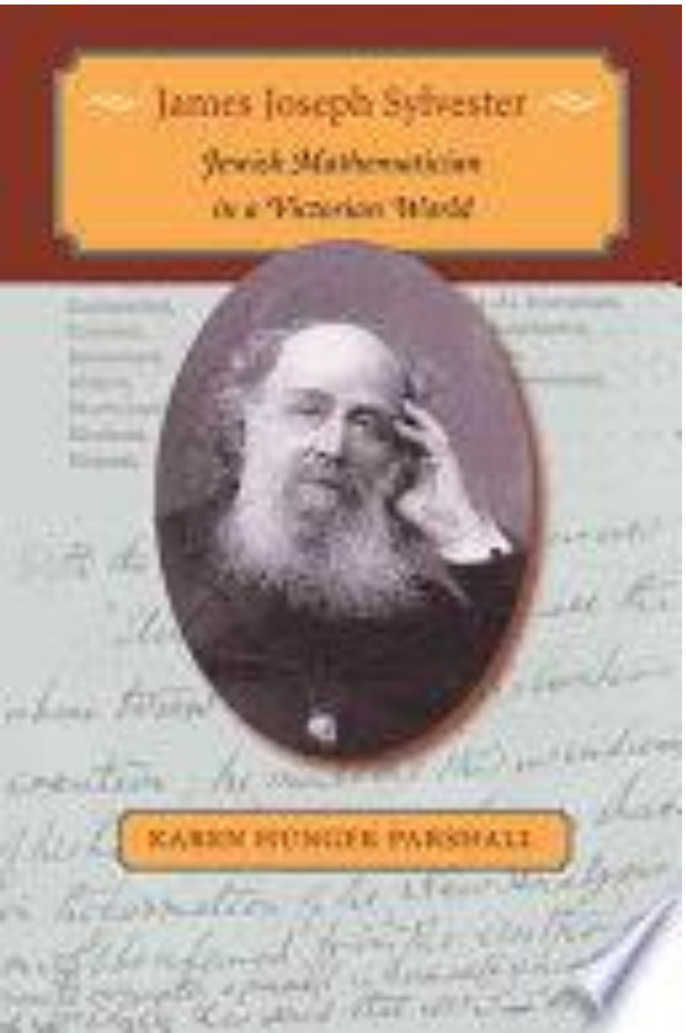
Le théorème de Sylvester

Aperçu des géométries ordonnée, affine, euclidienne du plan



QUESTIONS FOR SOLUTION.

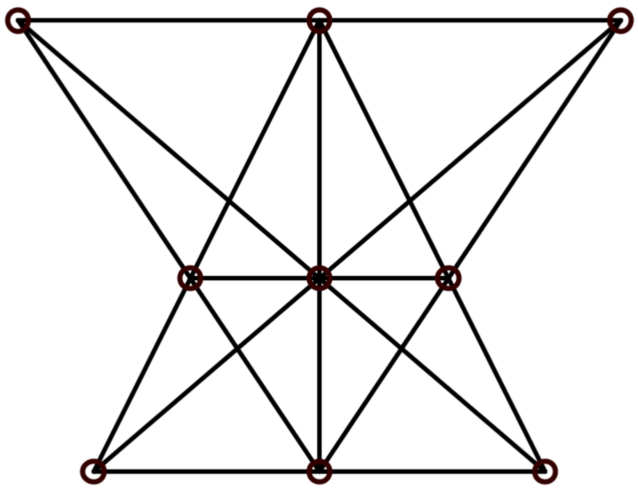
11851. (Professor Sylvester.)—Prove that it is not possible to arrange any finite number of real points so that a right line through every two of them shall pass through a third, unless they all lie in the same right line.

I have a large number of stamps to the value of 5d and 17d only. What is the largest denomination which I cannot make up with a combination of these two different values?

columns. This will not in itself represent a determinant, but is, as it were, a Matrix out of which we may form various systems of determinants by fixing upon a number p, and selecting at will p lines and p columns, the squares corresponding to which may be termed determinants of the pth order. We have, then, the following proposition. The number of [illegible]-

On a new class of theorems (1850)

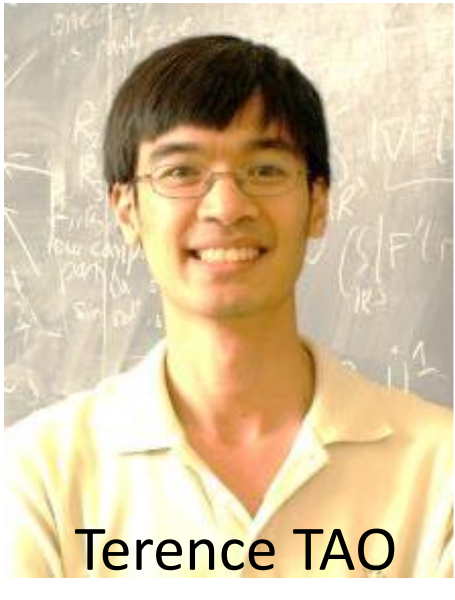
Aux origines du problème



Le problème du verger peut s'écrire ainsi : étant donné une configuration de points du plan, combien au maximum peut-on trouver de droites passant par trois de ces points?

Et maintenant ?

n	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$t_3(n)$	1	2	4	6	7	10	12	16	19	22	26



Terence TAO

La géométrie, inventée par Euclide?

