

# Utilisation des aires et des cas d'isométrie pour démontrer

Groupe IREM-Géométrie

Journée des labos de maths, 11 avril 2023

## Présentation du groupe IREM

- ▶ L'état actuel : des professeurs de collège (environ 7), des universitaires (souvent retraités, environ 6).

## Présentation du groupe IREM

- ▶ L'état actuel : des professeurs de collège (environ 7), des universitaires (souvent retraités, environ 6).
- ▶ Le travail du groupe : la brochure IREM 100, le numéro 117 de Petit x, les stages de formation continue.

## Présentation du groupe IREM

- ▶ L'état actuel : des professeurs de collège (environ 7), des universitaires (souvent retraités, environ 6).
- ▶ Le travail du groupe : la brochure IREM 100, le numéro 117 de Petit x, les stages de formation continue.
- ▶ En cours : géométrie en 6ème et florilège de problèmes pour le cycle 4 ou plus.

## Présentation du groupe IREM

- ▶ L'état actuel : des professeurs de collège (environ 7), des universitaires (souvent retraités, environ 6).
- ▶ Le travail du groupe : la brochure IREM 100, le numéro 117 de Petit x, les stages de formation continue.
- ▶ En cours : géométrie en 6ème et florilège de problèmes pour le cycle 4 ou plus.
- ▶ Les intervenants.

## Programme de l'atelier

- L'usage des cas d'isométrie et des aires : fondements mathématiques et didactiques de nos choix. (10 mn)
- Recherche de deux exercices par les participants. (20 mn)
- Mise en commun et discussion. (15 mn)
- Des mises en œuvre en classe. (30 mn)

## Pourquoi les cas d'isométrie et les aires ?

- ▶ Les raisons de nos choix apparaîtront mieux au travers des exemples, mais nous en donnons déjà quelques-unes.

## Pourquoi les cas d'isométrie et les aires ?

- ▶ Les raisons de nos choix apparaîtront mieux au travers des exemples, mais nous en donnons déjà quelques-unes.
- ▶ La tradition euclidienne.

## Pourquoi les cas d'isométrie et les aires ?

- ▶ Les raisons de nos choix apparaîtront mieux au travers des exemples, mais nous en donnons déjà quelques-unes.
- ▶ La tradition euclidienne.
- ▶ Les programmes de collège.

# Pourquoi les cas d'isométrie et les aires ? Les raisons mathématiques

- ▶ Le programme d'Erlangen, transitivité et invariants.

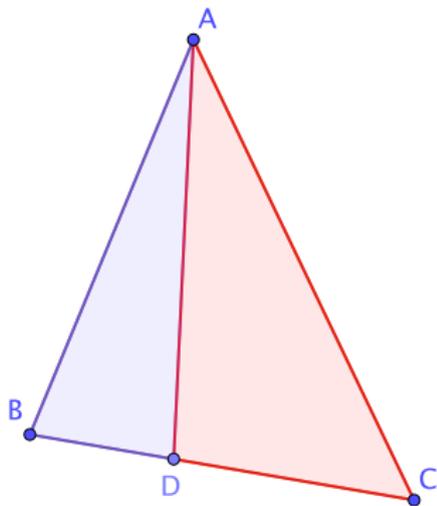
# Pourquoi les cas d'isométrie et les aires ? Les raisons mathématiques

- ▶ Le programme d'Erlangen, transitivité et invariants.
- ▶ La géométrie affine et l'invariant aire.

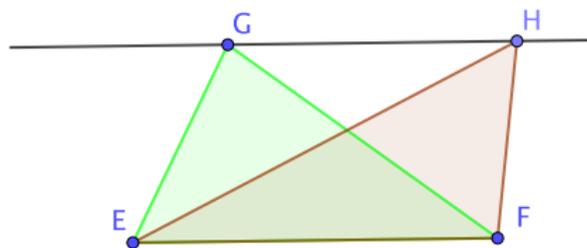
# Pourquoi les cas d'isométrie et les aires ? Les raisons mathématiques

- ▶ Le programme d'Erlangen, transitivité et invariants.
- ▶ La géométrie affine et l'invariant aire.
- ▶ Principe d'application : transformer des rapports de longueurs (sur une même droite ou des droites parallèles) en rapports d'aires de triangles par le lemme des proportions en ajoutant un point.

## Les lemmes



Lemme des proportions :  
 $BD/CD = \text{aire}(ABD)/\text{aire}(ACD)$



Lemme de la parallèle :  
si (GH) est parallèle à (EF)  
on a  $\text{aire}(EFG) = \text{aire}(EFH)$

## Pourquoi les cas d'isométrie et les aires ? Les raisons mathématiques (suite)

- ▶ Les cas d'égalité sont des critères de transitivité : on n'a pas besoin d'exhiber la transformation qui passe d'un triangle à l'autre.

## Pourquoi les cas d'isométrie et les aires ? Les raisons mathématiques (suite)

- ▶ Les cas d'égalité sont des critères de transitivité : on n'a pas besoin d'exhiber la transformation qui passe d'un triangle à l'autre.
- ▶ Principe d'application : pour montrer une égalité d'angles ou de longueurs on **incorpore** ces éléments dans deux triangles dont on montre l'isométrie.

