

Utilisation des aires et des cas d'isométrie pour démontrer

Groupe IREM-Géométrie

Journée des labos de maths, 11 avril 2023

Présentation du groupe IREM

- ▶ L'état actuel : des professeurs de collège (environ 7), des universitaires (souvent retraités, environ 6).

Présentation du groupe IREM

- ▶ L'état actuel : des professeurs de collège (environ 7), des universitaires (souvent retraités, environ 6).
- ▶ Le travail du groupe : la brochure IREM 100, le numéro 117 de Petit x, les stages de formation continue.

Présentation du groupe IREM

- ▶ L'état actuel : des professeurs de collège (environ 7), des universitaires (souvent retraités, environ 6).
- ▶ Le travail du groupe : la brochure IREM 100, le numéro 117 de Petit x, les stages de formation continue.
- ▶ En cours : géométrie en 6ème et florilège de problèmes pour le cycle 4 ou plus.

Présentation du groupe IREM

- ▶ L'état actuel : des professeurs de collège (environ 7), des universitaires (souvent retraités, environ 6).
- ▶ Le travail du groupe : la brochure IREM 100, le numéro 117 de Petit x, les stages de formation continue.
- ▶ En cours : géométrie en 6ème et florilège de problèmes pour le cycle 4 ou plus.
- ▶ Les intervenants.

Programme de l'atelier

- L'usage des cas d'isométrie et des aires : fondements mathématiques et didactiques de nos choix. (10 mn)
- Recherche de deux exercices par les participants. (20 mn)
- Mise en commun et discussion. (15 mn)
- Des mises en œuvre en classe. (30 mn)

Pourquoi les cas d'isométrie et les aires ?

- ▶ Les raisons de nos choix apparaîtront mieux au travers des exemples, mais nous en donnons déjà quelques-unes.

Pourquoi les cas d'isométrie et les aires ?

- ▶ Les raisons de nos choix apparaîtront mieux au travers des exemples, mais nous en donnons déjà quelques-unes.
- ▶ La tradition euclidienne.

Pourquoi les cas d'isométrie et les aires ?

- ▶ Les raisons de nos choix apparaîtront mieux au travers des exemples, mais nous en donnons déjà quelques-unes.
- ▶ La tradition euclidienne.
- ▶ Les programmes de collège.

Pourquoi les cas d'isométrie et les aires ? Les raisons mathématiques

- ▶ Le programme d'Erlangen, transitivité et invariants.

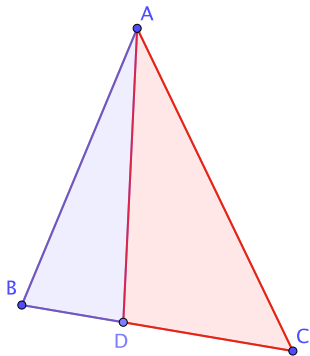
Pourquoi les cas d'isométrie et les aires ? Les raisons mathématiques

- ▶ Le programme d'Erlangen, transitivité et invariants.
- ▶ La géométrie affine et l'invariant aire.

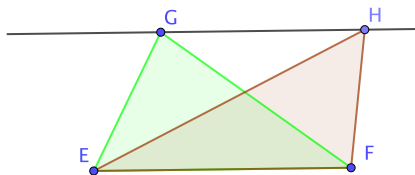
Pourquoi les cas d'isométrie et les aires ? Les raisons mathématiques

- ▶ Le programme d'Erlangen, transitivité et invariants.
- ▶ La géométrie affine et l'invariant aire.
- ▶ Principe d'application : transformer des rapports de longueurs (sur une même droite ou des droites parallèles) en rapports d'aires de triangles par le lemme des proportions en ajoutant un point.

Les lemmes



Lemme des proportions :
 $BD/CD = \text{aire}(ABD)/\text{aire}(ACD)$



Lemme de la parallèle :
si (GH) est parallèle à (EF)
on a $\text{aire}(EFG) = \text{aire}(EFH)$

Pourquoi les cas d'isométrie et les aires ? Les raisons mathématiques (suite)

- ▶ Les cas d'égalité sont des critères de transitivité : on n'a pas besoin d'exhiber la transformation qui passe d'un triangle à l'autre.