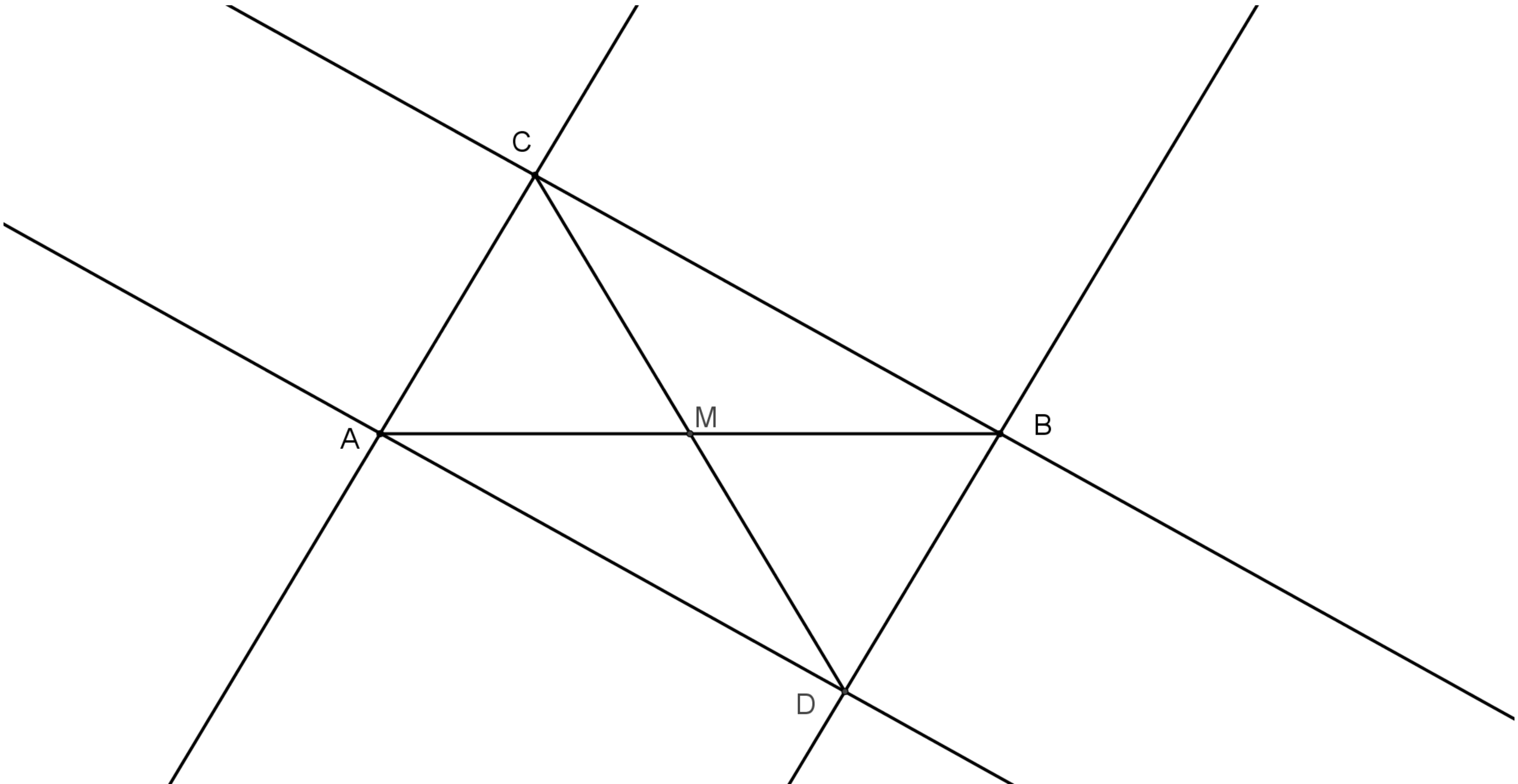
1. Les Eléments d'Euclide comme modèle de manuel scolaire pour des générations
2. Définitions, demandes et notions ordinaires
3. Problème de l'axiome 5
4. La géométrie affine (pas d'axiomes 3 ni 4)
5. La géométrie ordonnée, l'axiome de Pasch (1882)

1. Un segment de droite peut être tracé en joignant deux points quelconques.
2. Un segment de droite peut être prolongé indéfiniment en une ligne droite.
3. Étant donné un segment de droite quelconque, un cercle peut être tracé en prenant ce segment comme rayon et l'une de ses extrémités comme centre.
4. Tous les angles droits sont congruents.
5. Si deux lignes droites sont sécantes avec une troisième de telle façon que la somme des angles intérieurs d'un côté est inférieure à deux angles droits, alors ces deux lignes sont forcément sécantes de ce côté

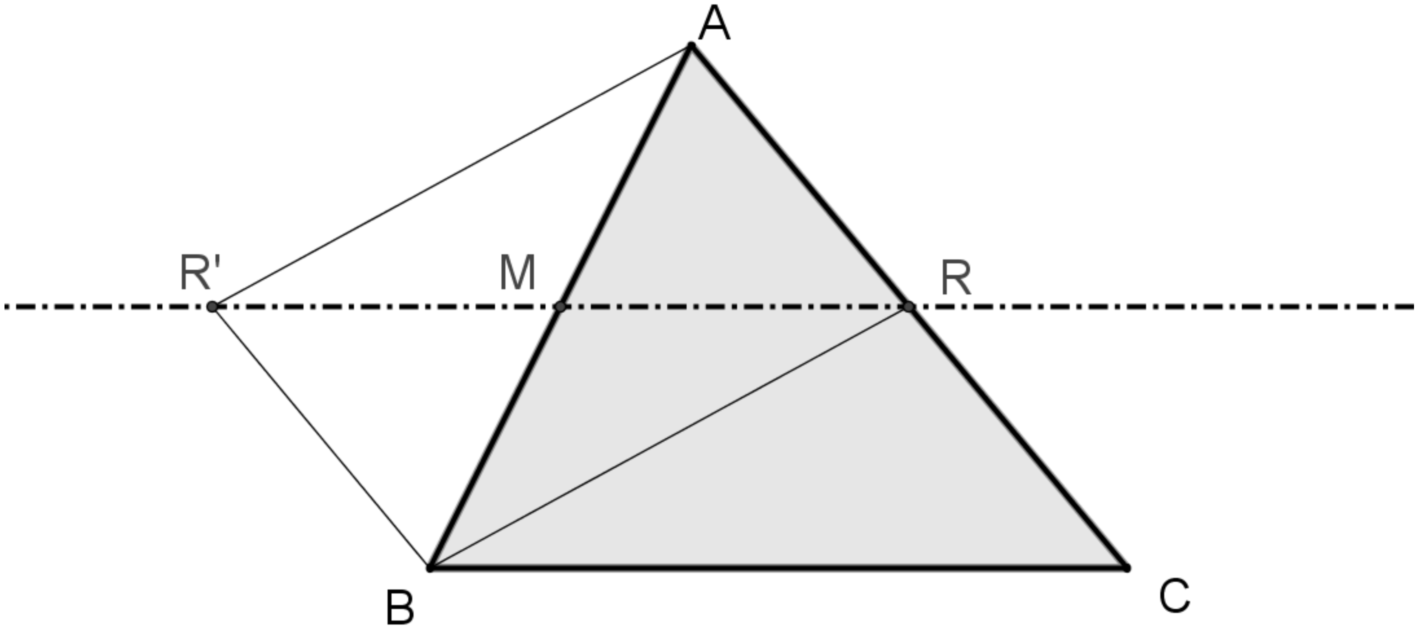
Affine

ou métrique?

