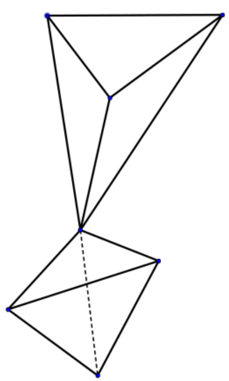
Quelques échecs

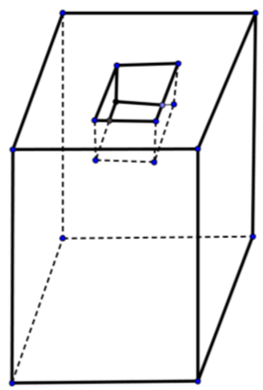
Deux tétraèdres



7 sommets
12 arêtes
6 faces

$S - a + f = 1$

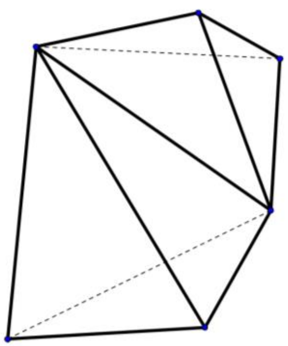
Prisme creusé



16 sommets
24 arêtes
11 faces

$S - a + f = 3$

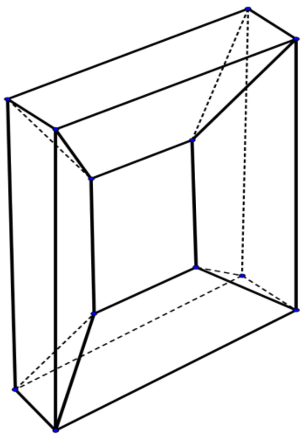
Deux tétraèdres



6 sommets
11 arêtes
8 faces

$S - a + f = 3$

Cadre à bord prismatique

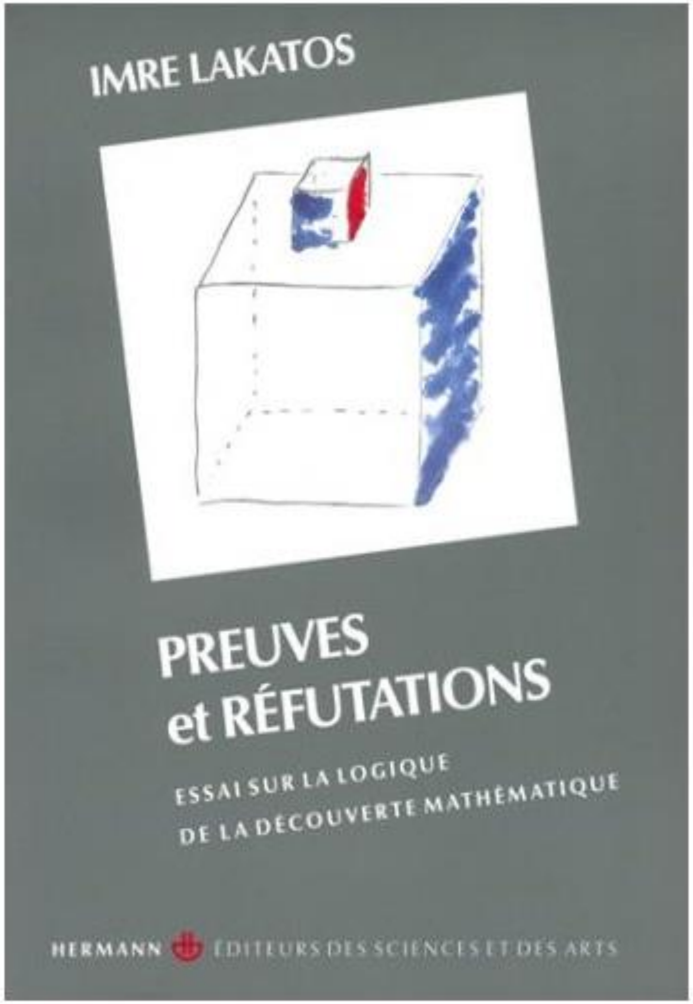


12 sommets
24 arêtes
12 faces

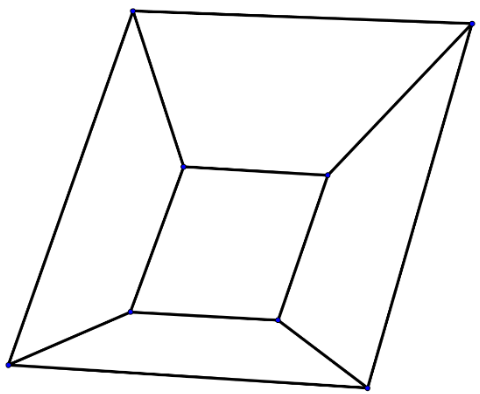
$S - a + f = 0$

Un théorème devient définition

La formule d'Euler (devenue formule d'Euler-Descartes) n'est vraie que pour certains polyèdres. Inutile de chercher à écarter des « cas particuliers », les exemples précédents prouvent qu'on peut obtenir tout entier positif ou négatif comme s – a + f …



