ACADÉMIE DE VERSAILLES
Liberté
Égalité
Fraternité

Pépinière académique de mathématiques

Stage « en ligne » de janvier et février 2021

Éléments de solution Fiche numéro 4

Les propositions de solution de chaque exercice doivent être envoyées d'ici le vendredi 12 mars à l'adresse euler.pepiniere@ac-versailles.fr, sous forme numérique (format .pdf ou image), en pièce jointe ou avec un système de dépôt pour les fichiers volumineux, par les professeurs selon les modalités précisées dans le courrier envoyé dans les lycées (envoi des propositions d'au plus deux équipes).

Exercice CG 4. 1 Des entiers ?

Trouver tous les triplets (p,q,r) de nombres premiers tels que les trois nombres $\frac{p^2+2q}{q+r}, \frac{q^2+9r}{r+p}, \frac{r^2+3p}{p+q}$ sont des entiers naturels.
Avertissement : Pour savoir si un nombre entier en divise un autre, une méthode naïve peut être de travailler sur le quotient du second par le premier. Dans cet exercice, les quotients ne sont qu'une manière de poser le problème, les raisonnements se font sur des entiers et la relation « divise ».

On note $F(p,q,r) = \frac{p^2+2q}{q+r}$, $G(p,q,r) = \frac{q^2+9r}{r+p}$ et $H(p,q,r) = \frac{r^2+3p}{p+q}$. On veut avoir :
1^er^ cas : $q+r$ est un entier pair. Alors p^2+2q doit aussi être pair donc p^2 doit l'être c'est-à-dire p doit l'être. Comme p est un nombre premier, $p=2$. De plus $F(p,q,r) = F(2,q,r) = \frac{2q+4}{q+r}$. Comme r est un nombre premier, $r \geq 2$ donc $q+r \geq q+2 > 0$ et $\frac{2q+4}{q+r} \leq 2$. On a donc $\frac{2q+4}{q+r} = 1$ ou $\frac{2q+4}{q+r} = 2$ soit $q = r-4$ ou $r = 2$.
Si $r=2$, alors $G(p,q,r) = G(2,q,2) = \frac{q^2+18}{4}$ et pour que $\frac{q^2+18}{4}$ soit un entier naturel, on doit avoir q^2 pair donc q pair, soit puisque q est premier $q=2$. Mais 4 ne divise pas 10…
Donc $q = r-4$. D'une part cela entraine, puisque q et r sont des nombres premiers, $r \geq 7$. D'autre part,
$H(p,q,r) = H(2,r-4,r) = \frac{r^2+6}{2+(r-4)} = \frac{r^2+6}{r-2} = r+2+\frac{10}{r-2}$.
$H(p,q,r)$ est donc un entier si et seulement si $r-2$ divise 10 soit $r-2$ divise 5 puisque r, nombre premier supérieur ou égal à 7 ne peut être égal à 2, le seul nombre premier pair. La seule valeur possible pour r est donc 7 et alors $q=3$.
On vérifie alors que $F(2,3,7) = 1$, $G(2,3,7) = 8$ et $H(2,3,7) = 11$.
Le triplet (2,3,7) convient bien.
2^e^ cas : $q+r$ est un entier impair. Alors l'un des entiers q et r est pair donc égal à 2 puisqu'ils sont premiers.
Si $r=2$, alors q est un entier impair supérieur ou égal à 3 et comme $H(p,q,2) = \frac{3p+4}{p+q} = 3+\frac{4-3q}{p+q}$, $H(p,q,2) < 3$.
On a donc $H(p,q,2) = 1$ soit $q = 2(p+2)$, ce qui est impossible car q est un entier impair, ou $H(p,q,2) = 2$ soit $p = 2(q-2)$. Le nombre p étant premier, la seule possibilité est $p=2$ et $q=3$.
Mais alors $G(p,q,r) = G(2,3,2) = \frac{27}{4}$ qui n'est pas un entier.
On regarde maintenant si $q=2$. Alors r doit être impair. De plus comme $G(p,q,r)$ doit être un entier, $p+r$ doit diviser $9r+4$. Or, comme r est impair, $9r+4$ l'est aussi ainsi que son diviseur $p+r$ et donc p est pair (car r est impair). La seule possibilité est donc alors $p=2$. Comme $H(p,q,r)$ doit être un entier naturel, 4 doit diviser r^2+6, ce qui est impossible puisque r est impair.
Conclusion : le problème n'a qu'une solution qui est le triplet (2,3,7).

Exercice CG4. 2 Une équation fonctionnelle
Déterminer toutes les fonctions de **R** dans **R** telles que :
(*) pour tous réels distincts x et y, $f(x) \neq f(y)$
(**) pour tous réels x et y, $f\left(x+f\big(f(-y)\big)\right) = f(x) + f(f(y))$.

Si on pose $a = f(0)$, alors l'égalité de l'assertion (**) s'écrit en posant $x = a - f(a)$ et $y = 0$:

$f\big(a - f(a) + f(a)\big) = f\big(a - f(a)\big) + f\big(f(0)\big) = f\big(a - f(a)\big) + f(a)$
Soit $f(a) = f(a - f(a)) + f(a)$ ce qui entraine $f(a - f(a)) = 0$.
De plus, l'égalité de l'assertion (**) s'écrit en posant $x = a - f(a)$ et $y = x$:
$f\left(a - f(a) + f\big(f(-x)\big)\right) = f\big(a - f(a)\big) + f(f(x))$ soit $f\left(a - f(a) + f\big(f(-x)\big)\right) = f(f(x))$
puisque $f(a - f(a)) = 0$.
D'après (*), on en déduit que $a - f(a) + f\big(f(-x)\big) = f(x)$ soit $f\big(f(-x)\big) = f(x) - (a - f(a))$.
Enfin, l'égalité de l'assertion (**) s'écrit en posant $y = -x$:
$f\left(x + f\big(f(y)\big)\right) = f(x) + f(f(-y))$ soit, en utilisant l'égalité précédente :
$f(x + f(-y) - \big(a - f(a)\big) = f(x) + f(y) - (a - f(a))$.
En échangeant les rôles de x et y, on a aussi $f(y + f(-x) - \big(a - f(a)\big) = f(x) + f(y) - (a - f(a))$
D'où $f(y + f(-x) - \big(a - f(a)\big)) = f(x + f(-y) - \big(a - f(a)\big))$.
D'après (*), on en déduit que $y + f(-x) - \big(a - f(a)\big) = x + f(-y) - \big(a - f(a)\big)$ soit $y + f(-x) = x + f(-y)$.
Cette égalité est vraie pour tous réels x et y, donc pour $y = 0$: pour tout réel x, $f(-x) = x + f(0)$ ou encore pour tout réel x, $f(x) = f(0) - x$.
On peut vérifier que pour tout réel a, la fonction f définie sur **R** par $f(x) = a - x$ est bien solution du problème.