Le milieu d’un segment : une affaire de parallélisme et de concours

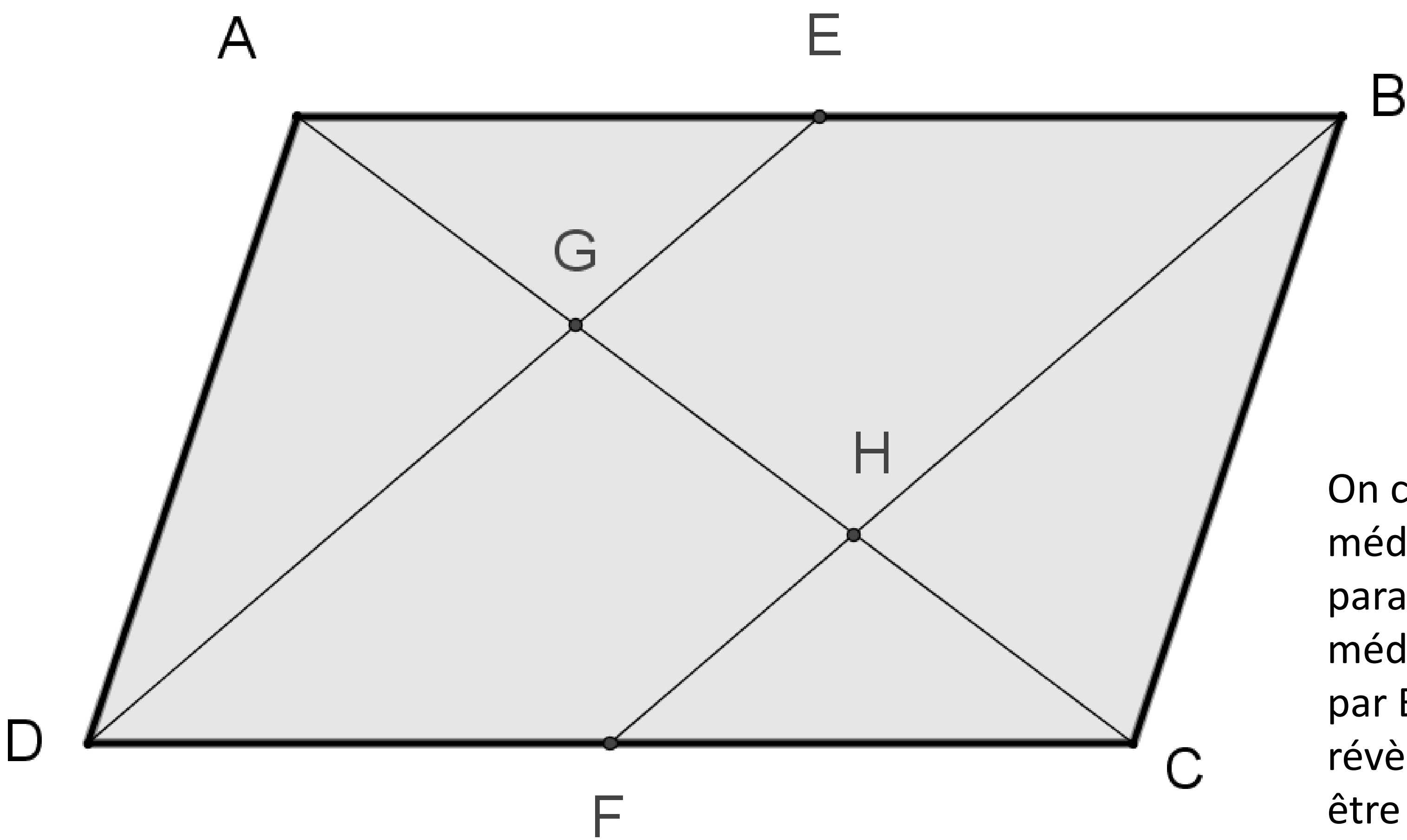


La droite pas encore des milieux



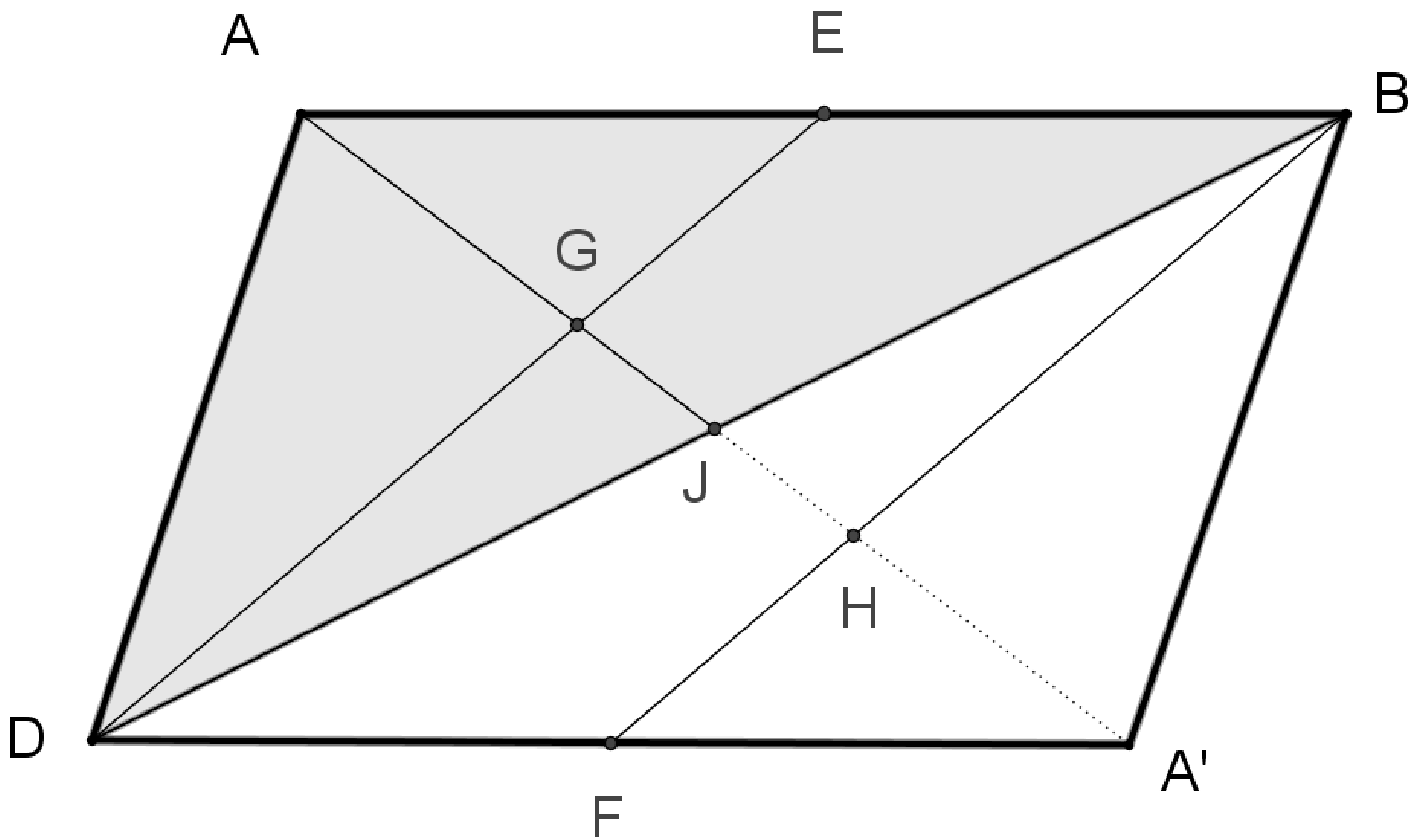
Si une droite passe par le milieu d'un côté d'un triangle
et si elle est parallèle à un autre côté,
alors elle passe par le milieu du troisième côté.