Pourquoi les cas d'isométrie et les aires ? Les raisons mathématiques (suite)

- ▶ Les cas d'égalité sont des critères de transitivité : on n'a pas besoin d'exhiber la transformation qui passe d'un triangle à l'autre.
- ▶ Principe d'application : pour montrer une égalité d'angles ou de longueurs on **incorpore** ces éléments dans deux triangles dont on montre l'isométrie.

Pourquoi les cas d'isométrie et les aires ? Les raisons didactiques

- ▶ Aires comme grandeur pour unifier deux conceptions concurrentes de l'aire : forme et nombre.

Pourquoi les cas d'isométrie et les aires ? Les raisons didactiques

- ▶ Aires comme grandeur pour unifier deux conceptions concurrentes de l'aire : forme et nombre.
- ▶ La continuité école-collège, lien avec la construction de figures avec les instruments.

Pourquoi les cas d'isométrie et les aires ? Les raisons didactiques

- ▶ Aires comme grandeur pour unifier deux conceptions concurrentes de l'aire : forme et nombre.
- ▶ La continuité école-collège, lien avec la construction de figures avec les instruments.
- ▶ Duval, deux registres : figure et texte.

Pourquoi les cas d'isométrie et les aires ? Les raisons didactiques

- ▶ Aires comme grandeur pour unifier deux conceptions concurrentes de l'aire : forme et nombre.
- ▶ La continuité école-collège, lien avec la construction de figures avec les instruments.
- ▶ Duval, deux registres : figure et texte.
- ▶ La vision naturelle des figures : surfaces. Lignes et points demandent une déconstruction dimensionnelle.

Pourquoi les cas d'isométrie et les aires ? Les raisons didactiques

- ▶ Aires comme grandeur pour unifier deux conceptions concurrentes de l'aire : forme et nombre.
- ▶ La continuité école-collège, lien avec la construction de figures avec les instruments.
- ▶ Duval, deux registres : figure et texte.
- ▶ La vision naturelle des figures : surfaces. Lignes et points demandent une déconstruction dimensionnelle.
- ▶ Les cas d'égalité et les aires peuvent s'accommoder d'une vision surfaces.

La règle du jeu

- ▶ Il y a deux exercices que nous appellerons l'exercice du Frère Gabriel-Marie [FGM] et l'exercice de Guillaume [GD]. Les participants sont divisés en deux moitiés qui cherchent en priorité l'un des exercices (en respectant les consignes).

La règle du jeu

- ▶ Il y a deux exercices que nous appellerons l'exercice du Frère Gabriel-Marie [FGM] et l'exercice de Guillaume [GD]. Les participants sont divisés en deux moitiés qui cherchent en priorité l'un des exercices (en respectant les consignes).
- ▶ Sur chaque exercice, on demande au moins deux démonstrations rédigées comme on l'attendrait d'un élève (à une époque où les notions utilisées faisaient partie des programmes).

La règle du jeu

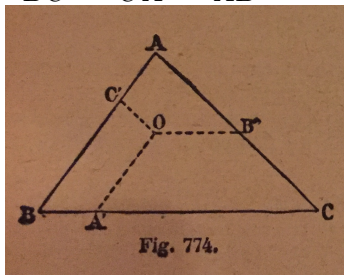
- ▶ Il y a deux exercices que nous appellerons l'exercice du Frère Gabriel-Marie [FGM] et l'exercice de Guillaume [GD]. Les participants sont divisés en deux moitiés qui cherchent en priorité l'un des exercices (en respectant les consignes).
- ▶ Sur chaque exercice, on demande au moins deux démonstrations rédigées comme on l'attendrait d'un élève (à une époque où les notions utilisées faisaient partie des programmes).
- ▶ Une fois le premier exercice résolu, les participants peuvent passer à l'autre.

