LES CAS D'ISOMÉTRIE DES TRIANGLES: UN OUTIL DE DÉMONSTRATION ADAPTÉ AU COLLÈGE

Pascale Nikolski (formatrice à l'INSPE de Paris), pour Guillaume Didier (formateur à l'INSPE de Paris et enseignant de mathématiques en collège dans l'académie de Versailles)

Lecture du document d'accompagnement

éduscol Informer et accompagner les professionnels de l'éducation CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

Espace et géométrie

Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer

Point de désaccord avec
le groupe Irem et Euclide (Livre I) !

Configurations usuelles

Le **parallélogramme**, déjà introduit au cycle 3, est revisité en classe de 5ᵉ, en dégageant ses propriétés en liaison avec la symétrie centrale. Les propriétés caractéristiques des quadrilatères particuliers peuvent être admises et utilisées dans certaines démonstrations, mais ne sont pas un attendu de fin de cycle.

- Les **cas d'égalité des triangles** sont admis dès la 5e, essentiellement pour justifier qu'un triangle peut être construit connaissant certains de ses éléments métriques. Leur emploi dans certaines démonstrations doit demeurer très modeste. **Les triangles semblables** fournissent un vocabulaire commode dans les différents énoncés du théorème de Thalès.
- Sur les angles, les notions du cycle 3 sont entretenues et complétées. Il est utile de définir l'angle plat et de préciser sa mesure. La notion d'angles alternes-internes offre un vocabulaire commode pour donner une caractérisation angulaire du parallélisme. La **somme des mesures des angles d'un triangle** peut être exploitée notamment pour des problèmes de construction ou pour établir une propriété géométrique d'une figure.

Réflexion autour de la situation d'introduction

ESPACE ET GÉOMÉTRIE (suite)

Géométrie plane

Les cas d'égalité des triangles sont présentés et utilisés pour résoudre des problèmes. Le lien est fait avec la construction d'un triangle de mesures données (trois longueurs, une longueur et deux angles, deux longueurs et un angle). Le théorème

Etape préalable à l'introduction des cas d'égalité : comprendre que pour construire un triangle on a besoin d'uniquement trois données bien choisies.

Situation d'émetteur-récepteur avec des triangles

Émetteur :

Écrit un message permettant de construire à l'identique le triangle qui lui a été donné

Récupération des messages et distribution des messages par le professeur

Récepteur :

Reçoit un message puis, suit ce message pour construire un triangle.

Comparer chaque triangle construit avec le triangle de l'émetteur

INTRODUCTION PAR SITUATION D'ÉMETTEUR-RÉCEPTEUR

Choix pédagogiques :

- Travail en binômes, chaque binôme étant d'abord émetteur puis récepteur.
- Les élèves ne doivent pas avoir tous le même triangle.
- Les laisser choisir leur triangle provoque la présence de triangles particuliers qui ne sont pas bien adaptés à notre objectif.
- D'où le choix de fixer 4 triangles différents à répartir sur l'ensemble des binômes.
- Activité à cheval sur deux séances pour permettre à l'enseignant(e) d'organiser la redistribution des messages et de choisir les messages qui seront étudiés collectivement.