La médiane et la diagonale

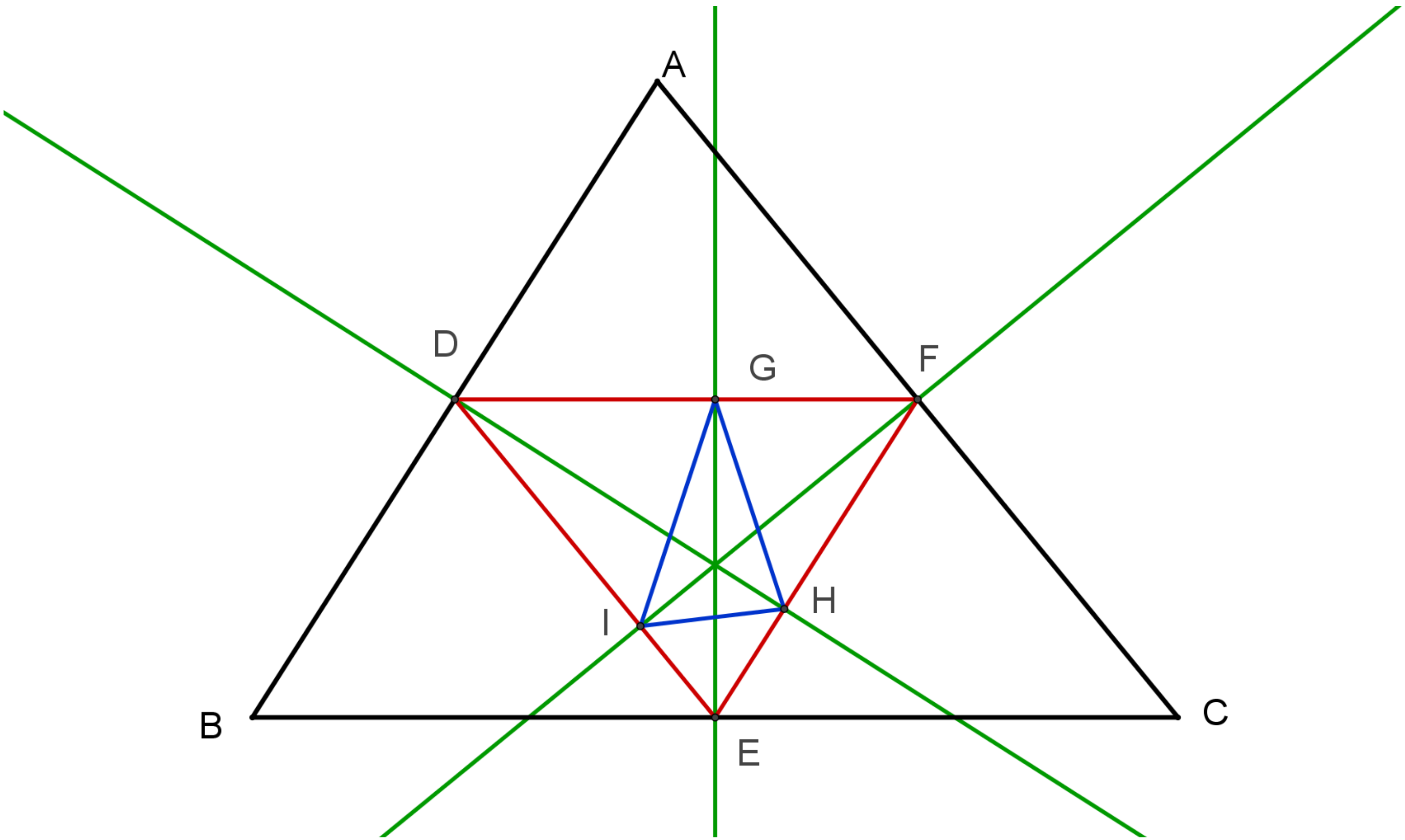


On considère la médiane [DE] et la parallèle à cette médiane passant par B… qui se révèle elle aussi être une médiane