Exercice CG 4. 3 Un ensemble de nombres

On considère l'ensemble A des nombres réels x pour lesquels existent des entiers relatifs a et b tels que

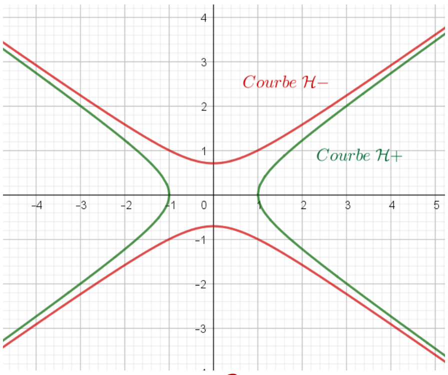
$$x = a + b\sqrt{2}.$$

a. Montrer que cette écriture est unique (si $x \in A$ et si $x = a + b\sqrt{2}$ et $x = \alpha + \beta\sqrt{2}$ où a, b, α et β sont des entiers relatifs, alors $a = \alpha$ et $b = \beta$).
b. Montrer que le produit de deux éléments de A est un élément de A.
c. On appelle *conjugué* de $x = a + b\sqrt{2}$ le nombre $\bar{x} = a - b\sqrt{2}$ et *norme* de x le nombre $N(x) = a^2 - 2b^2$.
Montrer que la norme du produit de deux éléments de A est le produit de leurs normes.
d. À quelle condition sur $N(x)$ le nombre x possède-t-il un inverse dans A ?

a. Supposons que $(a - \alpha) + (b - \beta)\sqrt{2} = 0$. Ou bien $b = \beta$, ce qui implique $a = \alpha$. Ou bien $b \neq \beta$, et alors $\sqrt{2} = \frac{\alpha - a}{b - \beta}$, ce qui implique que $\sqrt{2}$ est rationnel, ce qui n'est pas.
b. Le produit $\big(a + b\sqrt{2}\big)\big(a' + b'\sqrt{2}\big)$ s'écrit $(aa' + 2bb') + (ab' + a'b)\sqrt{2}$, $aa' + bb'$ et $ab' + a'b$ étant des entiers. Donc on a bien un élément de A.
c. Si on écrit $N(x) = x\bar{x}$, on peut voir que $N(xy) = xy\overline{xy}$ et, en montrant que $\overline{xy} = \bar{x}\bar{y}$ et en utilisant la commutativité du produit dans A (les deux peuvent s'établir facilement), on obtient bien $N(xy) = N(x)N(y)$.
d. On se donne un élément $x = a + b\sqrt{2}$ dans A et on se demande s'il existe un élément de A, $a' + b'\sqrt{2}$, tel que $aa' + 2bb' = 1$ et $ab' + a'b = 0$. Le produit des normes de x et de son inverse est la norme de leur produit, c'est-à-dire la norme de 1, c'est-à-dire 1. Pour obtenir deux entiers dont le produit est 1, il ne peut s'agir que de 1 et 1 ou -1 et -1. Une condition nécessaire pour que x soit inversible est donc que $|a^2 - 2b^2| = 1$. Cette condition est suffisante, car dans ce cas l'un des produits de $a + b\sqrt{2}$ par $a - b\sqrt{2}$ ou $-a + b\sqrt{2}$ est égal à 1.

Exercice CG4. 3 *bis* Une équation de Pell-Fermat

a. On appelle $\mathcal{H}$ l'ensemble des couples (x, y) de réels vérifiant $|x^2 - 2y^2| = 1$. $\mathcal{H}$ est la réunion de deux sous-ensembles, $\mathcal{H}^+$, ensemble des couples pour lesquels $x^2 - 2y^2 = 1$, et $\mathcal{H}^-$, ensemble des couples pour lesquels $x^2 - 2y^2 = -1$. Représenter $\mathcal{H}^+$et $\mathcal{H}^-$ sur un même graphique.
b. À tout entier n on associe les entiers $a_n$et b_n pour lesquels $\big(1 + \sqrt{2}\big)^n = a_n + b_n\sqrt{2}$. Prouver que pour tout n le couple (a_n, b_n) appartient à $\mathcal{H}$.
c. On considère l'application $\varphi\colon \begin{pmatrix} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto (x+2y, x+y) \end{pmatrix}$. Montrer que φ est bijective, expliciter son inverse.
d. Montrer que $(a_{n+1}, b_{n+1}) = \varphi(a_n, b_n)$
e. Démontrer finalement que les couples d'entiers naturels (a, b) solutions de l'équation $|a^2 - 2b^2| = 1$ sont les couples (a_n, b_n).



a. La courbe $\mathcal{H}^+$est l'ensemble des points dont les coordonnées (x, y) satisfont $x^2 - 2y^2 = 1$, ce qui se traduit par $y = \sqrt{\frac{x^2-1}{2}}$ ou $y = -\sqrt{\frac{x^2-1}{2}}$, c'est la courbe dessinée en vert ci-contre, la courbe $\mathcal{H}^-$est l'ensemble des points dont les coordonnées vérifient $x^2 - 2y^2 = -1$, ce qui se traduit par $y = \sqrt{\frac{x^2+1}{2}}$ ou $y = -\sqrt{\frac{x^2+1}{2}}$, c'est la courbe dessinée en rouge ci-contre.

b. La norme du nombre $a_n + b_n\sqrt{2}$ (au sens de l'exercice 2) est $a_n^2 - 2b_n^2$. C'est aussi la norme du nombre $\left(1+\sqrt{2}\right)^n$ (produit d'éléments de A), qui est $(1-2)^n$, soit $(-1)^n$, d'où le résultat.

c. Le système $\begin{cases} x + 2y = a \\ x + y = b \end{cases}$ a pour unique solution $(2b - a, a - b)$, ce qui répond à toute la question.

d. Le produit $\left(1+\sqrt{2}\right)\left(a_n + b_n\sqrt{2}\right)$ s'écrit $a_n + 2b_n + (a_n + b_n)\sqrt{2}$.

e. Si le point M, de coordonnées entières a et b, appartient à l'une des deux courbes, l'antécédent par φ du couple (a, b) est le couple d'entiers $(2b - a, a - b)$. On s'intéresse ici aux couples d'entiers naturels. Observons que :
1) $a - (2b - a) = 2a - 2b$. Ce nombre est du signe de $a - b$, il est donc positif (en effet, si deux entiers naturels a et b sont tels que $|a^2 - 2b^2| = 1$, alors $b \leq a$) ;
2) $b - (a - b) = 2b - a$ et ce nombre est lui aussi positif dès que $a \geq 2$.
Il s'ensuit qu'à partir d'une solution couple d'entiers naturels de l'équation $|x^2 - 2y^2| = 1$, on en fait apparaître, grâce à l'application φ^{-1}, une autre constituée de deux entiers plus petits que les précédents. Après un certain nombre (fini) d'opérations identiques, on parvient au couple $(1, 0)$, à partir duquel l'application φ fournit les couples (a_n, b_n), qui sont donc les couples solutions.

Exercice CG 4. 4 Une minoration

On considère la fonction $f = \begin{pmatrix} R^{+*} \to R^{+*} \\ x \mapsto x^x \end{pmatrix}$

1. Déterminer le minimum de la fonction f.
2. Pour tout couple de réels strictement positifs (x, y), montrer que $x^y + y^x > 1$

1. L'étude de la fonction f et de sa fonction dérivée, donnée par : pour tout $x > 0, f'(x) = (\ln x + 1)x^x$, aboutit au tableau de variation suivant :

x	0		$\frac{1}{e}$		1		$+\infty$
$f(x)$	1 ‖	↘	$e^{-\frac{1}{e}}$	↗	1	↗	$+\infty$

Le minimum de la fonction f est donc $e^{-\frac{1}{e}}$. Il st atteint en $\frac{1}{e}$. Dans la suite, on appelle ce minimum m.