Mise en œuvre dans la classe

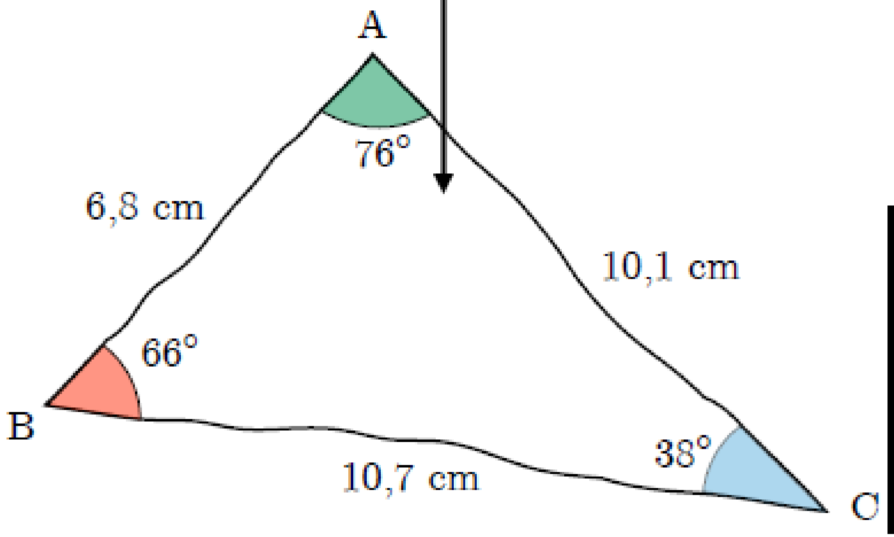
Brochure p98, p251 et p252

Mesures choisies pour les triangles					
AB	BC	AC	$\widehat{BAC}$	$\widehat{ABC}$	$\widehat{BCA}$
6,8 cm	8 cm	7,1 cm	70°	57°	53°
5,6 cm	7,4 cm	6,1 cm	78°	54°	48°
6,8 cm	10,7 cm	10,1 cm	76°	66°	38°
5 cm	7,1 cm	5,8 cm	82°	54°	44°

Les 3 angles et les 3 longueurs sont donnés

<u>Emetteur 1 :</u>

On considère le triangle ABC suivant :



Ecrire un texte <u>contenant le moins de données possibles</u>.

En lisant ton texte, une personne doit pouvoir construire ce triangle.

<u>Récepteur 1 :</u>

Construire le triangle contenu dans le message reçu.

Y-a-t-il des données dans le texte que tu as reçu que tu n'as pas utilisées pour construire le triangle ? Si oui, lesquelles ?

Y-a-t-il des données dans le texte que tu as reçu qui t'ont manquées pour construire le triangle ? Si oui, lesquelles ?

Pour atteindre l'objectif d'introduire les cas d'égalité comme des théorèmes

Conseils pour la sélection des messages :

- Illustrer les 3 cas d'égalité (impératif)
- Illustrer l'importance du positionnement de l'angle pour le cas CAC (impératif)
- Illustrer des messages comportant plus que trois données (impératif)
- Illustrer le « cas AAA » (fortement conseillé)
- Analyser deux messages pour un même triangle (fortement conseillé)
- Illustrer tous les triangles dans la classe (conseillé)

Remarque :

Si la richesse des messages n'est pas au rendez-vous, prendre des messages des années précédentes ou en inventer. Puis, demander à la classe de les analyser.

Trace écrite :

Tout triangle est défini à partir de ses trois angles et des longueurs de ses trois côtés.
La construction d'un triangle est possible lorsque l'on connaît

- soit les longueurs de deux côtés et l'angle formé par ces deux côtés,
- soit deux angles et la longueur du segment joignant les sommets de ces deux angles,
- soit les longueurs des trois côtés.

Définition :

Deux triangles sont dits isométriques lorsque leurs angles sont égaux deux à deux et lorsque les côtés opposés aux angles égaux sont de même longueur.

D'après les trois méthodes de construction d'un triangle, pour affirmer que deux triangles sont isométriques, il ne semble pas nécessaire de comparer les trois angles et les trois longueurs des côtés des deux triangles.

Mise en œuvre dans la classe

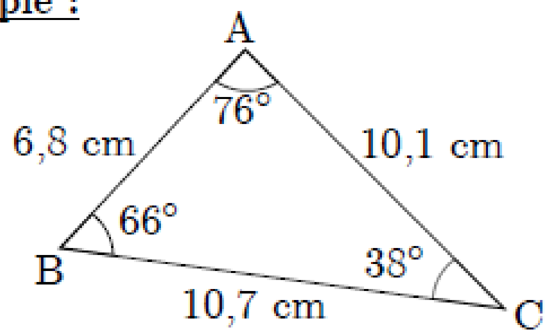
Définition :

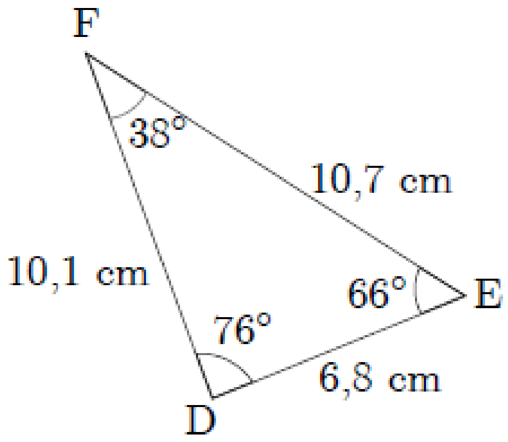
Soient deux triangles isométriques.

