Pépinière académique de mathématiques

Stage en ligne de mars à mai 2021 proposé aux élèves de seconde

Fiche numéro 4

ACADÉMIE DE VERSAILLES
Liberté
Égalité
Fraternité

Les propositions de solution de chaque exercice doivent être envoyées d'ici le lundi 17 mai à l'adresse euler.pepiniere@ac-versailles.fr, sous forme numérique (format .pdf ou image), en pièce jointe ou avec un système de dépôt pour les fichiers volumineux, par les professeurs et selon les modalités précisées dans le courrier envoyé dans les lycées (envoi des propositions d'au plus deux équipes).

Exercice S4. 1 Comment faire table rase

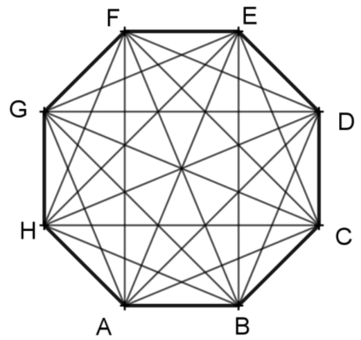
3	5
5	3

Sur un échiquier à 4 cases, on a disposé des jetons. Les deux mouvements suivants sont possibles :
1. Si aucune des cases d'une ligne n'est vide, on peut prendre un jeton dans chaque case de cette ligne ;
2. On peut doubler le nombre de jetons de toutes les cases d'une colonne.
Montrer qu'il est possible, en un nombre fini de mouvements, de vider le tableau représenté à gauche.

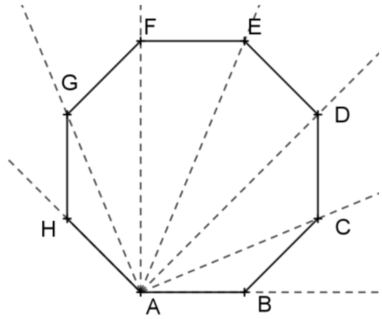
On prélève un jeton dans chaque case de la première ligne, puis on double le nombre de jetons des cases de la première colonne, ce qui permet de vider la première ligne, on double le nombre de jetons dans les cases de la deuxième colonne et enfin on vide la deuxième ligne.

3	5	2	4	4	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	3	5	3	10	3	10	3	10	6	8	4	8	8	0	0

Exercice S4. 2 Diagonales et côtés de l'octogone régulier

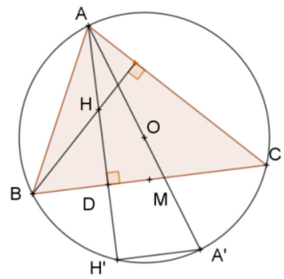


1. Un octogone régulier possède 8 côtés (ça c'est banal). Combien possède-t-il de diagonales (segments dont les extrémités sont des sommets non voisins de l'octogone) ?
2. Certains des supports de côtés ou de diagonales sont parallèles. Combien de directions de droites (ensembles de droites parallèles) constituent-ils ?
3. Quelles sont les mesures des angles formés par les côtés et les diagonales ayant une extrémité commune ?



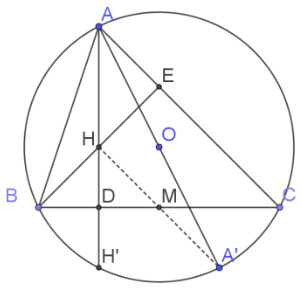
1. Chaque couple de sommets définit une diagonale ou un côté de l'octogone. Il y a $\frac{8\times 7}{2}=28$ couples de sommets, dont 8 définissent les côtés, et donc 20 les diagonales.
2. La figure ci-contre montre les demi-droites d'origine A passant par les autres sommets de l'octogone. Elles définissent sept directions de droite auxquelles on ajoute celle de la droite (HB), et tout autre côté ou toute autre diagonale appartient à une de ces directions. Quatre de ces directions contiennent les parallèles aux côtés de l'octogone, les quatre autres les supports des segments joignant des sommets opposés.
3. On pourrait rapporter les directions représentées ci-contre à des droites passant par le contre du cercle circonscrit à l'octogone pour confirmer que les mesures possibles des angles entre deux directions sont $22{,}5, 45, 67{,}5, 90, 112{,}5$ et 135 (on peut aussi commencer par considérer le triangle ABC, puis le trapèze ABCD dont les côtés non parallèles sont perpendiculaires, puis le triangle ADE rectangle en D, etc. pour déterminer les mesures possibles)