2. On peut supposer $y \leq x < 1$, car x et y jouent le même rôle et que x^y >1 dès que $x > 1$

N.B. Cette démarche est inspirée par la lecture de la question…

On se donne $b \in]0,1[$ et on étudie la fonction $g : x \mapsto x^b + b^x$… sur l'intervalle$]b, 1[$ (conformément à la supposition faite plus haut). Le premier terme est supérieur à b^b, le second est supérieur à b, la somme est donc supérieure à $b + e^{-\frac{1}{b}}$. Ce nombre est inférieur à 1 dès que $b > 1 - m$, mais ça ne règle pas tout.

Si on étudie les variations de la fonction g, on écrit la fonction dérivée qui donne de tout x l'image

$$g'(x) = bx^{b-1} + \ln b \times b^x$$

Le signe de $g'(x)$ est celui de $h(x) = \ln b + b^{1-x}x^{b-1}$

On dérive de nouveau :

$$h'(x) = (b-1)\ln x \times x^{b-1}\, b^{1-x} + (1-x)\ln b \times b^x x^{b-1} = b^{1-x}x^{b-1}\big((b-1)\ln x + (1-x)\ln b\big)$$

Posons $j(x) = (b-1)\ln x + (1-x)\ln b$. Si on dérive de nouveau la fonction j, on trouve $j'(x) = \frac{b-1}{x} - \ln b$ puis $j''(x) = \frac{1-b}{x^2}$ qui indique que j' est croissante sur $[b, 1[$, de $\frac{b-1}{b} - \ln b$ à $b - 1 - \ln b$, négative sur $\left]b, \frac{b-1}{\ln b}\right]$, positive ensuite (on doit vérifier que, sur $]0, 1[$, $\frac{b-1}{\ln b} \geq b$).

Donc la fonction j est décroissante sur $\left]b, \frac{b-1}{\ln b}\right]$, elle décroit de 0 à une certaine quantité négative (que nous n'écrivons pas) puis croît sur $\left]\frac{b-1}{\ln b}, 1\right[$ pour atteindre en 1 la valeur 0. Donc cette fonction est négative et comme son signe est celui de h', on en déduit que la fonction h est décroissante sur $[b, 1[$, et comme elle prend en b la valeur $1 + \ln b$, elle est donc négative dans le cas où $1 + \ln b < 0$, c'est-à-dire $b < \frac{1}{e}$. Dans ce cas, la fonction g est décroissante, elle décroit de $g(b) = 2b^b$ à $g(1) = 1 + b$, donc elle reste supérieure à 1.

Bilan : la minoration est obtenue dans le cas où $< \frac{1}{e}$. Nous avions conclu qu'elle était aussi obtenue dans le cas où $b > 1 - m$ (rappelons que $m = e^{-\frac{1}{e}}$).

b	0		0,3678794412
b	0,3077993724		1

Ce petit schéma (dans lequel figurent des valeurs suffisamment approchées des valeurs frontières) montre que la minoration est obtenue sur tout l'intervalle $[0, 1]$. Ouf !

Exercice CG 4. 5 De la vie sur Mars !

La dernière sonde, envoyée sur Mars par l'Union Européenne, a réussi à observer ce que l'on attendait depuis longtemps : des traces de vie sur la Planète Rouge ! Il s'agit évidemment d'une forme primitive et les êtres observés ne mesurent pas plus d'un millième de millimètre, ce qui explique la difficulté que la sonde a eue à remarquer ce que nous appellerons des cellules.

Avec des informations aussi partielles, les scientifiques ont toutefois pu observer les faits suivants :

- Il y a trois espèces de cellules, que l'on désignera par A, B et C.
- La reproduction des cellules implique la participation de trois cellules « parents ».
- Il ne peut y avoir reproduction que lorsque les trois parents sont « compatibles », c'est-à-dire qu'au moins deux sont de la même espèce.

On a observé des proportions respectives a, b et c de cellules des différentes espèces, $a + b + c = 1$.

1. *a.* Quelle est la probabilité p que trois cellules prises au hasard soient compatibles ?

b. Montrer que $\geq \frac{7}{9}$. On pourra établir une inégalité à c fixé.

Les scientifiques ont établi que lorsque les trois espèces de parents sont les mêmes, la descendance est de la même espèce que ses parents. En revanche, lorsque deux parents sont d'une espèce α et que le trosième, parent est d'une espèce β, les scientifiques hésitent entre deux modèles :

- Modèle 1 : le descendant est du type de l'espèce majoritaire α,
- Modèle 2 : le descendant est du type de l'espèce minoritaire β.

Pour comparer ces modèles, on va estimer l'évolution des proportions de cellules des différentes espèces au cours du temps. On note $a_0 > b_0 > c_0$ les proportions des différentes espèces de la génération 0 et, pour tout entier naturel n, a_n, b_n, c_n les proportions des différentes espèces de la génération n. Pour déterminer $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$, on prend trois cellules au hasard suivant les proportions a_n, b_n, c_n et a_{n+1} sera la probabilité que la descendance soit de type A, sachant que les trois parents sont compatibles. Il en est de même pour b_{n+1} et c_{n+1}.

2. Étude du premier scénario. On suppose dans cette question que la génétique des cellules martiennes suit le premier modèle.

a. Vérifier que $a_{n+1} = \frac{a_n^2(3-2a_n)}{1-6a_nb_nc_n}$, $\quad b_{n+1} = \frac{b_n^2(3-2b_n)}{1-6a_nb_nc_n}$ $\quad$ et $\quad c_{n+1} = \frac{c_n^2(3-2c_n)}{1-6a_nb_nc_n}$.

b. On rappelle dans cette question et les suivantes que $a_0 > b_0 > c_0$. Montrer que pour tout entier naturel n, on a $a_n > b_n > c_n$. En déduire que $a_n > \frac{1}{3}$, $b_n < \frac{1}{2}$ et $c_n < \frac{1}{3}$.

c. Vérifier que les suites $(a_n - b_n)_{n\geq 0}$ et $(a_n - c_n)_{n\geq 0}$ sont croissantes.

d. Prouver que les suites $(a_n)_{n\geq 0}$, $(b_n)_{n\geq 0}$ et $(c_n)_{n\geq 0}$ convergent et déterminer leurs limites.

3. Étude du second scénario. On suppose maintenant que c'est le deuxième modèle qui est privilégié.

a. Déterminer $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$ en fonction de a_n, b_n, c_n.

b. On suppose à partir de maintenant que $1 > a_0 > b_0 > c_0 > 0$.

Montrer que pour tout n, on a $1 > a_n > b_n > c_n > 0$.

c. On pose $f(c) = \frac{3}{2} - 3c + \frac{5}{2}c^2$ et $g(c) = 1 - 6c^2 + 12c^3$. Vérifier que $\frac{c_{n+1}}{c_n} \geq \frac{f(c_n)}{g(c_n)}$.

d. Déterminer les limites des suites $(a_n)_{n\geq 0}$, $(b_n)_{n\geq 0}$ et $(c_n)_{n\geq 0}$.

e. Quel scénario vous semble le plus pertinent ?

1. *a.* La probabilité qu'il ny ait pas compatibilité est $6abc$ (pour les 6 cas $ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA$). Donc la probabilité qu'il y ait compatibilité est $\boldsymbol{p = 1 - 6abc}$.

b. Pour minorer p on va majorer $abc = a(1-a-c)c = ac - a^2c - ac^2$.

Soit c un réel donné dans l'intervalle $[0,1]$. On pose $f(x) = cx - cx^2 - c^2x = -cx^2 + (c - c^2)x$.