Deux sommets appartenant chacun à l'un de ces triangles et étant les sommets de deux angles égaux sont dits homologues.

Essentiel et pourtant absent dans les manuels

Exemple :





Les sommets A et D sont homologues.

Les sommets B et E sont homologues.

Les sommets C et F sont homologues.

$$\begin{array}{ccc} A & B & C \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ D & E & F \end{array}$$

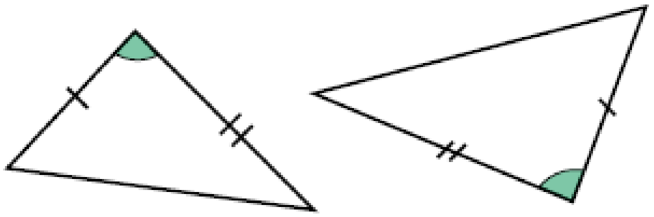
Moyen de contrôle sémiotique

Réflexion autour des théorèmes

Cas d'égalité CAC : ⟵ **Cette notation contient une image mentale**

Si deux triangles ont deux côtés deux à deux de même longueur et si les angles compris entre ces côtés sont égaux alors ces triangles sont isométriques.

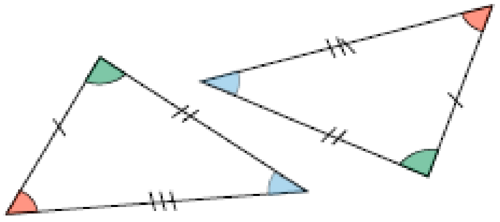
Conditions d'utilisation à vérifier pour pouvoir utiliser ce théorème



Deux triangles ayant deux côtés deux à deux de même longueur et les angles compris entre ces côtés égaux

Théorème

On montre que



deux triangles sont isométriques

Utilité du théorème : Montrer des égalités d'angles et/ou de longueurs

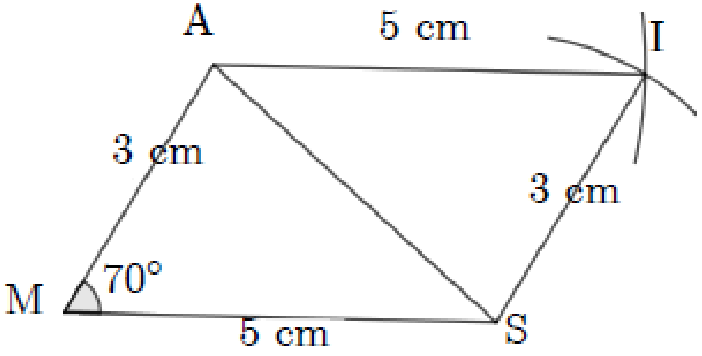
EXEMPLES DE PRODUCTIONS D'ÉLÈVES

CONTRÔLE DE MATHÉMATIQUES

Exercice n°2 :

Soit SAM un triangle tel $MS = 5$ cm, $MA = 3$ cm et $\widehat{AMS} = 70°$ et I un point tel que $SI = 3$ cm, $AI = 5$ cm et M et I sont de part et d'autre de la droite (AS).

1) Construire la figure.
2) Montrer que :
   les triangles SAM et ASI sont isométriques
3) En déduire que $\widehat{ISA} = \widehat{SAM}$.
4) Montrer que : (SI) // (AM).