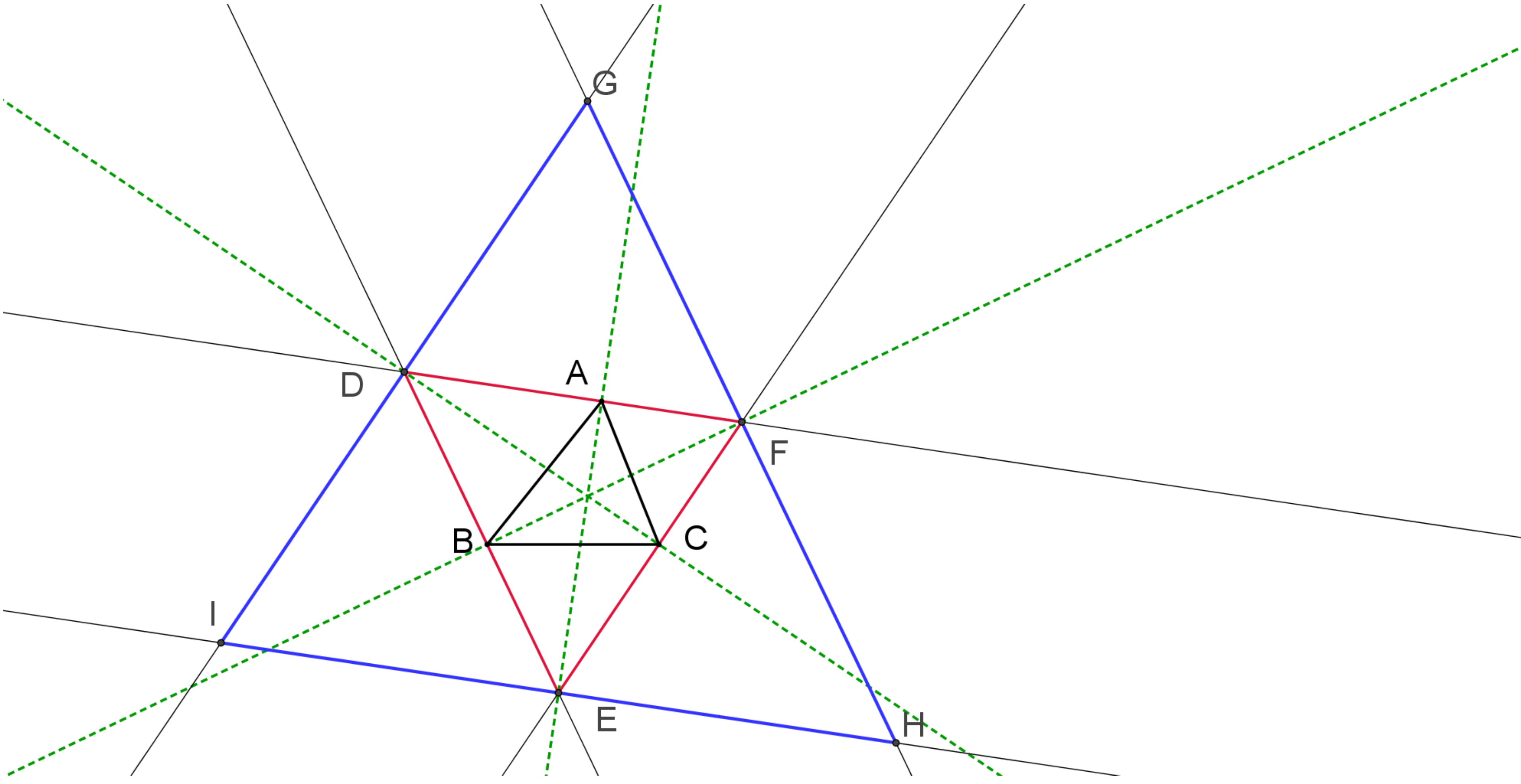
Le concours des médianes



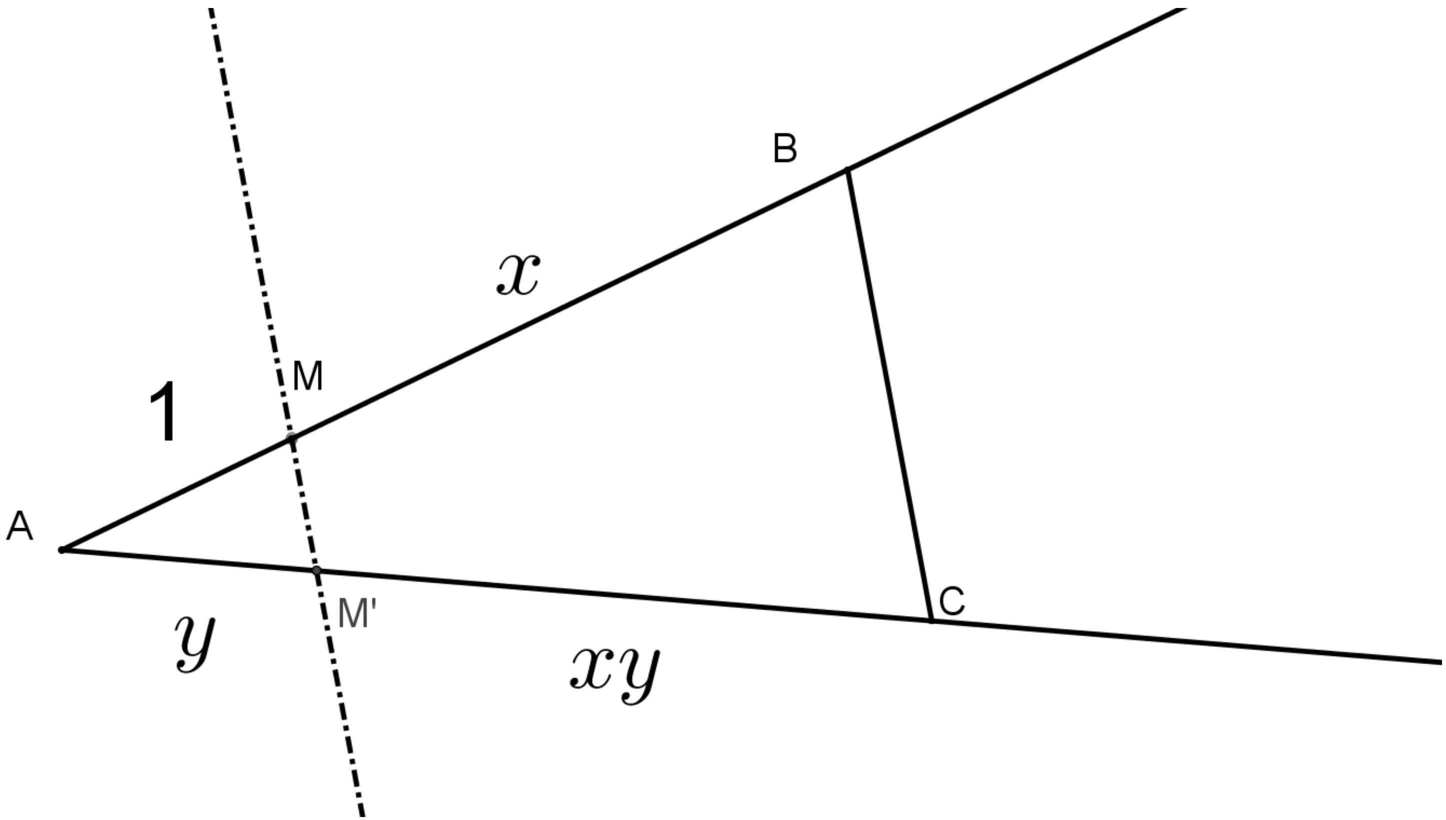
Purement métrique



Les mêmes, dans le bon ordre

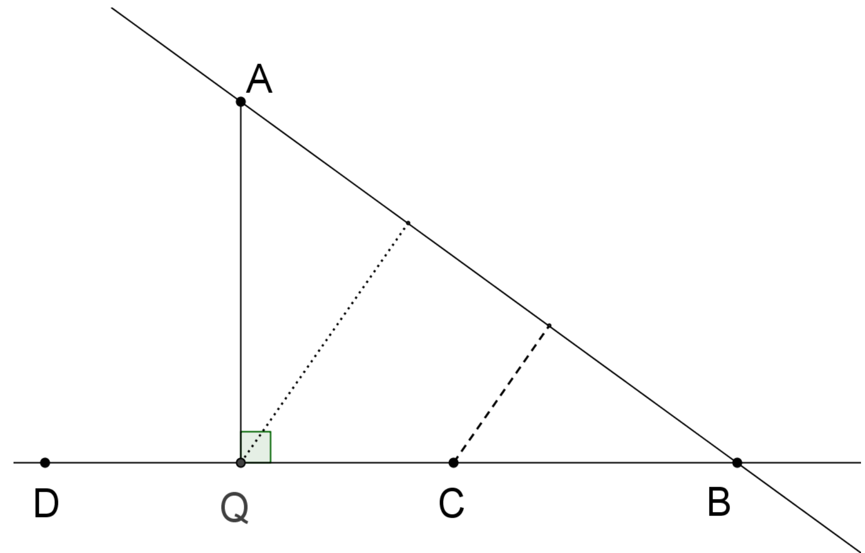


… et Descartes put rester au lit



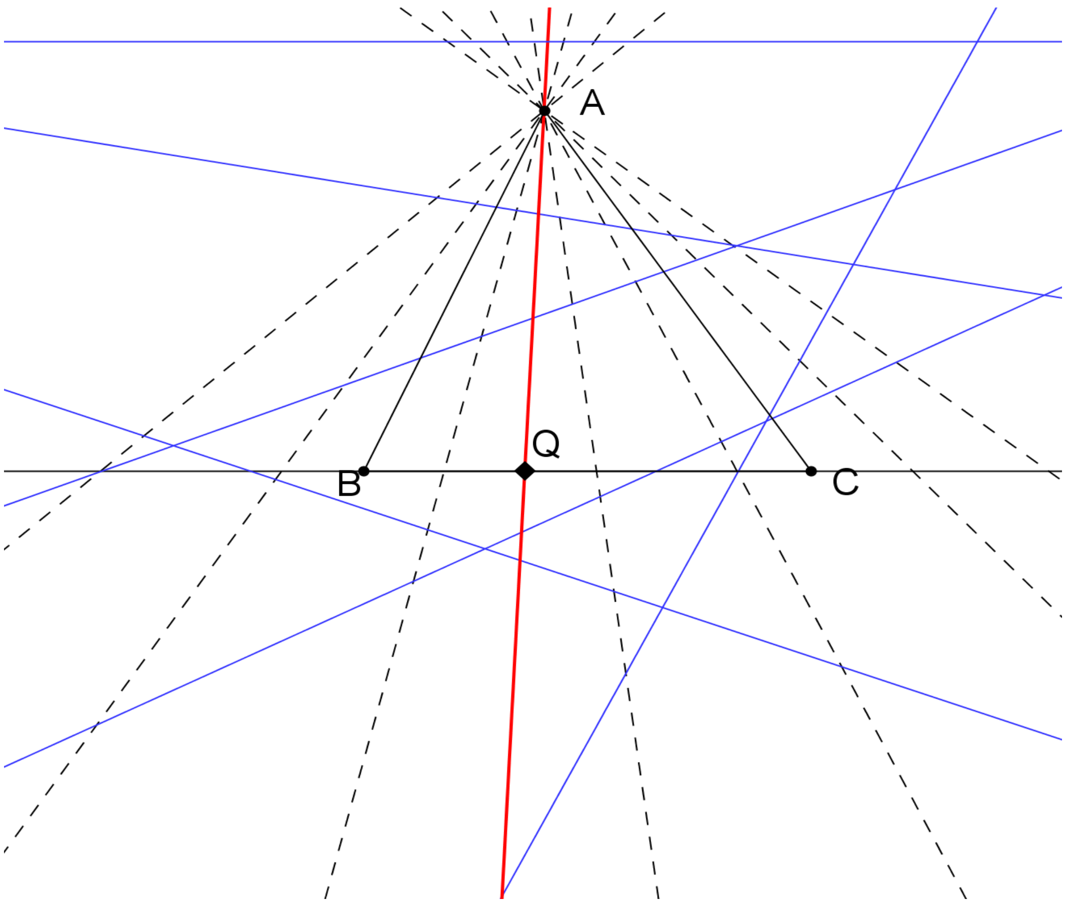
Une preuve euclidienne du théorème de Sylvester

Les distances des points du nuage aux droites définies par deux autres points constituent un ensemble fini de nombres positifs. Cet ensemble admet un plus petit élément, qui est par exemple AQ, distance de A à la droite (BC). S'il y a un troisième point du nuage, D, sur (BC), alors