Comme le coefficient de x^2est négatif, la fonction trinôme du second degré f admet un maximum en $x_0 = \frac{c-c^2}{2c} = \frac{1-c}{2}$. Donc $f(a) \leq f\left(\frac{1-c}{2}\right)$. Or $abc = f(a)$ et $f\left(\frac{1-c}{2}\right) = -c\left(\frac{1-c}{2}\right)^2 + (c-c^2)\frac{1-c}{2} = \frac{c^3-2c^2+c}{4}$

Donc $abc \leq \frac{c^3-2c^2+c}{4}$.

Soit g la fonction définie par $g(x) = x^3 - 2x^2 + x$. Sa dérivée est définie par $g'(x) = 3x^2 - 4x + 1$

Soit $g'(x) = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)(x-1)$. On en déduit le tableau de variation ci-dessous :

x	0		$\frac{1}{3}$		1
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{27}$	$\searrow$	0

Dont on déduit que $\frac{4}{27}$ est le maximum de la fonction g d'où $g(c) \leq \frac{4}{27}$ soit $f\left(\frac{1-c}{2}\right) \leq \frac{1}{27}$

c'est-à-dire $abc \leq \frac{1}{27}$ et donc $6abc \leq \frac{2}{9}$ d'où l'on tire $\boldsymbol{p \geq \frac{7}{9}}$.

2. *a.* Les cas où la descendance est A et les parents compatibles se produisent lorsque les parents sont : $AAA, AAB, ABA, BAA, AAC, ACA, CAA$, ce qui donne comme probabilité

$$a_n^3 + 3a_n^2b_n + 3a_n^2c_n = a_n^2(a_n + 3b_n + 3c_n) = a_n^2\big(a_n + 3(1-a_n)\big) = a_n^2(3 - 2a_n)$$

La probabilité que la descendance soit de type A sachant que les 3 parents sont compatibles est donc :

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2(3-2a_n)}{1 - 6a_nb_nc_n}$$

On fait le même raisonnement pour b_{n+1} et c_{N+1}.

b. Soit f la fonction définie par $f(x) = x^2(3-2x) = 3x^2 - 2x^3$. Sa dérivée est définie par $f'(x) = 6x - 6x^2 = 6x(1-x)$. Comme f' est strictement positive sur $]0,1[$, f est strictement croissante sur $[0,1]$.

Soit P_n la proposition « $0 < c_n < b_n < a_n < 1$ ». Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, P_n est vraie.

Par hypothèse, P_0 est vraie.

Si, pour un certain entier naturel n, P_n est vraie, alors $0 < c_n < b_n < a_n < 1$

Et comme f est croissante strictement sur $[0,1]$ et à valeurs dans $[0,1]$, $0 < f(c_n) < f(b_n) < f(a_n) < 1$.

En divisant par $1 - 6a_nb_nc_n$ qui est strictement positif, on obtient $0 < c_{n+1} < b_{n+1} < a_{n+1} < 1$

On a donc bien : **pour tout entier naturel $\boldsymbol{n}$, alors $\boldsymbol{0 < c_n < b_n < a_n < 1}$** .

On a alors, pour tout entier naturel n :

$c_n < b_n < a_n < 1$ et donc $a_n + b_n + c_n > 3c_n$, d'où $c_n < \frac{1}{3}$

$c_n < b_n < a_n < 1$ et donc $a_n + b_n + c_n < 3a_n$, d'où $a_n > \frac{1}{3}$

$c_n < b_n < a_n < 1$ et $a_n + b_n + c_n = 1$ d'où $2b_n < 1$ soit $b_n < \frac{1}{2}$.

c.

$$a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{a_n^2(3-2a_n)}{1-6a_nb_nc_n} - \frac{b_n^2(3-2b_n)}{1-6a_nb_nc_n} = \frac{a_n^2(3-2a_n) - b_n^2(3-2b_n)}{1-6a_nb_nc_n}$$

Or, comme, $0 < c_n < \frac{1}{3}$, $0 < b_n < \frac{1}{2}$ et $0 < a_n < 1$ donc $0 < 1 - 6a_nb_nc_n < 1$ donc $\frac{1}{1-6a_nb_nc_n} > 1$et donc $a_{n+1} - b_{n+1} > a_n^2(3 - 2a_n) - b_n^2(3 - 2b_n)$.

Or, $a_n^2(3 - 2a_n) - b_n^2(3 - 2b_n) = 3(a_n - b_n)(a_n + b_n) - 3(a_n^3 - b_n^3)$

Soit $a_n^2(3 - 2a_n) - b_n^2(3 - 2b_n) = 3(a_n - b_n)(a_n + b_n) - 3(a_n - b_n)(a_n^2 + a_nb_n + b_n^2)$

Comme $b_n < a_n$, $\frac{a_{n+1}-b_{n+1}}{a_n-b_n} > 3(a_n + b_n) - 3(a_n^2 + a_nb_n + b_n^2)$ et $a_n^2 + a_nb_n + b_n^2 = (a_n + b_n)^2 - a_nb_n$

Soit $\frac{a_{n+1}-b_{n+1}}{a_n-b_n} > 3(1 - c_n) - 2((1 - c_n)^2 - a_nb_n)$

Soit $\frac{a_{n+1}-b_{n+1}}{a_n-b_n} > 1 + c_n - 2c_n^2 + 2a_nb_n$. Comme $c_n < b_n < a_n$, $2a_nb_n > 2c_n^2$

Donc $\frac{a_{n+1}-b_{n+1}}{a_n-b_n} > 1 + c_n - 2c_n^2 + 2c_n^2 > 1 + c_n > 1$

Conclusion : **la suite $(a_n - b_n)$ est croissante**.

De même, on démontrerait que $\frac{a_{n+1}-c_{n+1}}{a_n-c_n} > 1 + b_n - 2b_n^2 + 2a_nc_n$

et $1 + b_n - 2b_n^2 + 2a_nb_n = 1 + b_n(1 - 2b_n) + 2a_nc_n$. Comme $b_n < \frac{1}{2}$ et a_n, c_n sont positifs, $\frac{a_{n+1}-c_{n+1}}{a_n-c_n} > 1$ d'où on déduit que **la suite $(a_n - c_n)$ est croissante**.

d. On en déduit la suite (v_n) définie par $v_n = a_n - b_n + a_n - c_n = 3a_n - 1$. Comme $a_n > \frac{1}{3}$, la suite (v_n) est croissante. Comme $a_n = \frac{v_n+1}{3}$, on en déduit que la suite (a_n). Comme elle est majorée par 1, on peut affirmer que **la suite (a_n) est convergente**. On note A sa limite.

De même la suite $(a_n - b_n)$ est croissante majorée par 1 donc elle converge et comme $b_n = (b_n - a_n) + a_n$, on en déduit que **la suite $(a_n - b_n)$ converge.** On note B sa limite.

De même, on montre que **la suite $(a_n - c_n)$ converge.** On note C sa limite.

On tire alors des relations de récurrence et par passage à la limite que :

$\boldsymbol{A = \frac{A^2(3-2A)}{1-6ABC}, B = \frac{B^2(3-2B)}{1-6ABC}}$ **et** $\boldsymbol{C = \frac{C^2(3-2C)}{1-6ABC}}$**.**

La relation $a_n + b_n + c_n = 1$ entraine de plus $A + B + C = 1$.

Si $C \neq 0$, alors $C(3 - 2C) = 1 - 6ABC$ et donc, d'après 1b., $C(3 - 2C) \geq \frac{7}{9}$

qui s'écrit aussi $-18C^2 + 27C - 7 \geq 0$, inéquation dont l'ensemble des solutions est $\left[\frac{1}{3}, \frac{7}{6}\right]$.