Exercice S4. 3 Paléontologie

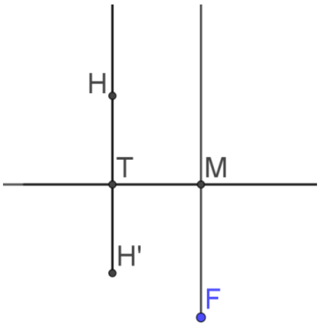


Du triangle ABC, on ne connaît que l'orthocentre H, le pied T de la hauteur issue de A et le milieu F de l'arc $\widehat{BC}$ du cercle circonscrit au triangle. Reconstituer le triangle ABC.
N.B. On supposera que F, T et A ne sont pas alignés et sont deux à deux distincts, ce qui rend le triangle cherché scalène (*scalène signifie ni rectangle, ni isocèle*).

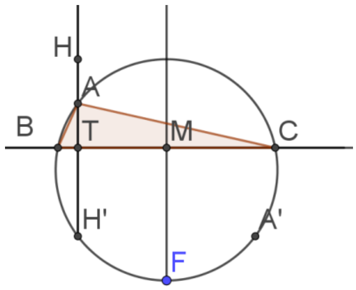
Préalable :
On pourra commencer par montrer la propriété suivante : Soit A, B et C trois points d'un cercle Γ de centre O. On appelle H l'orthocentre du triangle ABC (qu'on suppose distinct de A, B et C), M le milieu du côté [BC], D le pied de la hauteur issue de A du triangle, A' le point de Γ diamétralement opposé à A. Alors H', l'autre point d'intersection de (AD) avec Γ, est le symétrique de H par rapport à (BC).



Le quadrilatère CHBA' est un parallélogramme (les droites (CH) et (A'B) sont perpendiculaires à (AB), la première parce que c'est la hauteur issue de C du triangle, la seconde du fait de la propriété d'un triangle inclus dans un demi-cercle d'être rectangle, les droites (CA') et (BH) sont parallèles car toutes les deux perpendiculaires à (AC)). Les diagonales de ce parallélogramme ont le même milieu M. Dans le triangle HH'A', la droite (MD) passe par le milieu d'un côté et est parallèle à un autre (le côté [A'H'], car l'angle en H' est droit, le triangle AH'A' étant inscrit dans un demi-cercle. D est donc le milieu de [HH'].



Compte tenu de ce qui précède, la figure de départ (à gauche) peut être complétée par le point M (c'est déjà fait ici), milieu du côté [BC]. C'est le projeté de F sur le support (BC) car (FM) est la médiatrice de [BC], (BC) étant obtenue comme perpendiculaire à (HT) passant par T, puis par le point A', symétrique de H par rapport à M (c'est la diagonale du parallélogramme vue plus haut). Avec les points H', F et A', on a trois points distincts du cercle circonscrit au triangle cherché.



Les points B et C sont les points d'intersection de ce cercle avec la perpendiculaire à (HT) passant pat T et le pont A son point d'intersection distinct de H' avec la droite (HT). Ici, une ***discussion*** doit être entreprise pour savoir si les données de départ conduisent à un cercle (l'énoncé a pris des précautions) qui coupe la perpendiculaire en T à (HT)…

Exercice S4. 4 Il n'y a pas d'âge pour l'amitié
Amandine, Béatrice et Camille sont trois bonnes amies. Il y a dix ans, Amandine avait le double de la somme des âges de Béatrice et de Camille. Aujourd'hui, Amandine a le triple de la différence des âges de Béatrice et de Camille. Nous savons de plus que Camille a l'âge que Béatrice avait lorsque Béatrice avait exactement le tiers de l'âge d'Amandine. Quels sont les âges des trois amies ?