deux des points sont du même côté de Q (ou encore, l'un est Q). Quitte à les renommer, on est dans la situation ci-contre et la distance de C à (AB) est plus petite que AQ…



Leroy Milton KELLY (1948)

Une preuve « ordonnée » (1)

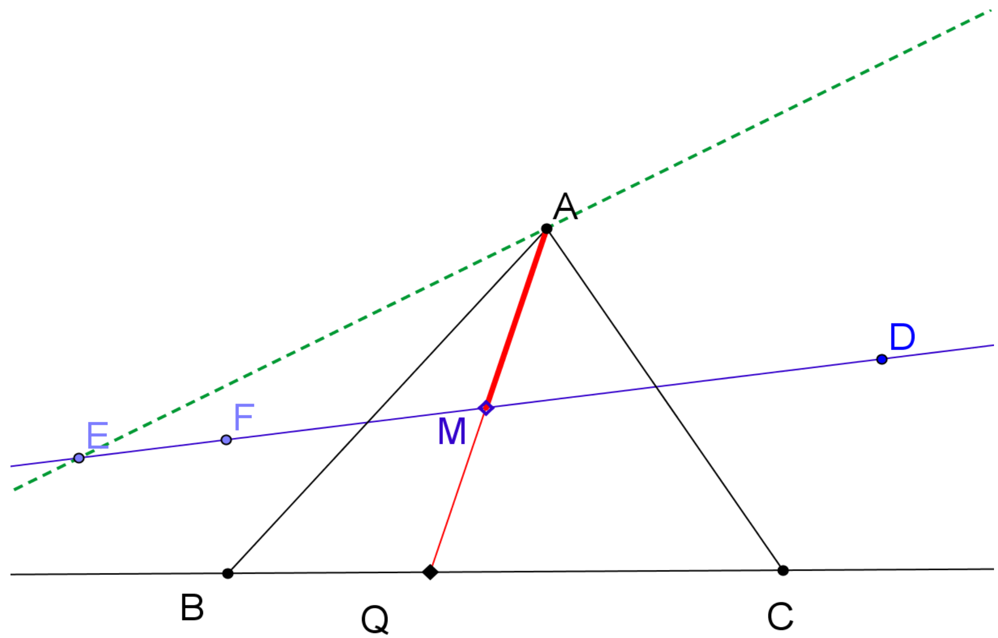


Considérons trois points du nuage, non alignés, A, B et C. Les droites passant par A et un autre point du nuage coupent (BC) en un nombre fini de points. Soit Q un point de (BC) distinct de ces points.

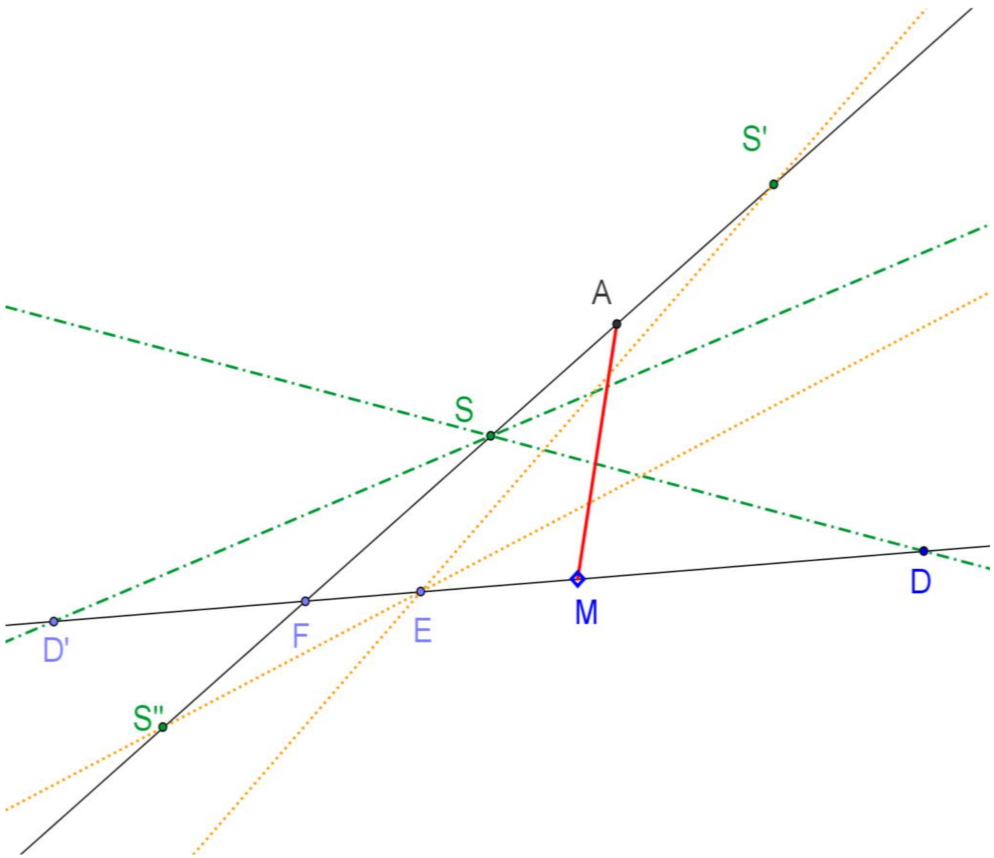
Les droites passant par deux points du nuage coupent (AQ) en un nombre fini de points.