Or, pour tout entier n, $c_n \leq \frac{1}{3}$ donc $C \leq \frac{1}{3}$. Il n'y a donc alors qu'une seule possibilité : $C = \frac{1}{3}$, d'où l'on déduit $A + B = \frac{2}{3}$.

Comme, pour tout entier n, on a $c_n < b_n < a_n$ qui entraine $2c_n < 2b_n < a_n + b_n$, le théorème des gendarmes nous donne $\lim_{n\to\infty} 2b_n = \frac{2}{3}$ soit $B = \lim_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{3}$ et donc $A = \frac{1}{3}$.

Or, comme la suite $(a_n - b_n)$ est croissante, pour tout entier n, $a_n - b_n \geq a_0 - b_0 > 0$

D'où $A - B \geq a_0 - b_0 > 0$ ce qui contredit $A = B = \frac{1}{3}$. On a donc $\boldsymbol{C = 0}$.

On en déduit $A = A^2(3 - 2A)$

Comme $A - B > 0$ et $B \geq 0$, $A \neq 0$ et A est solution de l'équation $A(3 - 2A) = 1$ qui s'écrit $2A^2 - 3A + 1 = 0$

D'où $A = 1$ ou $A = \frac{1}{2}$. Dans ce deuxième cas, $B = \frac{1}{2}$ ce qui contredit $A - B > 0$.

Conclusion : $\boldsymbol{A = 1, B = 0, C = 0}$ et on vérifie que ces valeurs vérifient les trois égalités du 2d.

3. ***a.*** Dans le deuxième scénario, les cas où la descendance est A et les parents compatibles se produisent lorsque les parents sont : $AAA, ABB, BBA, BAB, ACC, CCA, CAC$, ce qui cette fois-ci donne comme probabilités :

$\boldsymbol{a_{n+1}} = \frac{a_n^3+3a_nb_n^2+3c_n^2a_n}{1-6a_nb_nc_n} = \boldsymbol{\frac{a_n^3+3a_n(b_n^2+c_n^2)}{1-6a_nb_nc_n}}$ et de même $\boldsymbol{b_{n+1} = \frac{b_n^3+3b_n(a_n^2+c_n^2)}{1-6a_nb_nc_n}}$ et $\boldsymbol{c_{n+1} = \frac{c_n^3+3c_n(b_n^2+a_n^2)}{1-6a_nb_nc_n}}$

b. Montrons à nouveau par récurrence que pour tout entier n, $1 > a_n > b_n > c_n > 0$.

Par hypothèse, cette affirmation est vraie au rang 0.

Si maintenant, elle est vraie pour un certain rang n, alors, comme $1 - 6a_nb_nc_n > 0$,

$a_{n+1} - b_{n+1}$ est du signe de

$$a_n^3 + 3a_n(b_n^2 + c_n^2) - b_n^3 - 3b_n(a_n^2 + c_n^2) = a_n^3 - b_n^3 - 3a_nb_n(a_n - b_n) + 3c_n^2(a_n - b_n)$$

Soit $a_n^3 + 3a_n(b_n^2 + c_n^2) - b_n^3 - 3b_n(a_n^2 + c_n^2) = (a_n - b_n)(a_n^2 + a_nb_n + b_n^2 - 3a_nb_n + 3c_n^2)$

Soit $a_n^3 + 3a_n(b_n^2 + c_n^2) - b_n^3 - 3b_n(a_n^2 + c_n^2) = (a_n - b_n)((a_n - b_n)^2 + 3c_n^2)$

Ce qui permet d'affirmer que $a_{n+1} - b_{n+1} > 0$ puisque $a_n > b_n$.

On a donc bien, **pour tout entier n, $1 > a_n > b_n > c_n > 0$.**

c. $\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{c_n^2+3a_n^2+3b_n^2}{1-6a_nb_nc_n}$. Nous allons majorer le dénominateur par $g(c_n)$ et minorer le numérateur par $f(c_n)$.

$D(n) = 1 - 6a_nb_nc_n = 1 - 6a_n(1 - a_n - c_n)c_n = 1 - 6a_nc_n + 6{a_n}^2c_n + 6a_n{c_n}^2$

$D(n) - g(c_n) = 1 - 6a_nc_n + 6{a_n}^2c_n + 6a_n{c_n}^2 - 1 + 6{c_n}^2 - 12c_n^3 = 6c_n(-a_n + {a_n}^2 + a_nc_n + c_n - 2{c_n}^2)$

$D(n) - g(c_n) = 6c_n(c_n - a_n)(1 - (a_n + c_n) - c_n) = 6c_n(c_n - a_n)(b_n - c_n)$

Or pour tout entier n, $1 > a_n > b_n > c_n > 0$ donc $0 < 1 - 6a_nb_nc_n < g(c_n)$ d'où $\frac{1}{1-6a_nb_nc_n} > \frac{1}{g(c_n)} > 0$.

$$N(n) - f(c_n) = c_n^2 + 3a_n^2 + 3b_n^2 - \left(\frac{3}{2} - 3c_n + \frac{5}{2}{c_n}^2\right) = 3a_n^2 + 3b_n^2 - \left(\frac{3}{2} - 3c_n + \frac{3}{2}{c_n}^2\right)$$

Soit $N(n) - f(c_n) = 3a_n^2 + 3b_n^2 - \frac{3}{2}(c_n - 1)^2 = 3a_n^2 + 3b_n^2 - \frac{3}{2}(a_n + b_n)^2$ car $a_n + b_n + c_n = 1$

Soit $N(n) - f(c_n) = \frac{3}{2}(a_n - b_n)^2$

Et donc $c_n^2 + 3a_n^2 + 3b_n^2 \geq f(c_n)$

Des deux inégalités obtenues, on tire **pour tout entier n, $\frac{c_{n+1}}{c_n} \geq \frac{f(c_n)}{g(c_n)}$**.

d. Montrons que la suite (c_n) est croissante. Elle est à termes strictement positifs, donc cela revient à montrer que pour tout entier n, $\frac{c_{n+1}}{c_n} \geq 1$.

Comme pour tout entier n, $\frac{c_{n+1}}{c_n} \geq \frac{f(c_n)}{g(c_n)}$, cela revient à montrer que la fonction $\frac{f}{g}$ est minorée par 1 et comme f et g sont positives, cela revient à étudier le signe $h = f - g$ sur [0,1].

$$h(x) = f(x) - g(x) = \frac{3}{2} - 3x + \frac{5}{2}x^2 - (1 - 6x^2 + 12x^3) = \frac{1}{2}(-24x^3 + 17x^2 - 6x + 1)$$

La dérivée de la fonction h est définie par $h'(x) = \frac{1}{2}(-72x^2 + 24x - 6)$. Comme le discriminant du polynôme $-72x^2 + 24x - 6$ est négatif, on peut établir le tableau de variation suivant :

x	0	$\frac{1}{3}$	1
$h'(x)$		$-$	
$h(x)$	$\frac{1}{2}$	0	-6

Donc, pour tout $x \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$, $h(x) \geq 0$ d'où on déduit que pour tout $x \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$, $\frac{f(x)}{g(x)} \geq 1$.

Comme, pour tout entier n, $c_n \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$, on peut affirmer que pour tout entier n, $\frac{c_{n+1}}{c_n} \geq 1$ et que la suite (c_n) est croissante.

Cette suite est croissante et majorée par $\frac{1}{3}$. **La suite (c_n) donc convergente**. On note C sa limite.