La règle du jeu

- ▶ Il y a deux exercices que nous appellerons l'exercice du Frère Gabriel-Marie [FGM] et l'exercice de Guillaume [GD]. Les participants sont divisés en deux moitiés qui cherchent en priorité l'un des exercices (en respectant les consignes).
- ▶ Sur chaque exercice, on demande au moins deux démonstrations rédigées comme on l'attendrait d'un élève (à une époque où les notions utilisées faisaient partie des programmes).
- ▶ Une fois le premier exercice résolu, les participants peuvent passer à l'autre.
- ▶ Au bout de 20 minutes on fait une mise en commun.

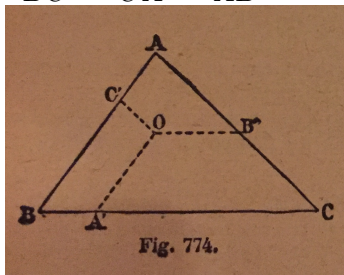
L'exercice du Frère Gabriel-Marie

- Soit ABC un triangle et O un point intérieur au triangle. La parallèle à (AB) (resp. (BC) , resp. (CA)) passant par O coupe $[BC]$ (resp. $[CA]$, resp. $[AB]$) en A' (resp. B' , resp. C'). Alors, on a : $\frac{BA'}{BC} + \frac{CB'}{CA} + \frac{AC'}{AB} = 1$.



L'exercice du Frère Gabriel-Marie

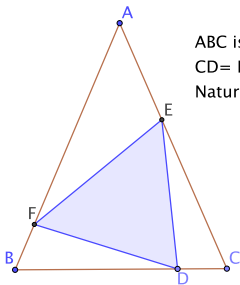
- Soit ABC un triangle et O un point intérieur au triangle. La parallèle à (AB) (resp. (BC) , resp. (CA)) passant par O coupe $[BC]$ (resp. $[CA]$, resp. $[AB]$) en A' (resp. B' , resp. C'). Alors, on a :
$$\frac{BA'}{BC} + \frac{CB'}{CA} + \frac{AC'}{AB} = 1.$$



- Indication : on pourra utiliser les aires (ou Thalès, ou les triangles semblables ou les barycentres).

L'exercice de Guillaume

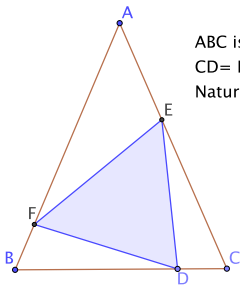
- Soit ABC un triangle isocèle en A , $D \in [BC]$, $E \in [CA]$, $F \in [AB]$ tels que $CD = BF$ et $BD = CE$. Quelle est la nature du triangle DEF ?



ABC isocèle en A
 $CD = BF$, $CE = BD$
Nature du triangle DEF ?

L'exercice de Guillaume

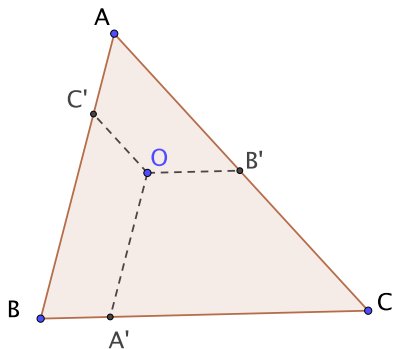
- Soit ABC un triangle isocèle en A , $D \in [BC]$, $E \in [CA]$, $F \in [AB]$ tels que $CD = BF$ et $BD = CE$. Quelle est la nature du triangle DEF ?



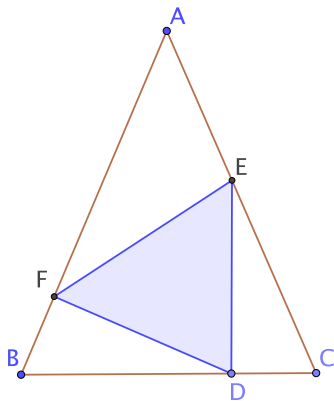
ABC isocèle en A
 $CD = BF$, $CE = BD$
Nature du triangle DEF ?

- Indication : on pourra utiliser les triangles isométriques ou les transformations.

Les exercices



Les segments pointillés
sont parallèles aux côtés.
On a $BA'/BC + CB'/CA + AC'/AB = 1$.



ABC isocèle en A
 $CD = BF$, $CE = BD$
Nature du triangle DEF ?