Analyse *a priori* :

N1 (construction)

N2 (cas d'égalité CCC avec côté en commun)

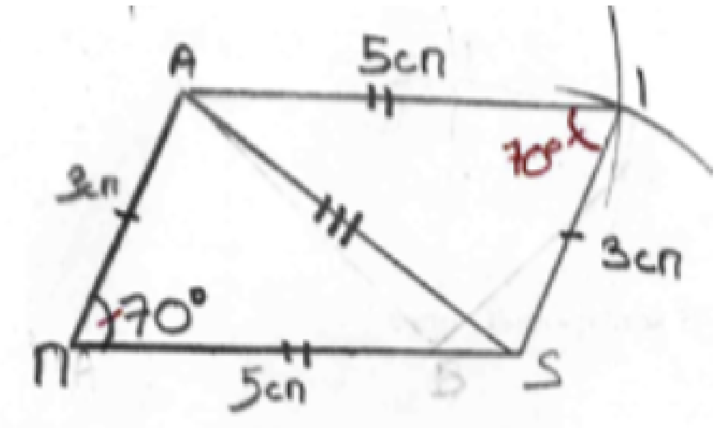
N4 angles alternes-internes

Présence d'un parallélogramme (géométries perceptive/théorique)

ANALYSE DES RÉPONSES À LA QUESTION 1)

Exercice n°2 :

Soit SAM un triangle tel MS = 5 cm, MA = 3 cm et $\widehat{AMS} = 70°$ et I un point tel que SI = 3 cm, AI = 5 cm et M et I sont de part et d'autre de la droite (AS).



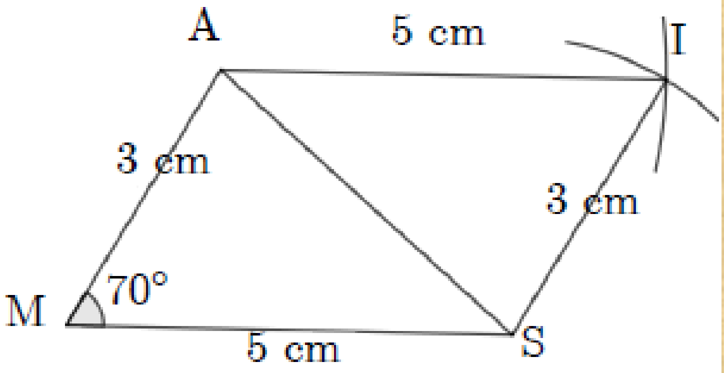
1) Construire la figure.

Question 1	
Construction correcte	25 élèves
Construction incorrecte	1 élève
2 élèves ont codé les deux angles de 70°	

ANALYSE DES RÉPONSES À LA QUESTION 2)

Exercice n°2 :

Soit SAM un triangle tel MS = 5 cm, MA = 3 cm et $\widehat{AMS} = 70°$ et I un point tel que SI = 3 cm, AI = 5 cm et M et I sont de part et d'autre de la droite (AS).

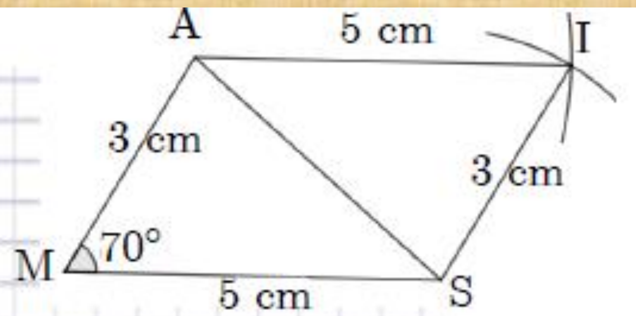


2) Montrer que les triangles SAM et ASI sont isométriques.

La vision du parallélogramme est très présente chez les élèves

Question 2	
Cas CCC	16 élèves
Cas ACA	0 élève
Cas CAC	8 élèves
Aucun	2 élèves

DEUX RÉPONSES À LA QUESTION 2)



Dans les triangles SAM et ASI, on sait que :

- AM = IS = 3 cm
- MS = IA = 5 cm
- $\widehat{AMS} = \widehat{AIS} = 70°$ car MAIS est un parallélogramme car

dans un parallélogramme, les côtés opposés sont parallèles et de même longueurs deux à deux. Aussi, les angles d'un parallélogramme sont égaux deux à deux.

D'après le cas d'égalité CAC, les triangles SAM et ASI sont isométriques.

