Laboratoire de mathématiques du lycée Bascan
Rambouillet
14 juin 2019

Déroulé de la séance de rendu

Les 5+1 sur l'estrade, en mode table ronde. NP anime. Invitation à interrompre à tout moment.

1) Intro (NP, 5 minutes)
Travail sur la preuve en relation avec nos pratiques, à l'occasion de l'introduction de nouvelles "démonstrations exemplaires" dans le programme de seconde.

2) Atelier (30 minutes)
On présente trois résultats : affichage des énoncés, on les lit.

Trois énoncés
Enoncé 1 : *Si n est un entier naturel non nul, alors* $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$
Enoncé 2 : *la fonction racine carrée est strictement croissante sur* $[0,+\infty[$
Enoncé 3 : *la somme des mesures des angles géométriques d'un triangle égale* $180°$

En petits groupes de 2 à 4 personnes, les participants en choisissent deux et en rédigent une démonstration négociée, chacune sur une feuille séparée. On ramasse les productions. On les photographie et on les projette ; prévoir un flottement de cinq minutes le temps de la manip.

3) Première lecture (table ronde, NP anime, 20 à 25 minutes)
On fait une passe publique rapide sur les rédactions, prise de connaissance, commentaire léger.
Question : à quoi sert une preuve ? Qu'en attend-on, nous, les profs ?
Montrer que, dans les rédactions des démonstrations, des choix ont été faits. Question : qu'est-ce qui les a dictés ? Débat.

4) Variations sur la démonstration du théorème de Pythagore (MD, diaporama, 10 à 20 minutes)
Comment peuvent s'opérer les choix qu'on fait. Choix parmi plusieurs preuves. Pour une preuve donnée, différentes focalisations possibles, choix d'une présentation. Premières explicitations de choix.

5) Première conclusion (NP, 5 minutes)
Témoignage de l'activité du chercheur (publications, conférences, vulgarisation) et les analogies avec la situation d'enseignement, y compris dans l'enseignement supérieur. Dans la présentation d'une argumentation, on adapte le discours au contexte, on fait des choix.

– Pause –

6) Compte rendu des quatre séances (NP, 20 minutes)
Point de départ : mentions explicites de démonstrations dans l'intitulé des programmes de seconde et de première générales.
Rédactions personnelles de certaines de ces preuves, mise en commun.
Débat, synthèse des questions soulevées : à quoi sert une démonstration ? Qu'en attend-on, au fond, dans le cadre de l'enseignement ? Dans la présentation d'une preuve aux élèves beaucoup d'enjeux s'entremêlent, souvent très implicites, dont il s'avère qu'on n'est pas toujours conscients, mais qui prennent en compte les contraintes auxquelles la situation d'enseignement est soumise. Comment dégager ces implicites et les rendre davantage explicites ? Qu'y gagne-t-on ?
On a pu dégager des éléments de "relief" grossier [apports lointains de la didactique des mathématiques *via* les contacts de NP, sans qu'on en emprunte le vocabulaire précis].
• *Dualité grandes lignes vs détails* : dans la présentation d'une démonstration, cohabitent deux attendus. D'un côté, la démonstration fournit une suite logique d'arguments qui valident l'énoncé visé. De l'autre, elle est l'occasion de

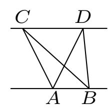
faire fonctionner dans le détail les exigences d'un discours précis, les acquis techniques (surtout s'ils sont récents) du contexte scolaire présent, les réflexes de vigilance qu'on attend d'un élève.
Parfois, au sein d'une preuve faite en classe, ces deux aspects s'affrontent et peuvent tendre à des choix (en apparence) contradictoires.

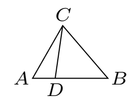
Exemples : Pythagore de MD, stricte croissance de la racine carrée.

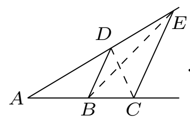
[Agumentaire : si $0 \leq x < y$, alors $\sqrt{x} - \sqrt{y} = \dfrac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} < 0$, détails sur la non-nullité du dénominateur, sur sa positivité, sur la difficulté du double quantificateur $\forall x, \forall y$ dans l'apprentissage de la monotonie. Des détails trop abondants risquent de noyer l'argument central. Pourtant, ils sont nécessaires.]

• Trois éléments de *mobilité* dans l'argumentaire : la sélection (je ne considère qu'une partie de ce que je sais de l'objet en jeu en oubliant certaines de ses propriétés), l'introduction d'intermédiaires (nommer des points sur une configuration géométrique, définir des fonctions auxiliaires, "on pose", etc), les changements de points de vue (voire de cadres ou de registres).

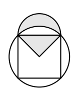
Trois exemples.
(i) Exemple de sélection : preuve du théorème de Thalès par les aires.

[On s'appuie sur les deux icônes concernant les aires des triangles : 

où $a(ABC) = a(ABD)$ et 

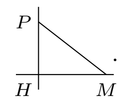
où $\dfrac{a(ACD)}{a(BCD)} = \dfrac{AD}{BD}$. La configuration de Thalès : 

. On oublie que les droites sont parallèles en ne considérant qu'une partie de la configuration pour appliquer deux fois la première icône, dans les triangles ABE et ACD : $\dfrac{AD}{AE} = \dfrac{a(ABD)}{a(BDE)}$ et $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{a(ABD)}{a(BCD)}$. On conclut avec la première icône qui assure que $a(BDE) = a(BCD)$.]

(ii) Exemple d'introduction d'intermédiaire : .

[Pour montrer que les aires grises sont égales, on introduit le demi-disque supérieur  et le secteur angulaire . Ils ont la même aire. On utilise pour conclure l'additivité de l'aire.]

(iii) Exemple de changement de point de vue : le projeté orthogonal minimise la distance à un point de la droite.

[On définit le projeté orthogonal comme le pied de la perpendiculaire sur la droite : 

. Si M est sur la droite, les droites (HM) et (HP) sont perpendiculaires. On le dit autrement : le triangle PHM est rectangle en H. Donc son hypoténuse est le plus grand côté : $PM \geq PH$.]

Ces éléments de mobilité font partie des outils du raisonnement mathématique. Ils sont aussi des objets d'enseignement.
[Si possible, faire fonctionner ces éléments de relief sur des exemples simples repérés dans les productions projetées.]

7) Sur le vécu des six séances (CF, 5 à 10 minutes ?)
Sur nos pratiques professionnelles d'enseignants, les habitudes qu'on prend, la difficulté de les interroger, l'intérêt d'une mise en commun, le labo de math semble un bon lieu pour cela. Intérêt, attrait, mais aussi difficultés compte tenu des contraintes du métier dans l'état actuel. Comment faire pour que la participation au laboMath ne soit pas une surcharge qui fasse hésiter au lieu d'enthousiasmer ?

Autres info/commentaires sur les séances, *ad libitum*.

8) Conclusion (NP, 5 minutes)
Dans une situation d'enseignement en vrai, des contraintes (beaucoup) s'ajoutent, qui amènent à faire des choix. Le discours mathématique contient beaucoup d'implicites, jusque dans la rédaction des démonstrations. Le relief aide à déceler ces implicites, à les révéler, à expliciter les choix.

9) Débat final