Notons a, b, c les âges respectifs actuels de Amandine, de Béatrice et de Camille.
« Il y a dix ans, Amandine avait le double de la somme des âges de Béatrice et de Camille. » se traduit par l'égalité : $a - 10 = 2(b - 10 + c - 10)$ soit $a = 2b + 2c - 30$. (1)
« Aujourd'hui, Amandine a le triple de la différence des âges de Béatrice et de Camille. » se traduit par les égalités : $a = 3(b - c)$ ou $a = 3(c - b)$. (2)
« Camille a l'âge que Béatrice avait lorsque Béatrice avait exactement le tiers de l'âge d'Amandine. » signifie qu'il y a x années, $c = b - x = \frac{1}{3}(a - x)$. (3)
On en déduit déjà que $c < b$ et, dans (2), seule l'égalité $a = 3(b - c)$ est à retenir, ce qui donne $a = 3x$.
On a alors, d'après (3), $c = b - x = \frac{1}{3}(a - x) = \frac{2}{3}x$ d'où $= \frac{5}{3}x$.
Alors (1) se traduit par $3x = 2 \times \frac{5}{3}x + 2 \times \frac{2}{3}x - 30$, c'est-à-dire $x = 18$.
On en tire $a = 54, b = 30$ et $c = 12$.

Exercice S4. 5 Pour fabriquer des carrés parfaits
Remarquons pour commencer que $1 \times 2 \times 3 \times 4 + 1 = 25$, $2 \times 3 \times 4 \times 5 + 1 = 121$, etc. Il semble que chaque fois qu'on ajoute 1 au produit de quatre entiers consécutifs, on obtient un carré parfait (c'est-à-dire le carré d'un entier). Prouver ce résultat.

Notons $a - 1, a, a + 1, a + 2$ quatre entiers naturels consécutifs quelconques.

$$P(a) = (a-1)a(a+1)(a+2)+1 = (a-1)(a+1)a(a+2)+1 = (a^2-1)(a^2+2a)+1$$

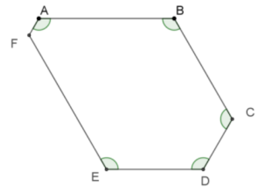
Soit, en développant, $P(a) = a^4 - 2a^3 - a^2 - 2a + 1$

Si $P(a)$ est un carré, il ne peut que s'écrire $P(a) = (a^2 + pa + q)^2$ ce qui donne en développant cette deuxième expression de $P(a) = a^4 + 2pa^3 + (p^2 + 2q)a^2 + 2pqa + q^2$, ce qui donne $2p = 2$ soit $p = 1$ et $p^2 + 2q = -1$ d'où $q = -1$.

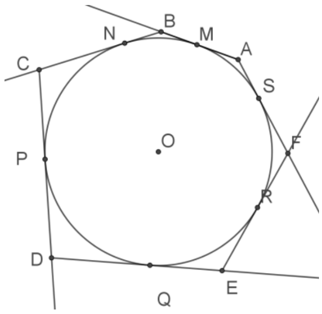
On peut alors vérifier que $(a^2 + a - 1)^2 = a^4 - 2a^3 - a^2 - 2a + 1$

Exercice S4. 6 Hexagones à côtés entiers

Les deux questions sont indépendantes.

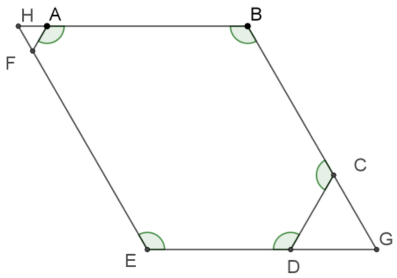


1. Les angles d'un hexagone ABCDEF ont tous la même mesure 120°. Le côté [AB] mesure 7, [BC] mesure 6, [CD] mesure 3 et [DE] mesure 5. Combien mesurent les autres côtés?