3/3

2) Dans les triangles SAM et ASI, on a :

AS = AS (côté commun), MS = IA et AM = SI.

SAM D'après le cas d'égalité CCC, les triangles SAM et ASI sont isométiques.

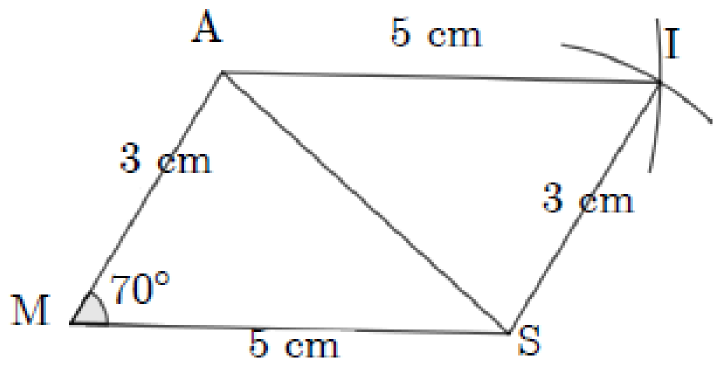
↓↓↓

ASI

ANALYSE DES RÉPONSES À LA QUESTION 3)

<u>Exercice n°2 :</u>

Soit SAM un triangle tel $MS = 5$ cm, $MA = 3$ cm et $\widehat{AMS} = 70°$ et I un point tel que $SI = 3$ cm, $AI = 5$ cm et M et I sont de part et d'autre de la droite (AS).



3) En déduire que $\widehat{ISA} = \widehat{SAM}$.

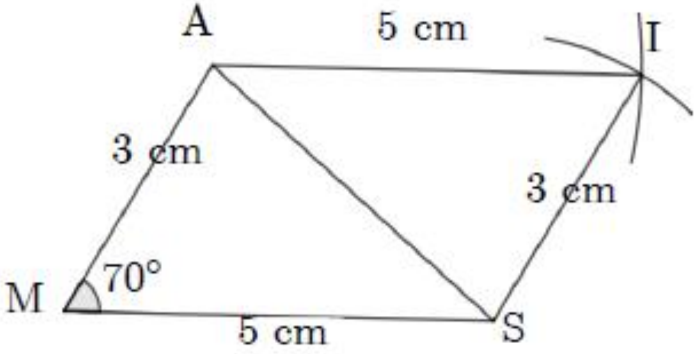
La vision du parallélogramme est très présente chez les élèves

Confusion « Démontrer »/« Mesurer »
Rôles des outils de géométrie

Question 3	
Angles homologues	12 élèves
Angles alternes-internes	5 élèves
Angles mesurés	3 élèves
Pas de justification	2 élèves
Aucune réponse	4 élèves

DES RÉPONSES À LA QUESTION 3)

③ $\widehat{ISA}$ et $\widehat{SAM}$ = 73°



3) Par construction : $\widehat{ISA} = \widehat{SAM}$

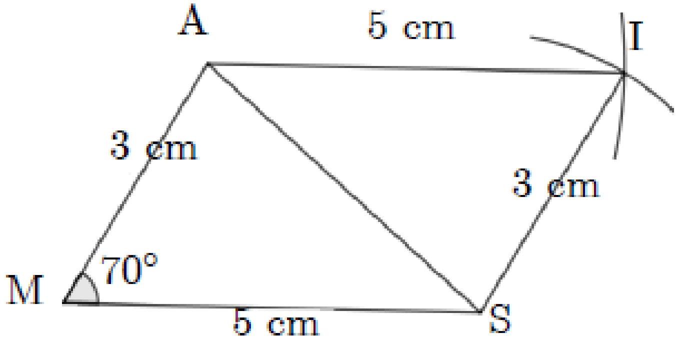
3) D'après la propriété vue en cours disant que les angles alternes-internes sont égaux, $\widehat{ISA} = \widehat{SAM}$.

3) $\begin{array}{ccc} S & A & M \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ A & S & I \end{array}$ les triangles SAM et ASI sont isométriques donc $\widehat{SAM} = \widehat{ASI}$.

