslant X \leqslant 2,58\right) \simeq 0,99$.

Loi normale

X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ d'espérance μ et d'écart type σ si $\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

Influence de μ et σ :



en rouge : $\mu = 0; \sigma^2 = 0,2$; en bleu : $\mu = 0; \sigma^2 = 1$
en vert : $\mu = 0; \sigma^2 = 5$; en noir : $\mu = -2; \sigma^2 = 0,5$

Loi normale

Si X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ et si Z est la variable centrée réduite associée, alors :

Loi normale

Si X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ et si Z est la variable centrée réduite associée, alors :

- $P(X \in [\mu - \sigma\,;\, \mu + \sigma]) = p(-1 \leqslant Z \leqslant 1) = 2\Pi(1) - 1 \simeq 0,6827$

Loi normale

Si X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ et si Z est la variable centrée réduite associée, alors :

- $P(X \in [\mu - \sigma\,;\, \mu + \sigma]) = p(-1 \leqslant Z \leqslant 1) = 2\Pi(1) - 1 \simeq 0,6827$
- $P(X \in [\mu - 2\sigma\,;\, \mu + 2\sigma]) = p(-2 \leqslant Z \leqslant 2) = 2\Pi(2) - 1 \simeq 0,9545$

Loi normale

Si X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ et si Z est la variable centrée réduite associée, alors :

- $P(X \in [\mu - \sigma\,;\,\mu + \sigma]) = p(-1 \leqslant Z \leqslant 1) = 2\Pi(1) - 1 \simeq 0,6827$
- $P(X \in [\mu - 2\sigma\,;\,\mu + 2\sigma]) = p(-2 \leqslant Z \leqslant 2) = 2\Pi(2) - 1 \simeq 0,9545$
- $P(X \in [\mu - 3\sigma\,;\,\mu + 3\sigma]) = p(-3 \leqslant Z \leqslant 3) = 2\Pi(3) - 1 \simeq 0,9973$

$[\mu - \sigma\,;\,\mu + \sigma]$ est la plage de normalité à 68 %.
$[\mu - 2\sigma\,;\,\mu + 2\sigma]$ est la plage de normalité à 95 %.
$[\mu - 3\sigma\,;\,\mu + 3\sigma]$ est la plage de normalité à 99,7 %.

123 sigma (lien)

Loi normale

<u>Introduction différente en STI2D et STL</u> :

D'après le théorème de la limite centrale (dont le théorème de Moivre-Laplace est un cas particulier), si U_1, U_2, ... , U_n sont n variables aléatoires indépendantes et de même loi (ici : loi uniforme), d'espérance m et d'écart-type σ, alors la variable $X_n = \dfrac{U_1 + U_2 + ... + U_n}{n}$ suit approximativement, pour n assez grand, la loi normale de même espérance et même écart-type, c'est-à-dire : $\mathcal{N}\left(m\,;\,\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

Simulation (lien)