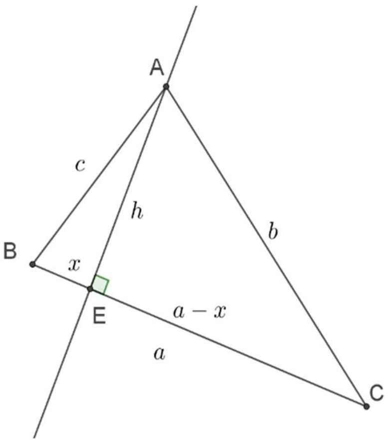
La formule de Héron (Héron d'Alexandrie)

Dans tout triangle, un au moins des pieds des hauteurs se situe à l'intérieur d'un côté. Appelons a, b, c les longueurs des côtés [BC], [CA] et [AB], E le pied de la hauteur abaissée de A, x la distance EC et h la distance AE.



On s'intéresse à l'aire du triangle, demi-produit de la longueur a par la hauteur h. Pour cela, on commence par essayer de calculer h en fonction de a, b et c.

En appliquant le théorème de Pythagore :

$$c^2 = h^2 + x^2$$

$$b^2 = h^2 + (a - x)^2$$

De ces égalités découle : $b^2 - a^2 + 2ax = c^2$, qui fournit : $x = \frac{a^2+c^2-b^2}{2a}$, puis $h^2 = c^2 - (\frac{a^2+c^2-b^2}{2a})^2$.

Pour calculer l'aire $\mathcal{A}$ du triangle ABC, on commence par calculer le carré de cette aire :

$$\mathcal{A}^2 = \frac{1}{4}h^2a^2 = \frac{1}{4}a^2c^2 - \frac{1}{16}(a^2 + c^2 - b^2)^2 = \frac{1}{16}(4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2)$$

On continue à transformer cette expression :

$$\mathcal{A}^2 = \frac{1}{16}(2ac - a^2 - c^2 + b^2)(2ac + a^2 + c^2 - b^2) = \frac{1}{16}(b^2 - (a - c)^2)((a + c)^2 - b^2)$$

Finalement :

$$\mathcal{A}^2 = \frac{1}{16}(a + b - c)(b + c - a)(a + c - b)(a + b + c)$$

On introduit le demi-périmètre du triangle, classiquement noté $p = \frac{a+b+c}{2}$ pour faire apparaître

$\mathcal{A}^2 = \frac{1}{16}(2p - 2c)(2p - 2a)(2p - 2b)(2p)$ ou encore

$$\mathcal{A} = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$$

L'avantage de cette relation est qu'elle permet de calculer l'aire du triangle en connaissant seulement les longueurs de ses côtés.