ACADÉMIE
DE VERSAILLES
Liberté
Égalité
Fraternité

Pépinière académique de mathématiques

Stage en ligne de mars à mai 2021 proposé aux élèves de seconde

Fiche numéro 4

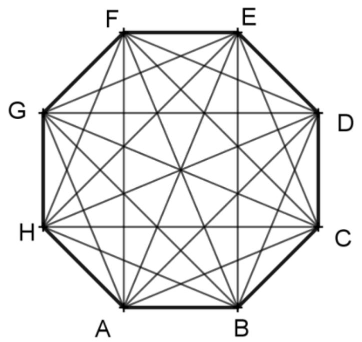
Les propositions de solution de chaque exercice doivent être envoyées d'ici le lundi 17 mai à l'adresse euler.pepiniere@ac-versailles.fr, sous forme numérique (format .pdf ou image), en pièce jointe ou avec un système de dépôt pour les fichiers volumineux, par les professeurs et selon les modalités précisées dans le courrier envoyé dans les lycées (envoi des propositions d'au plus deux équipes).

Exercice S4. 1 Comment faire table rase

3	5
5	3

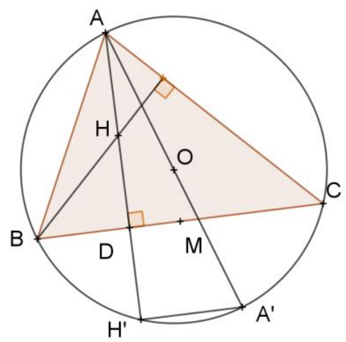
Sur un échiquier à 4 cases, on a disposé des jetons. Les deux mouvements suivants sont possibles :
1. Si aucune des cases d'une ligne n'est vide, on peut prendre un jeton dans chaque case de cette ligne ;
2. On peut doubler le nombre de jetons de toutes les cases d'une colonne.
Montrer qu'il est possible, en un nombre fini de mouvements, de vider le tableau représenté à gauche.

Exercice S4. 2 Diagonales et côtés de l'octogone régulier



1. Un octogone régulier possède 8 côtés (ça c'est banal). Combien possède-t-il de diagonales (segments dont les extrémités sont des sommets non voisins de l'octogone) ?
2. Certains des supports de côtés ou de diagonales sont parallèles. Combien de directions de droites (ensembles de droites parallèles) constituent-ils ?
3. Quelles sont les mesures des angles formés par les côtés et les diagonales ayant une extrémité commune ?

Exercice S4. 3 Paléontologie



Du triangle ABC, on ne connaît que l'orthocentre H, le pied T de la hauteur issue de A et le milieu F de l'arc $\widehat{BC}$ du cercle circonscrit au triangle. Reconstituer le triangle ABC.
N.B. On supposera que F, T et A ne sont pas alignés et sont deux à deux distincts, ce qui rend le triangle cherché scalène (*scalène signifie ni rectangle, ni isocèle*).

Préalable :
On pourra commencer par montrer la propriété suivante : Soit A, B et C trois points d'un cercle Γ de centre O. On appelle H l'orthocentre du triangle ABC (qu'on suppose distinct de A, B et C), M le milieu du côté [BC], D le pied de la hauteur issue de A du triangle, A' le point de Γ diamétralement opposé à A. Alors H', l'autre point d'intersection de (AD) avec Γ, est le symétrique de H par rapport à (BC).

Exercice S4. 4 Il n'y a pas d'âge pour l'amitié

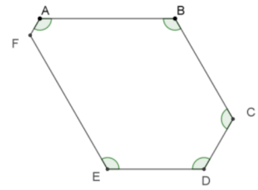
Amandine, Béatrice et Camille sont trois bonnes amies. Il y a dix ans, Amandine avait le double de la somme des âges de Béatrice et de Camille. Aujourd'hui, Amandine a le triple de la différence des âges de Béatrice et de Camille. Nous savons de plus que Camille a l'âge que Béatrice avait lorsque Béatrice avait exactement le tiers de l'âge d'Amandine. Quels sont les âges des trois amies ?

Exercice S4. 5 Pour fabriquer des carrés parfaits

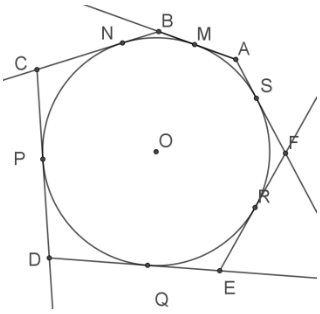
Remarquons pour commencer que $1 \times 2 \times 3 \times 4 + 1 = 25$, $2 \times 3 \times 4 \times 5 + 1 = 121$, etc. Il semble que chaque fois qu'on ajoute 1 au produit de quatre entiers consécutifs, on obtient un carré parfait (c'est-à-dire le carré d'un entier). Prouver ce résultat.

Exercice S4. 6 Hexagones à côtés entiers

Les deux questions sont indépendantes.



1. Les angles d'un hexagone ABCDEF ont tous la même mesure 120°. Le côté [AB] mesure 7, [BC] mesure 6, [CD] mesure 3 et [DE] mesure 5. Combien mesurent les autres côtés?



2. Cinq côtés successifs d'un hexagone ABCDEF mesurent dans l'ordre [AB] = 1, puis [BC] = 2, [CD] = 3, [DE] = 4 et [EF] = 5. Les six côtés de cet hexagone sont tous tangents à un même cercle. Combien mesure [FA]?

N.B. La figure n'est pas juste pour ce qui concerne les mesures des segments représentés.

Exercice S4. 7 Hommage à François Viète (1540 – 1603)

François Viète, cryptologue et géomètre, est aussi un des fondateurs de l'algèbre moderne. Il établit des *relations entre coefficients et racines d'un polynôme :* par exemple, dans le cas du troisième degré, si la fonction polynôme donnée par $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ prend la valeur 0 pour trois nombres (à l'époque, positifs), t, u et v, alors on a, pour tout x, $P(x) = (x - t)(x - u)(x - v)$ et donc $c = -tuv, b = tu + uv + vt$ et $a = -(t + u + v)$

1. Effectuer le développement et retrouver le résultat.

2. Si la fonction polynôme définie par $P(x) = x^3 + mx + 6$ admet trois racines entières (nombres entiers dont l'image est 0), quelle est la valeur de m ?

Exercice S4. 8 À la fin, il n'en reste presque plus

Pour $n \in \{2,3, \dots ,2\,020,2\,021\}$, on considère le produit P des nombres $\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$:

$$P = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\left(1 - \frac{1}{4^2}\right)\dots\left(1 - \frac{1}{2\,020^2}\right)\left(1 - \frac{1}{2\,021^2}\right)$$

Simplifier l'écriture de P.

Exercice S4. 9 Jouons avec les puissances de 2

Soit n un entier naturel non nul. On cherche à écrire successivement les nombres entiers de 1 à n puis, à la ligne suivante les mêmes nombres dans un autre ordre mais de sorte que la somme des deux nombres d'une même colonne soit dans tous les cas une puissance de 2. Par exemple, pour $n = 6$:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ \hline 2 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \end{array}$$

a. Pour $= 6$, existe-t-il une autre manière de placer les nombres en deuxième ligne tout en gardant la propriété des sommes ?

b. On suppose maintenant que $n = 8$. Existe-t-il une écriture du même type ? Si oui, est-elle unique ?

c. On suppose maintenant que $n = 10$. Existe-t-il une écriture du même type ? Si oui, est-elle unique ?

d. On suppose maintenant que $n = 2^k$. Pour quelles valeurs de l'entier naturel non nul k existe-t-il une écriture du même type ?