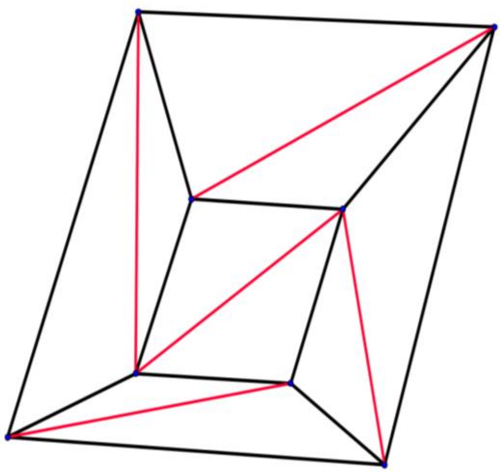
La démonstration de Cauchy (1)



Dans cet exemple, un cube a été « ouvert » par une face, les six autres étant transformées en quadrilatères adjacents

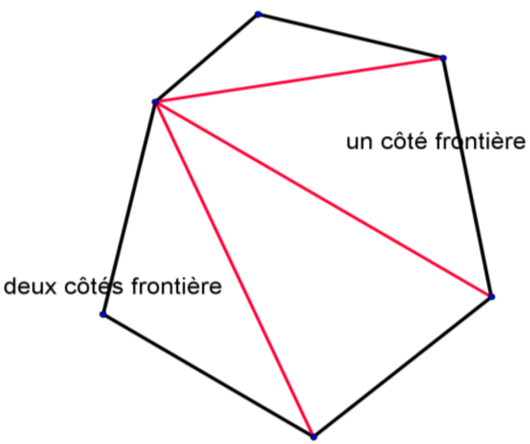
Un polyèdre étant donné, on l'aplatit par déformation continue sur le plan d'une face. On obtient un polygone découpé en régions polygonales correspondant aux anciennes faces. Une face a été perdue dans le processus : on considère qu'elle correspond à la partie du plan restante. Les termes sommets, arêtes, faces s'appliquent à présent à des objets du plan, mais la somme s – a + f demeure.

La démonstration de Cauchy (2)



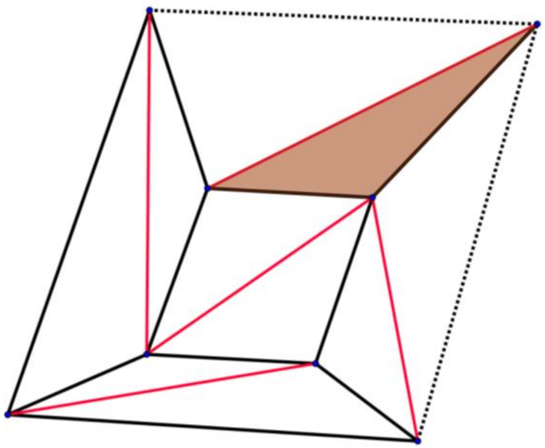
Chacune des « faces » - sauf la face qui occupe le reste du plan - est découpée en triangles. On ajoute autant de faces que d'arêtes, la somme s – a + f demeure.

Tout polygone peut être décomposé en triangles : partant d'un sommet, on choisit en tournant le premier et le second sommets, puis le second et le troisième, etc.



Si on supprime le côté d'un triangle qui est sa frontière avec l'extérieur, on enlève une face et une arête…

La démonstration de Cauchy (3)



On a supprimé deux triangles dont la frontière avec l’extérieur suivait un seul côté. On regarde ce qui se passe si on en supprime un dont deux côtés sont sur la frontière.

Si on supprime un triangle dont deux côtés constituent la frontière avec l’extérieur, on ôte un sommet, deux arêtes et une face : la somme s – a + f demeure

Et à la fin, que reste-t-il? Un seul triangle : 3 sommets, 3 arêtes, et … une face? Non, deux, il faut compter le grand domaine extérieur pour une face et 3 – 3 + 2 = 2. C’est gagné.