ANALYSE DES RÉPONSES À LA QUESTION 4)

Exercice n°2 :

Soit SAM un triangle tel MS = 5 cm, MA = 3 cm et $\widehat{AMS} = 70°$ et I un point tel que SI = 3 cm, AI = 5 cm et M et I sont de part et d'autre de la droite (AS).



4) Montrer que : (SI) // (AM).

Question 4	
Angles alternes-internes	8 élèves
Parallélogrammes	7 élèves
Pas de justification	4 élèves
Aucune réponse	7 élèves

La vision du parallélogramme est très présente chez les élèves → Parallélogrammes

Fin d'exercice ; Enchaînement des questions → Aucune réponse

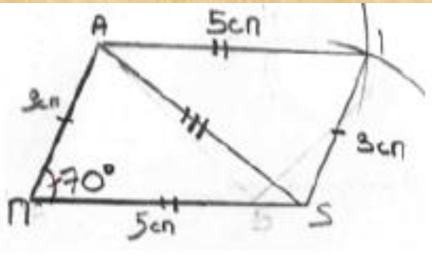
DES RÉPONSES À LA QUESTION 4)

Par construction (SI) et (AM) sont parallèle

4) Commes deux triangles isométriques crée un parrallélogramme et qu'un parallélogramme a des côtés parallèles ont en déduis que (SI) // (AM).

Les angles $\widehat{ISA}$ et $\widehat{SAM}$ sont des angles alternes-internes, (SA) est la sécante des droites (IS) et (AM).
Propriété :
Si deux angles alternes-internes sont égaux, alors

les droites coupées par la sécante sont parrallèles.
Donc : (SI) // (MA).



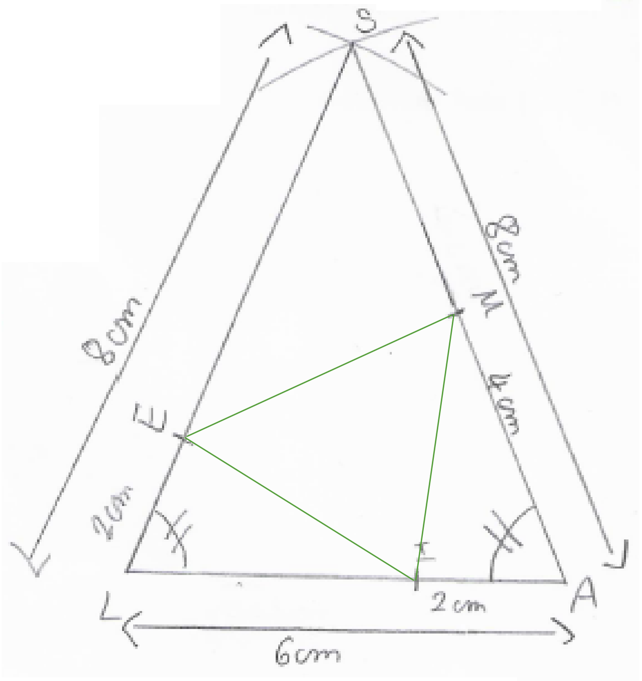
UN AUTRE EXERCICE DU CONTRÔLE DE GUILLAUME…

CONTRÔLE DE MATHÉMATIQUES

Exercice n°3 :

Soit LAS un triangle isocèle en S tel que LA $= 6$ cm et SA $= 8$ cm, E le point appartenant au côté [LS] tel que LE $= 2$ cm, I le point appartenant au côté [AL] tel que AI $= 2$ cm et M le point appartenant au côté [AS] tel que AM $= 4$ cm.

1) Construire la figure.
2) Montrer que $\widehat{SLA} = \widehat{SAL}$.
3) Montrer que les triangles AMI et LIE sont isométriques.
4) En déduire la nature du triangle MIE.