Comme pour tout entier , $a_n + b_n = 1 - c_n$, on en déduit que la suite $(a_n + b_n)$ est convergente.

Comme la suite (c_n) est croissante, pour tout entier n, $\frac{1}{3} \geq c_n \geq c_0 > 0$, on peut affirmer que $\frac{1}{3} \geq C > 0$.

On en déduit que $\frac{f(C)}{g(C)} \geq 1$. Or pour tout entier , $\frac{c_{n+1}}{c_n} \geq \frac{f(c_n)}{g(c_n)}$. Comme les fonctions f et g sont continues sur **R**, le passage aux limites dans cette inégalité donne $1 \geq \frac{f(C)}{g(C)}$ d'où $\frac{f(C)}{g(C)} = 1$ ce qui signifie que $h(C) = 0$ soit $\boldsymbol{C = \frac{1}{3}}$.

De l'égalité $a_n + b_n = 1 - c_n$, on tire qua m suite convergente $(a_n + b_n)$ a pour limite $\frac{2}{3}$.

Comme de plus, pour tout entier n, $a_n > b_n > c_n$, $a_n + b_n > 2b_n > 2c_n$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que **la suite (b_n) converge vers $\frac{1}{3}$.**

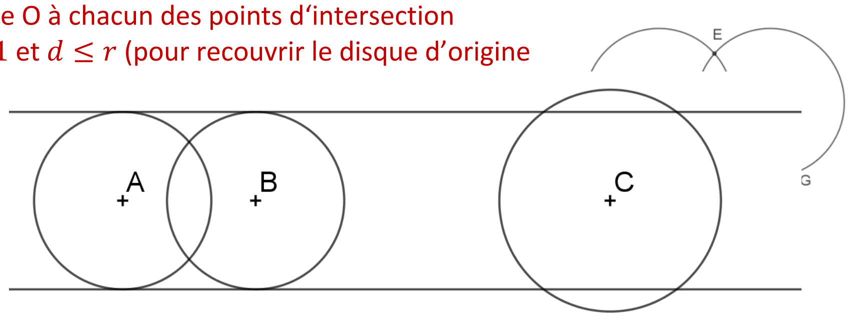
On en tire aussitôt que **la la suite (a_n) converge vers $\frac{1}{3}$.**

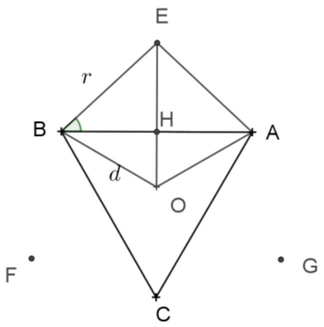
Exercice CG 4. 6 Comme à la fête foraine

On donne dans le plan un disque D de rayon 1.
1. Avec deux disques identiques de rayon $r < 1$, est-il possible de recouvrir le disque D ?
2. Quelle est la plus petite valeur du rayon r de trois disques identiques permettant le recouvrement de D ?

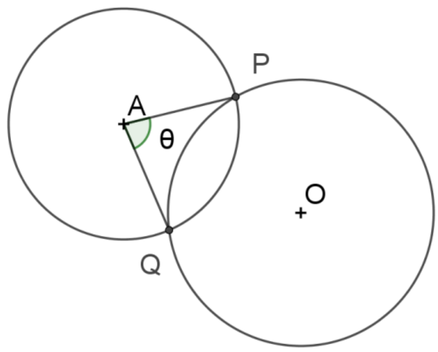
1. Deux disques de rayon r défnissent une bande de plan de largeur $2r$. Tout disque de centre C de diamètre 2 contient des points diamétralement opposés extérieurs à la bande.

2. Commençons par essayer le cas d'une répartition « symétrique » des trois disques de rayon r, dont les centres occupent les sommets d'un triangle équilatéral de centre de gravité O. Appelons d la distance de O à chacun des centres A, B et C et R la distance (commune) de O à chacun des points d'intersection « extérieurs » E, F et G. Nous souhaitons $R \geq 1$ et $d \leq r$ (pour recouvrir le disque d'origine sans laisser de trou).





La seule inconnue de la figure ci-contre est l'angle $\widehat{\mathrm{ABE}} = \alpha$ et la longueur R que nous cherchons à minorer s'écrit : $R = \mathrm{OE} = \mathrm{OH} + \mathrm{HE} = \frac{1}{2}d + r\sin\alpha$, et comme $d = \frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{BH} = \frac{2}{\sqrt{3}}r\cos\alpha$, on obtient :
$R = r\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\cos\alpha + \sin\alpha\right)$. Ou encore $R = \frac{2}{\sqrt{3}}r\left(\frac{1}{2}\cos\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\right)$ ou encore $R = \frac{2}{\sqrt{3}}r\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)$. La plus grande valeur de R est donc obtenue avec un sinus égal à 1, donc $\alpha = \frac{\pi}{3}$. Ce qui correspond à $r = \frac{\sqrt{3}}{2}$.



Peut-on essayer « autre chose », c'est-à-dire une configuration de disques qui ne soit pas invariante par rotation d'un tiers de tour ?
Le disque de centre A de rayon r coupe le cercle de centre O de rayon 1 en P et Q, au plus distants de $2r$, diamètre du cercle, ce qui impose $r \geq \sin\frac{\theta}{2}$. Il en est de même des arcs analogues déterminés par les cercles de centres B et C. L'un au moins de ces trois arcs doit occuper plus du tiers de la circonférence, et comme on cherche un r inférieur à 1, l'arc correspondant du cercle de centre A, par exemple, doit lui aussi occuper plus du tiers de « sa » circonférence, ce qui impose $\theta \geq \frac{2\pi}{3}$ et donc $r \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$. Un choix $r = \frac{\sqrt{3}}{2}$ sur une des cercles contraint au même choix sur les autres, et on en revient à la configuration stable par rotation d'un tiers de tour.

Exercice CG 4 . 7 (mathématiques expertes) La racine du carré
On considère l'ensemble $U_m = \left\{\exp\left(\frac{\mathrm{i}2k\pi}{m}\right), 0 \leq k \leq m-1\right\}$.
1. Montrer que U_m est l'ensemble des racines n-ièmes de 1, c'est-à-dire l'ensemble des nombres complexes z vérifiant $z^m = 1$.
On se donne un entier naturel non nul n et on cherche s'il existe une fonction $f : U_{2n} \to U_{2n}$ vérifiant :

$$\text{pour tout } z \in U_{2n}\,,\ f\big(f(z)\big) = z^2$$

2. Montrer que l'ensemble $\{z^2 \,/ z \in U_{2n}\}$ est égal à U_n et qu'il est inclus dans U_{2n}.
3. On suppose qu'il existe une fonction f solution du problème posé.
a. Vérifier que pour tout $z \in U_{2n}$, $f(z^2) = \big(f(z)\big)^2$.
b. Montrer que $f(z) = f(z') \Rightarrow z = z'$ ou $z = -z'$ et que $f(1) = f(-1) = 1$
4. Selon la valeur de n, existe-t-il un élément z de U_{2n} qui vérifie $z^2 = -1$? Si oui, vérifier qu'alors il n'y a pas de fonction f solution.

