

Les nombres algébriques

On appelle *nombres algébriques* les solutions d'équations polynômiales à coefficients entiers (certains disent rationnels, mais c'est pareil).

Par exemple $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est un nombre algébrique, solution de $x^2 = x + 1$.

Question : $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ est-il algébrique ?

Posons $x = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$

$x - \sqrt{5} = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ et donc $x^2 - 2x\sqrt{5} = 2\sqrt{6}$

De $x^2 - 2\sqrt{6} = 2x\sqrt{5}$, on tire $x^4 - 4x^2\sqrt{6} + 24 = 20x^2$

Puis $x^4 - 20x^2 + 24 = 4x^2\sqrt{6}$

... et on élève au carré. La réponse est oui.