CONCLUSION 1

Retour d'expérience

- La situation d'introduction est vraiment pertinente (mais complexe à gérer)
- La notation ACA, CCC, CAC est une aide pour mémoriser les conditions d'utilisation des cas d'égalité des triangles.
- La notation $\begin{array}{ccc} A & B & C \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ D & E & F \end{array}$ est une aide pour identifier les éléments homologues
- A la fin de la séquence, plus de la moitié des élèves savent bien utiliser les cas d'égalité des triangles comme outil de démonstration.
- Les cas d'égalité sont de très bons outils pour faire apprendre le principe d'une démonstration (vision surface)

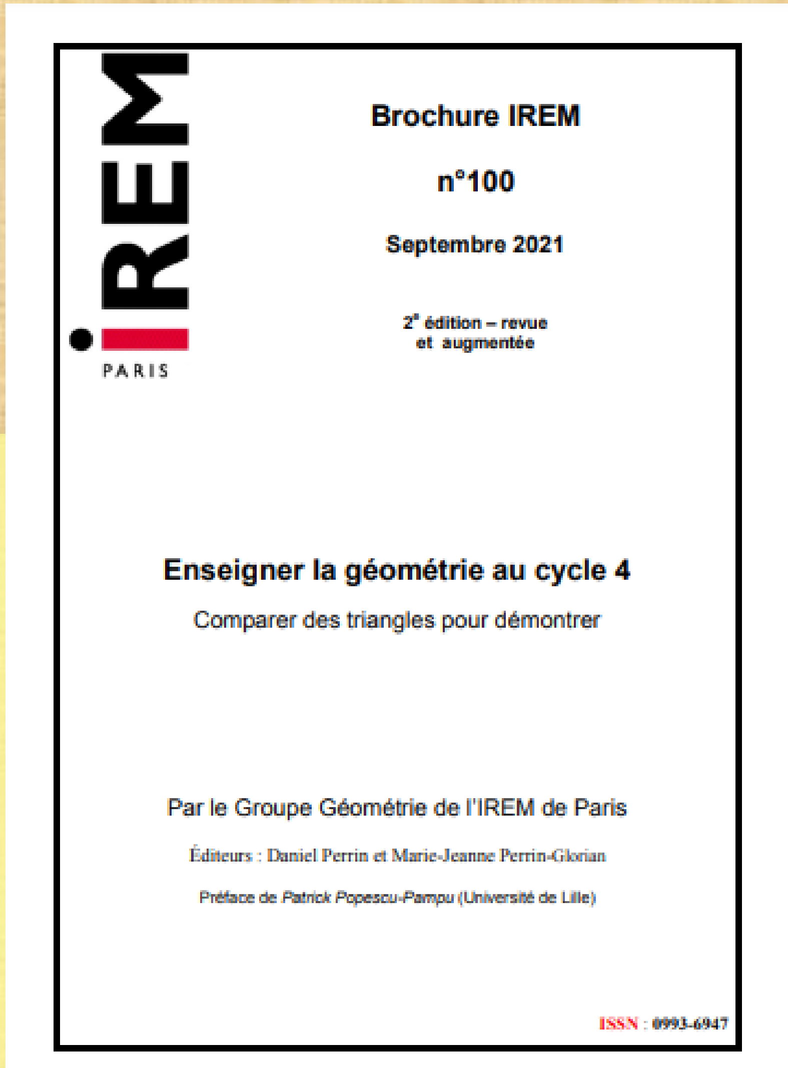
De plus, ce qui précède confirme les difficultés de beaucoup d'élèves à distinguer les données issues de l'énoncé des propriétés qu'on peut en déduire et qui se « voient » sur le dessin. <u>L'utilisation des cas d'isométrie</u> est une aide pour franchir cet obstacle car elle impose et systématise justement la démarche de bien distinguer <u>ce qu'on cherche à montrer</u> (égalité de certaines grandeurs à « insérer » dans des triangles) de <u>ce qu'on sait</u> (égalité d'autres grandeurs de ces triangles).