2. Cinq côtés successifs d'un hexagone ABCDEF mesurent dans l'ordre AB = 1, puis BC = 2, CD = 3, DE = 4 et EF = 5. Les six côtés de cet hexagone sont tous tangents à un même cercle. Combien mesure [FA]?

N.B. La figure n'est pas juste pour ce qui concerne les mesures des segments représentés.



1. Les droites (BC) et (ED) se coupent en G, les droites (BA) et (EF) se coupent en H. Les triangles CDG et HAF sont équilatéraux (ils ont chacun deux angles de mesure 60°, supplémentaires d'angles de mesure 120°). Les droites (BG) et (EH) sont parallèles tout comme les droites (BH) et (GE). Le quadrilatère BHEG est un parallélogramme, et donc la longueur BH est égale à la longueur GE, donc HA = 1. La longueur EH est égale à la longueur GB donc FE = 8.

2. Appelons M, N, P, Q, R et S les points de contact des côtés de l'hexagone avec le cercle. D'après les propriétés des tangentes, on peut écrire les égalités $\mathrm{BM} = \mathrm{BN}, \mathrm{CN} = \mathrm{CP}, \mathrm{DP} = \mathrm{DQ}, \mathrm{EQ} = \mathrm{ER}, \mathrm{FR} = \mathrm{FS}, \text{et } \mathrm{AS} = \mathrm{AM}$. D'où il ressort que $\mathrm{AF} = \mathrm{AS} + \mathrm{SF} = \mathrm{AM} + \mathrm{RF} = 1 - \mathrm{BM} + 5 - \mathrm{ER} = 6 - \mathrm{BN} - \mathrm{EQ} = 6 - (2 - \mathrm{CN}) - (4 - \mathrm{DQ})$

Continuons : $\mathrm{AF} = \mathrm{CN} + \mathrm{DQ} = 3 - \mathrm{PD} + \mathrm{PD}$

Finalement $\mathrm{AF} = 3$.

Exercice S4. 7 Hommage à François Viète (1540 – 1603)

François Viète, cryptologue et géomètre, est aussi un des fondateurs de l'algèbre moderne. Il établit des *relations entre coefficients et racines d'un polynôme :* par exemple, dans le cas du troisième degré, si la fonction polynôme donnée par $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ prend la valeur 0 pour trois nombres (à l'époque, positifs), t, u et v, alors on a, pour tout x, $P(x) = (x-t)(x-u)(x-v)$ et donc $c = -tuv, b = tu + uv + vt$ et $a = -(t+u+v)$

1. Effectuer le développement et retrouver le résultat.

2. Si la fonction polynôme définie par $P(x) = x^3 + mx + 6$ admet trois racines entières (nombres entiers dont l'image est 0), quelle est la valeur de m ?

1. Le résultat est donné dans l'énoncé.

En développant et en considérant :

- le terme constant, $-tuv = 6$ et donc t, u et v sont des diviseurs de -6 ;
- le coefficient de x^2, $u + v + t = 0$;
- $m = tu + uv + vt$.

Les seules possibilités, pour que les deux premières égalités soient vérifiées, correspondent à une racine valant -3 et les deux autres 1 et 2 ou une racine valant 3 et les autres -1 et -2. Dans tous les cas, comme t, u, v jouent des rôles symétriques, $m = tu + uv + vt = -3 + 2 - 6 = -7$.

Exercice S4. 8 À la fin, il n'en reste presque plus

Pour $n \in \{2,3, \dots ,2\,020,2\,021\}$, on considère le produit P des nombres $\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$:

$$P=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\dots\left(1-\frac{1}{2\,020^2}\right)\left(1-\frac{1}{2\,021^2}\right)$$

Simplifier l'écriture de P.

Pour tout entier $n \in \{2,3, \dots ,2\,020,2\,021\}$, $1-\frac{1}{n^2}=\frac{n^2-1}{n^2}=\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}$.