5. Selon la valeur de n, existe-t-il un élément z de U_{2n} qui vérifie $z^3 = 1$ et $z \neq 1$? Si oui, vérifier qu'alors il n'y a pas de fonction f solution.
6. On suppose dans toute la suite de l'énoncé que l'entier n est impair.
a. Vérifier que le fonction g de U_n dans lui-même qui à z appartenant à U_n associe z^2 est bijective (c'est-à-dire tout élément de U_n a un unique antécédent par g dans U_n).
b. On suppose qu'il existe une solution f du problème. Vérifier qu'il existe une fonction $\varphi : U_n \to U_n$ telle que $\varphi \circ \varphi = g$.
c. Réciproquement, on suppose qu'il existe une fonction $\varphi : U_n \to U_n$ telle que $\varphi \circ \varphi = g$. Construire alors une solution au problème.

Soit z un nombre complexe non nul (0 ne peut être solution de l'équation $z^m = 1$). Il existe un réel strictement positif r et un réel θ tels que $z = r\exp(i\theta)$. L'équation $z^m = 1$ s'écrit alors $r^m \exp(im\theta) = 1 = \exp(i2k\pi)$, $k \in \mathbf{Z}$.
Ceci équivaut au système $\begin{cases} r^m = 1 \\ im\theta = i2k\pi, k \in \mathbf{Z} \end{cases}$ soit, puisque $r > 0$, $\begin{cases} r = 1 \\ \theta = \frac{2k\pi}{m}, k \in \mathbf{Z} \end{cases}$.
Il suffit alors de prendre $0 \leq k \leq m-1$ pour avoir toutes les solutions distinctes.
1. Soit maintenant un élément Z de U_n. Il existe donc un entier , $0 \leq k \leq n-1$, tel que
$Z = \exp\left(\frac{i2k\pi}{n}\right) = \left(\exp\left(\frac{i2k\pi}{2n}\right)\right)^2$, où $0 \leq k \leq n-1 \leq 2n-1$et donc Z est bien le carré d'un élément de U_{2n}.
Donc U_n est inclus dans $\{z^2 / z \in U_{2n}\}$.
Conclusion $\boldsymbol{U_n = \{z^2 / z \in U_{2n}\}}$.
2. On suppose qu'il existe une fonction $f : U_{2n} \to U_{2n}$ vérifiant : pour tout $z \in U_{2n}$, $f(f(z)) = z^2$ (E).
a. **Pour tout $\boldsymbol{z \in U_{2n}}$.** Alors $f(z) \in U_{2n}$. On peut donc remplacer z par $f(z)$ dans (E), ce qui donne
$f\left(f(f(z))\right) = (f(z))^2$ qui peut aussi s'écrire, puisque $f(f(z)) = z^2$, $\boldsymbol{f(z^2) = (f(z))^2}$.
b. $f(z) = f(z') \Rightarrow f(f(z)) = f(f(z'))$ qui s'écrit $z^2 = z'^2$ soit $z = z'$ou $z = -z'$.
On a donc bien $\boldsymbol{f(z) = f(z') \Rightarrow\ z = z' \text{ ou } z = -z'}$
Si $z = 1$, alors l'égalité $f(z^2) = (f(z))^2$donne $f(1) = (f(1))^2$ soit $f(1) = 1$ ou $f(1) = 0$. La deuxième égalité est impossible car $f(1) \in U_{2n}$. Donc $\boldsymbol{f(1) = 1}$.
Si $z = -1$, alors l'égalité (E) donne $f(f(-1)) = 1 = f(f(1))$.
Comme $f(z) = f(z') \Rightarrow\ z = z'$ou $z = -z'$, $f(-1) = f(1) = 1$ ou $f(-1) = -f(1) = -1$.
Si $f(-1) = -1$, alors $f(f(-1)) = f(-1) = -1$ mais d'après l'égalité (E), $f(f(-1)) = (-1)^2 = 1$
Donc $\boldsymbol{f(-1) = f(1) = 1}$.
3. Nous cherchons un élément z de U_{2n} qui vérifie $z^2 = -1$. Il existe un entier k, $0 \leq k \leq 2n-1$ tel que
$z = \exp\left(\frac{i2k\pi}{2n}\right)$. Alors $z^2 = -1$ équivaut à $\left(\exp\left(\frac{i2k\pi}{2n}\right)\right)^2 = -1 = \exp(i\pi)$ soit $\exp\left(\frac{i4k\pi}{2n}\right) = \exp(i\pi)$ c'est-à-dire il existe un entier K tel que $\frac{4k\pi}{2n} = \pi + 2K\pi$ qui s'écrit aussi $2k = (2K+1)n$.
Comme $2K+1$ est un entier impair, cette égalité ne pourra être vérifiée que si ***n* est pair**.

Supposons donc maintenant que n est un entier pair. Comme $0 \leq k \leq 2n-1$, $0 \leq 2k \leq 4n-2$. L'entier K doit donc vérifier $0 \leq (2K+1)n \leq 4n-2$ soit puisque $n > 0$, $0 \leq (2K+1) \leq 4 - \frac{2}{n}$ soit $-\frac{1}{2} \leq K \leq \frac{3}{2} - \frac{1}{n}$.
Comme $n > 1$, K doit vérifier $-\frac{1}{2} \leq K \leq \frac{3}{2}$ et les seules valeurs possibles pour K sont 0 et 1.
$2k = (2K+1)n$ revient donc à $2k = n$ ou $2k = 3n$.
Vérifions :
- Si $k = \frac{n}{2}$, alors $\exp\left(\frac{i2k\pi}{2n}\right) = \exp\left(\frac{i2\frac{n}{2}\pi}{2n}\right) = \exp\left(\frac{in\pi}{2n}\right) = \exp\left(\frac{i\pi}{2}\right) = i$, dont le carré est bien égal à -1.
- Si $k = \frac{3n}{2}$, alors $\exp\left(\frac{i2k\pi}{2n}\right) = \exp\left(\frac{i2\frac{3n}{2}\pi}{2n}\right) = \exp\left(\frac{i3n\pi}{2n}\right) = \exp\left(\frac{i3\pi}{2}\right) = -i$, dont le carré est bien égal à -1.
Conclusion : L'équation $z^2 = -1$ n'admet, dans U_{2n}, aucune solution si n est impair et admet comme solutions, si n est pair, i et $-i$.

Supposons désormais que n est pair. Soit Z tel que $Z^2 = -1$ (c'est-à-dire Z vaut i ou $-i$) et supposons qu'il existe une fonction f solution du problème posé.

D’après (E), $f\big(f(Z)\big) = Z^2 = -1$. Or, d’après la question 2a., $f(Z^2) = (f(Z))^2$ et d’après la question 2b., $f(Z^2) = f(-1) = 1$ donc $f(Z^2) = 1$ d’où $f(Z) = 1$ ou $f(Z) = -1$. Mais alors, dans les deux cas, $f\big(f(Z)\big) = 1$ ce qui contredit $f\big(f(Z)\big) = Z^2 = -1$.
Il n’existe donc pas de fonction f solution du problème posé.
4. Cherchons un nombre complexe z dans U_{2n} tel que $z \neq 1$ et $z^3 = 1$. Comme $z \neq 1$, il existe un entier k, $0 < k \leq 2n-1$ tel que $z = \exp\left(\frac{\mathrm{i}2k\pi}{2n}\right)$.
$z^3 = 1$ équivaut alors à $\left(\exp\left(\frac{\mathrm{i}2k\pi}{2n}\right)\right)^3 = 1$ soit $\exp\left(\frac{\mathrm{i}6k\pi}{2n}\right) = \exp 0$ soit il existe un entier K tel que $\frac{3k}{n} = 2K$.
Or $0 < k \leq 2n-1$ soit $0 < \frac{3k}{n} \leq 6 - \frac{3}{n}$.
Si $n = 1$, alors $k = 1$ et $2K = 3$ qui n’est pas pair. Si $n > 1$, les seuls entiers pairs compris entre 0 (strictement) et $6 - \frac{3}{n}$ sont 2 et 4.
Si $2K = \frac{3k}{n} = 2$ alors $3k = 2n$ et si $2K = \frac{3k}{n} = 4$, alors $3k = 4n$.
Dans les deux cas, **$\boldsymbol{n}$ doit être un multiple de 3.**