CONCLUSION 2A

Une ressource majeure :

la brochure n°100 de l'IREM de Paris

- séquence de Guillaume ch.6 p.98-120
- banque de problèmes ch.10 p.183-198



IREM PARIS

Brochure IREM

n°100

Septembre 2021

2e édition – revue et augmentée

Enseigner la géométrie au cycle 4

Comparer des triangles pour démontrer

Par le Groupe Géométrie de l'IREM de Paris

Éditeurs : Daniel Perrin et Marie-Jeanne Perrin-Glorian

Préface de Patrick Popescu-Pampu (Université de Lille)

ISSN : 0993-6947

http://docs.irem.univ-paris-diderot.fr/up/IPS20011.pdf

CONCLUSION 2B

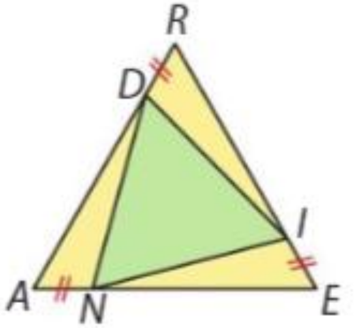
Quand on a compris le principe, on peut adapter certains énoncés de manuels pour que l'égalité des triangles ne soit plus un but (un peu vain) mais un outil pour un but plus intéressant. EXEMPLE

triangle ARE équilatéral + égalités de longueurs codées = triangle vert équilatéral,

Égalité des triangles jaunes

Cahier de maths Indigo 4è

3 MODE EXPERT Dans la figure ci-contre, *ARE* et *DIN* sont des triangles équilatéraux. *D*, *N* et *I* sont des points appartenant respectivement aux segments [*AR*], [*AE*] et [*RE*] tels que *DR* = *IE* = *AN*.

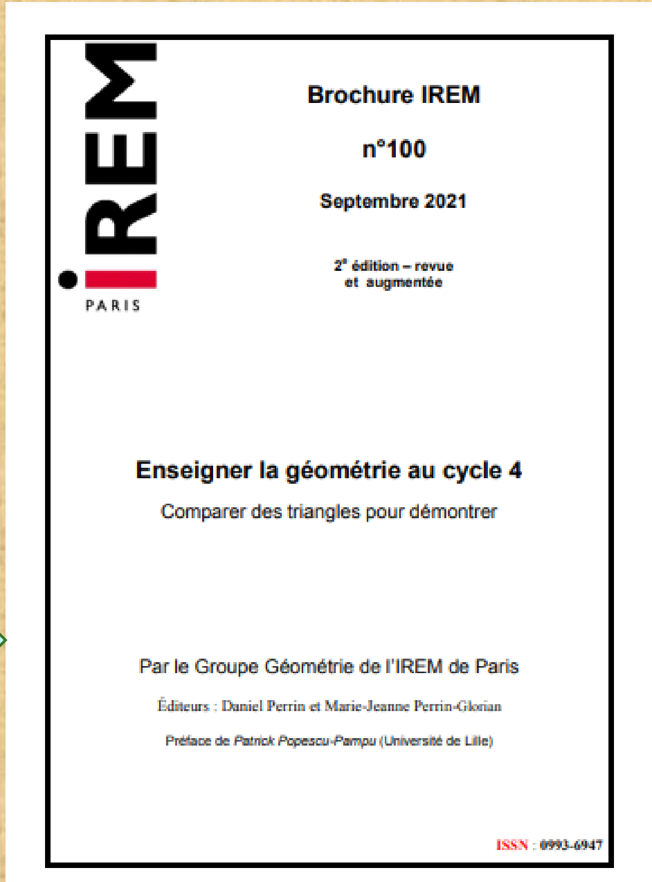


Prouver que les triangles *DRI*, *INE* et *ADN* sont égaux.

CONCLUSION 2C

<u>Pour aller plus loin</u> : les cas d'isométrie permettent de démontrer une grande panoplie de propriétés vues au collège et très souvent admises ; faire plus de démonstrations de cours permettrait aux élèves de mieux comprendre le principe déductif et l'organisation des connaissances mathématiques.

Et pour ça, à nouveau… voir la brochure !


IREM
PARIS

Brochure IREM

n°100

Septembre 2021

2e édition – revue et augmentée

Enseigner la géométrie au cycle 4

Comparer des triangles pour démontrer

Par le Groupe Géométrie de l'IREM de Paris

Éditeurs : Daniel Perrin et Marie-Jeanne Perrin-Glorian

Préface de *Patrick Popescu-Pampu* (Université de Lille)

ISSN : 0993-6947