Une preuve « ordonnée » (2)

Dans le découpage de (AQ) par les droites passant par deux points du nuage, le segment [AM] n'est pas atteint. M n'est pas un point du nuage (d'après la définition de Q). M est l'intersection de (AQ) avec une droite passant par deux points du nuage, D et E. Supposons qu'un troisième point du nuage, F, appartient à la droite (DE)… Si ce n'était pas le cas, on aurait trouvé une droite ne passant que par deux points du nuage. La figure ci-contre est générale, aux noms près.



Une preuve « ordonnée » (3)



On suppose l’ordre FEM et deux possibilités pour D, D ou D’. S’il y a un point du nuage sur (FA), il est en S, en S’ ou en S’’, et le segment interdit est coupé (Attention, il y a des théorèmes là-dessous). Contradiction.

Harold Scott McDonald COXETER (1961)

L’outil des configurations

L’idée : pour résoudre des problèmes, être capable d’extraire mentalement une sous-figure de la figure, cette sous-figure rappelant une configuration

Quelques configurations du collège :

Angles déterminés par des parallèles et une sécante

Parallélogramme

Droite des milieux

Théorème de Pythagore

Théorème de Thalès

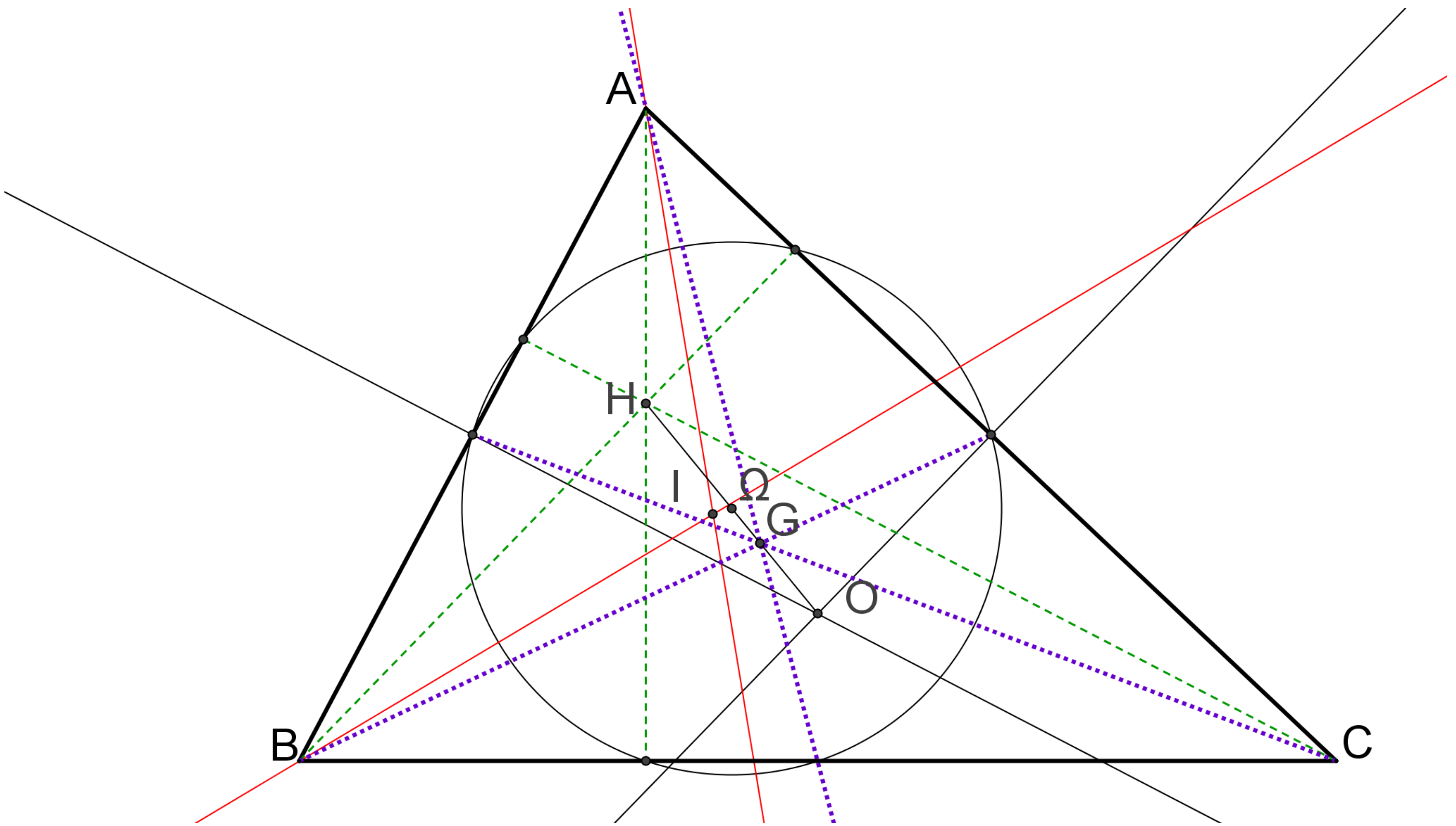
Droites remarquables du triangle

Triangle rectangle inscrit

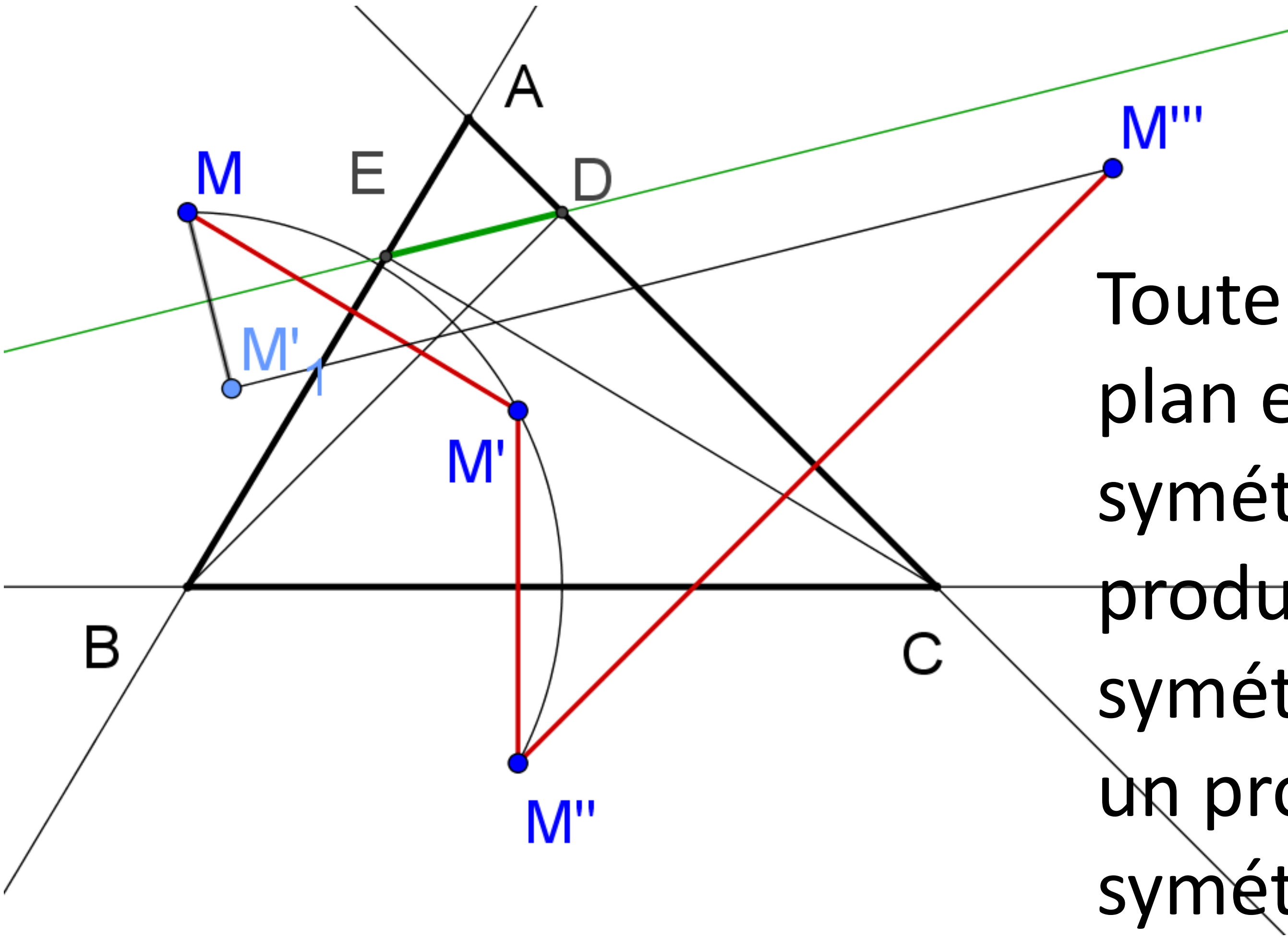
Angle inscrit

Polygones réguliers

L'apothéose des configurations : Droite et cercle d'Euler

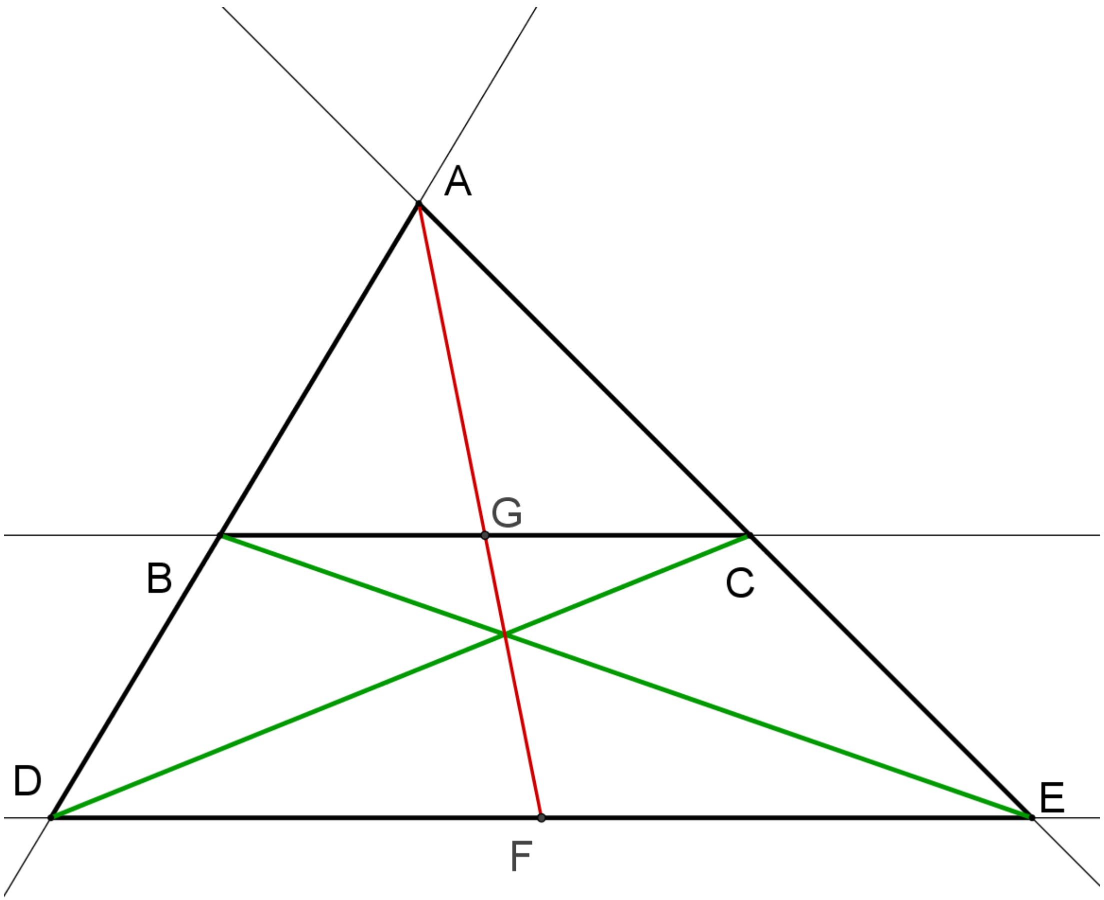


Les isométries



Toute isométrie du plan est une symétrie axiale, un produit de deux symétries axiales ou un produit de trois symétries axiales

D’autres transformations



Les triangles semblables peuvent être mis « en situation de Thalès » au moyen des similitudes

Points de vue globaux

Dans le plan : géométrie projective

Descartes

Sans l’axiome 5 : géométrie de Riemann et Lobatchevski-Bolyai

Le programme d’Erlangen


Felix KLEIN (1849-1925)