Supposons désormais que n est un multiple de 3. Il existe alors un entier m tel que $n = 3m$.
$\frac{3k}{n} = 2$ admet alors pour solution $k = \frac{2n}{3}$ et $\frac{3k}{n} = 4$ admet alors pour solution $k = \frac{4n}{3}$.
Dans le premier cas, $\exp\left(\frac{\mathrm{i}2k\pi}{2n}\right) = \boldsymbol{\exp\left(\frac{\mathrm{i}2\pi}{3}\right) = j}$ et, dans le deuxième cas, $\exp\left(\frac{\mathrm{i}2k\pi}{2n}\right) = \boldsymbol{\exp\left(\frac{\mathrm{i}4\pi}{3}\right) = j^2}$
Dans les deux cas, on a bien $z^3 = 1$.

Supposons qu’il existe une fonction f solution du problème posé. D’après la question 2a. :
pour $z = j$, $f(j^2) = (f(j))^2$ et pour $z = j^2$, $f((j^2)^2) = \big(f(j^2)\big)^2 = ((f(j))^2)^2 = (f(j))^4$.
Or $f((j^2)^2) = f(j^4) = f(j^3 \times j) = f(j)$.
Donc $\big(f(j)\big)^4 = f(j)$ c’est-à-dire $f(j)\left(\big(f(j)\big)^3 - 1\right) = 0$. Comme $f(j) \neq 0$ car $f : U_{2n} \to U_{2n}$, $\big(f(j)\big)^3 = 1$.
D’après le début de la question, $f(j) = 1$ ou $f(j) = j$ ou $f(j) = j^2$.
On ne peut avoir $f(j) = 1$ qui implique $f(j) = f(1)$ d’où $j = \pm 1$, ce qui est faux.
On ne peut avoir $f(j) = j$ qui implique $f\big(f(j)\big) = f(j) = j$. Or $f\big(f(j)\big) = j^2$ et $j^2 \neq j$.
On ne peut avoir $f(j) = j^2$ qui implique $f\big(f(j)\big) = f(j^2) = (f(j))^2 = (j^2)^2 = j^4 = j$ car alors $j^2 = j$.
Conclusion : **si $\boldsymbol{n}$ est un multiple de 3, il n’existe pas de fonction : $\boldsymbol{U_{2n} \to U_{2n}}$ telle que pour tout nombre complexe $\boldsymbol{z}$ de $\boldsymbol{U_{2n}}$, $\boldsymbol{f\big(f(z)\big) = z^2}$.**
5. *a.* Montrons que tout nombre complexe Z de U_n admet un unique antécédent par la fonction qui à z associe le nombre z^2.
Soit Z un élément de U_n Il existe un entier k tel que $Z = \exp\left(\frac{\mathrm{i}2k\pi}{n}\right)$.
Un élément z est un élément de U_n s’il existe un entier $k’$ tel que $z = \exp\left(\frac{\mathrm{i}2k'\pi}{n}\right)$.
z est un antécédent de Z si et seulement si $\left(\exp\left(\frac{\mathrm{i}2k'\pi}{n}\right)\right)^2 = \exp\left(\frac{\mathrm{i}2k\pi}{n}\right)$ soit $\exp\left(\frac{\mathrm{i}4k'\pi}{n}\right) = \exp\left(\frac{\mathrm{i}2k\pi}{n}\right)$ c’est-à-dire il existe un entier K tel que $\frac{4k'\pi}{n} = \frac{2k\pi}{n} + 2K\pi$ soit $2k' = k + Kn$ et ainsi n doit diviser $2k' - k$.
Or k et k' sont tels que $0 \leq k < n$ et $0 \leq k' < n$ donc $0 \leq 2k' < n$ et $-n < -k \leq 0$ donc $-n < 2k' - k < 2n$.
Comme n divise $2k’ - k$, il n’y a que deux possibilités : $2k’ - k = 0$ et $2k’ - k = n$.
- Si k est pair, l’égalité $2k’ - k = 0$ s’écrit $k' = \frac{k}{2}$ qui convient bien car on a alors bien $0 \leq k' < n$.
L’égalité $2k’ - k = n$ qui s’écrit $2k’ = k + n$ ne donne aucune solution car n étant impair et k pair, $k + n$ est impair et ne peut être égal à $2k’$.
- Si k est impair, l’égalité $2k’ - k = 0$ est impossible. L’égalité $2k’ - k = n$ donne $k' = \frac{n+k}{2}$, qui correspond bien à un entier car $k + n$ est pair (comme somme de deux nombres impairs) et cette valeur de k' donne bien l’encadrement $0 \leq k' < n$.
Dans les deux cas, il y a bien un unique antécédent. **La fonction $\boldsymbol{z \mapsto z^2}$ est bijective de $\boldsymbol{U_n}$ dans $\boldsymbol{U_n}$.**
b. $\varphi \circ \varphi = g$ signifie que pour tout $z \in U_n$, $(\varphi \circ \varphi)(z) = g(z)$ soit $\varphi\big(\varphi(z)\big) = z^2$
Comme U_n est inclus dans U_{2n}, considérons la restriction à U_n de la fonction f solution du problème.
Soit $z \in U_n$. D’après le a., il existe un unique nombre complexe t tel que $z = t^2$.

Alors $\varphi(z) = \varphi(t^2) = f(t^2) = \left(f(t)\right)^2$ et $\left(\varphi(z)\right)^n = \left(\left(f(t)\right)^2\right)^n = \left(f(t)\right)^{2n} = 1$ car f est à valeurs dans U_{2n}.
Donc $\varphi(z) \in U_n$.
S'il existe une fonction f solution du problème, alors la fonction $\varphi : U_n \to U_n$ telle que pour tout $z \in U_n$, $\varphi(z) = f(z)$ vérifie : pour tout $z \in U_n$, $\varphi(\varphi(z)) = f\left(f(z)\right) = z^2 = g(z)$.
c. Supposons maintenant qu'il existe une fonction φ telle que pour tout $z \in U_n$, $(\varphi \circ \varphi)(z) = g(z) = z^2$.
Soit $z \in U_{2n}$. Comme U_n est inclus dans U_{2n}, considérons deux cas.
1^er cas : $z \in U_n$. Alors posons $f(z) = \varphi(z)$. On a alors $f\left(f(z)\right) = f\left(\varphi(z)\right) = \varphi\left(\varphi(z)\right) = g(z) = z^2$.
2^e cas : $z \in U_{2n} \backslash U_n$. Alors soit $Z = z^2$. $Z \in U_n$et, d'après la question 5a., Z admet par la fonction g un unique antécédent Z' dans U_n. Z' est tel que $g(Z') = z^2$.
Posons alors $f(z) = \varphi(Z')$. Alors, $f\left(f(z)\right) = f(\varphi(Z') = \varphi\left(\varphi(Z')\right) = g(Z') = z^2$.
La fonction f ainsi définie est solution du problème.