On ne déduit :

$P=\frac{1\times 3}{2^2}\times\frac{2\times 4}{3^2}\times\frac{3\times 5}{4^2}\times\dots\times\frac{2\,018\times 2\,020}{2\,019^2}\times\frac{2\,019\times 2\,021}{2\,020^2}\times\frac{2\,020\times 2\,022}{2\,021^2}$.

On constate que les carrés des dénominateurs se simplifient chacun avec deux facteurs de deux numérateurs distincts et qu'il ne reste que :

$$P=\frac{1}{2}\times\frac{2\,022}{2\,021}=\frac{2\,022}{4\,042}$$

Exercice S4. 9 Jouons avec les puissances de 2

Soit n un entier naturel non nul. On cherche à écrire successivement les nombres entiers de 1 à n puis, à la ligne suivante les mêmes nombres dans un autre ordre mais de sorte que la somme des deux nombres d'une même colonne soit dans tous les cas une puissance de 2. Par exemple, pour $n=6$:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ \hline 2 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \end{array}$$

a. Pour $=6$, existe-t-il une autre manière de placer les nombres en deuxième ligne tout en gardant la propriété des sommes ?

b. On suppose maintenant que $n=8$. Existe-t-il une écriture du même type ? Si oui, est-elle unique ?

c. On suppose maintenant que $n=10$. Existe-t-il une écriture du même type ? Si oui, est-elle unique ?

d. On suppose maintenant que $n=2^k$. Pour quelles valeurs de l'entier naturel non nul k existe-t-il une écriture du même type ?

a. Pour $n=6$, la somme des nombres d'une même colonne doit être inférieure ou égale à $6+6=12$. Les seules puissances de 2 qui conviennent sont donc 2, 4 ou 8.

2 ne peut être obtenu qu'avec $1+1$;

4 ne peut être obtenu qu'avec $1+3, 2+2$ ou $3+1$

8 ne peut être obtenu qu'avec $2+6, 3+5, 4+4, 5+3$ ou $6+2$.

Dans la deuxième ligne, 4 est donc nécessairement couplé avec 4, 5 avec 3 et 6 avec 2 d'où 2 est nécessairement couplé avec 6, d'où 3 est nécessairement couplé avec 5 et 1 avec 1 (on ne peut coupler 3 avec 1 car alors 5 serait couplé avec 1, ce qui ne donnerait pas une somme puissance de 2).

b. On reprend le même raisonnement, les puissances de 2 pouvant être obtenues étant cette fois-ci 2, 4, 8 ou 16. Pour l'obtention de 8, on ajoute $7+1$ et $1+7$ et 16 ne peut obtenu qu'avec $8+8$.

On constate alors, en complétant la deuxième ligne au fur et à mesure que 8 est couplé avec 8, 1 avec 7, 2 avec 6, 3 avec 5, 4 avec 46 avec 2, 7 avec 1 et 5 avec 3.

L'écriture obtenue est bien unique.

c. On mène le même raisonnement, les puissances de 2 pouvant être obtenues par sommes étant toujours 2, 4, 8 et 16 et on obtient, en plaçant successivement les sommes $10+6, 9+7, 8+8, 6+10, 7+9, 4+4,$ $5+3, 2+2, 3+5, 1+1$, une unique écriture de la deuxième ligne qui est 1 2 5 4 3 10 9 8 7 6.

d. Montrons que pour toute valeur de k, on peut trouver une écriture de la deuxième ligne qui respecte la propriété des sommes puissances de 2.

La première ligne s'écrit : $1 \quad 2 \quad 3 \quad \dots \quad 2^k-2 \quad 2^k-1 \quad 2^k$

Si on choisit comme seconde ligne : $2^k-1 \quad 2^k-2 \quad 2^k-3 \dots \quad 2 \quad 1 \quad 2^k$

Les sommes sont soit $p+2^k-p=2^k$, où p est un entier compris entre 1 et 2^k-1, soit $2^k+2^k=2^{k+1}$.

Dans tous les cas, on obtient une puissance de 2.