## Pourquoi les cas d'isométrie et les aires ? Les raisons didactiques

- ▶ Aires comme grandeur pour unifier deux conceptions concurrentes de l'aire : forme et nombre.

## Pourquoi les cas d'isométrie et les aires ? Les raisons didactiques

- ▶ Aires comme grandeur pour unifier deux conceptions concurrentes de l'aire : forme et nombre.
- ▶ La continuité école-collège, lien avec la construction de figures avec les instruments.

## Pourquoi les cas d'isométrie et les aires ? Les raisons didactiques

- ▶ Aires comme grandeur pour unifier deux conceptions concurrentes de l'aire : forme et nombre.
- ▶ La continuité école-collège, lien avec la construction de figures avec les instruments.
- ▶ Duval, deux registres : figure et texte.

## Pourquoi les cas d'isométrie et les aires ? Les raisons didactiques

- ▶ Aires comme grandeur pour unifier deux conceptions concurrentes de l'aire : forme et nombre.
- ▶ La continuité école-collège, lien avec la construction de figures avec les instruments.
- ▶ Duval, deux registres : figure et texte.
- ▶ La vision naturelle des figures : surfaces. Lignes et points demandent une déconstruction dimensionnelle.

## Pourquoi les cas d'isométrie et les aires ? Les raisons didactiques

- ▶ Aires comme grandeur pour unifier deux conceptions concurrentes de l'aire : forme et nombre.
- ▶ La continuité école-collège, lien avec la construction de figures avec les instruments.
- ▶ Duval, deux registres : figure et texte.
- ▶ La vision naturelle des figures : surfaces. Lignes et points demandent une déconstruction dimensionnelle.
- ▶ Les cas d'égalité et les aires peuvent s'accommoder d'une vision surfaces.

## La règle du jeu

- ▶ Il y a deux exercices que nous appellerons l'exercice du Frère Gabriel-Marie [FGM] et l'exercice de Guillaume [GD]. Les participants sont divisés en deux moitiés qui cherchent en priorité l'un des exercices (en respectant les consignes).

## La règle du jeu

- ▶ Il y a deux exercices que nous appellerons l'exercice du Frère Gabriel-Marie [FGM] et l'exercice de Guillaume [GD]. Les participants sont divisés en deux moitiés qui cherchent en priorité l'un des exercices (en respectant les consignes).
- ▶ Sur chaque exercice, on demande au moins deux démonstrations rédigées comme on l'attendrait d'un élève (à une époque où les notions utilisées faisaient partie des programmes).

## La règle du jeu

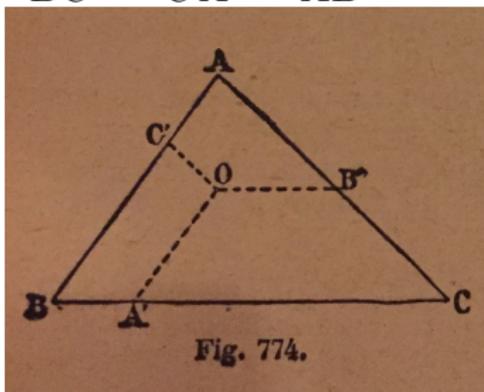
- ▶ Il y a deux exercices que nous appellerons l'exercice du Frère Gabriel-Marie [FGM] et l'exercice de Guillaume [GD]. Les participants sont divisés en deux moitiés qui cherchent en priorité l'un des exercices (en respectant les consignes).
- ▶ Sur chaque exercice, on demande au moins deux démonstrations rédigées comme on l'attendrait d'un élève (à une époque où les notions utilisées faisaient partie des programmes).
- ▶ Une fois le premier exercice résolu, les participants peuvent passer à l'autre.

## La règle du jeu

- ▶ Il y a deux exercices que nous appellerons l'exercice du Frère Gabriel-Marie [FGM] et l'exercice de Guillaume [GD]. Les participants sont divisés en deux moitiés qui cherchent en priorité l'un des exercices (en respectant les consignes).
- ▶ Sur chaque exercice, on demande au moins deux démonstrations rédigées comme on l'attendrait d'un élève (à une époque où les notions utilisées faisaient partie des programmes).
- ▶ Une fois le premier exercice résolu, les participants peuvent passer à l'autre.
- ▶ Au bout de 20 minutes on fait une mise en commun.

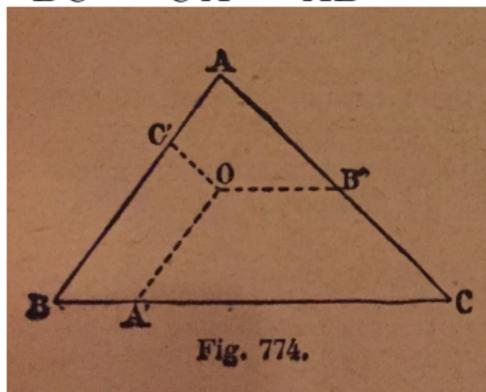
## L'exercice du Frère Gabriel-Marie

- Soit  $ABC$  un triangle et  $O$  un point intérieur au triangle. La parallèle à  $(AB)$  (resp.  $(BC)$ , resp.  $(CA)$ ) passant par  $O$  coupe  $[BC]$  (resp.  $[CA]$ , resp.  $[AB]$ ) en  $A'$  (resp.  $B'$ , resp.  $C'$ ). Alors, on a :  $\frac{BA'}{BC} + \frac{CB'}{CA} + \frac{AC'}{AB} = 1$ .



## L'exercice du Frère Gabriel-Marie

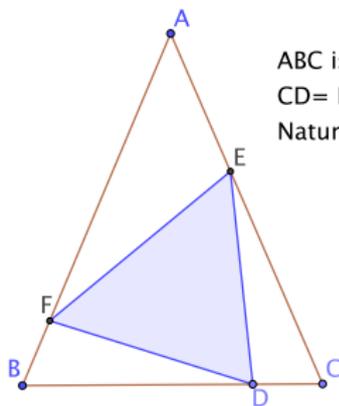
- Soit  $ABC$  un triangle et  $O$  un point intérieur au triangle. La parallèle à  $(AB)$  (resp.  $(BC)$ , resp.  $(CA)$ ) passant par  $O$  coupe  $[BC]$  (resp.  $[CA]$ , resp.  $[AB]$ ) en  $A'$  (resp.  $B'$ , resp.  $C'$ ). Alors, on a : 
$$\frac{BA'}{BC} + \frac{CB'}{CA} + \frac{AC'}{AB} = 1.$$



- Indication : on pourra utiliser les aires (ou Thalès, ou les triangles semblables ou les barycentres).

## L'exercice de Guillaume

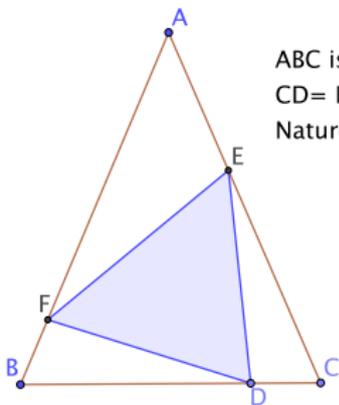
- Soit  $ABC$  un triangle isocèle en  $A$ ,  $D \in [BC]$ ,  $E \in [CA]$ ,  $F \in [AB]$  tels que  $CD = BF$  et  $BD = CE$ . Quelle est la nature du triangle  $DEF$  ?



ABC isocèle en A  
 $CD = BF$ ,  $CE = BD$   
Nature du triangle DEF ?

## L'exercice de Guillaume

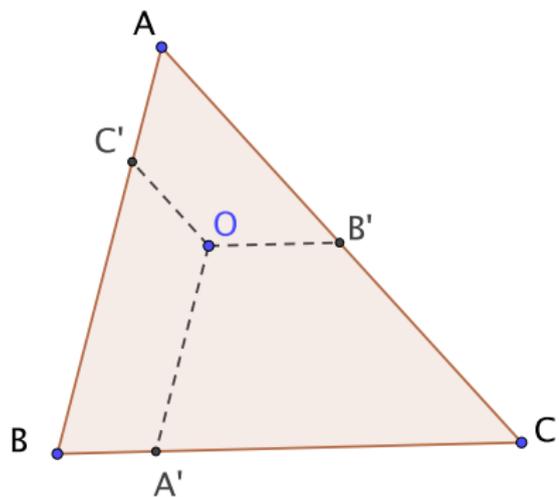
- Soit  $ABC$  un triangle isocèle en  $A$ ,  $D \in [BC]$ ,  $E \in [CA]$ ,  $F \in [AB]$  tels que  $CD = BF$  et  $BD = CE$ . Quelle est la nature du triangle  $DEF$  ?



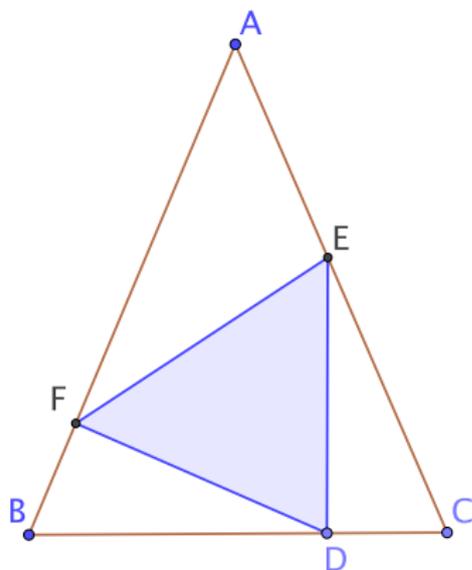
ABC isocèle en A  
 $CD = BF$ ,  $CE = BD$   
Nature du triangle DEF ?

- Indication : on pourra utiliser les triangles isométriques ou les transformations.

## Les exercices



Les segments pointillés  
sont parallèles aux côtés.  
On a  $BA'/BC + CB'/CA + AC'/AB = 1$ .



ABC isocèle en A  
 $CD = BF$ ,  $CE = BD$   
Nature du triangle DEF ?