

Exercice 1 – On retrouve l'exponentielle

On rappelle que pour tout réel a strictement positif et pour tout entier n , $a^n = e^{n \ln a}$.

Cet exercice nécessite la connaissance de limites usuelles des fonctions logarithme népérien et exponentielle.

- Déterminer, si elle existe, la limite lorsque h tend vers 0 de $\frac{\ln(1+h)}{h}$ et, pour tout nombre réel x , en déduire, si elle existe, la limite lorsque l'entier n tend vers $+\infty$ de $n \ln \left(1 + \frac{x}{n}\right)$.
- En déduire, pour tout nombre réel x , la limite de $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ lorsque l'entier n tend vers $+\infty$.

Exercice 2 – Sommes d'inverses et constante d'Euler-Mascheroni

Rappels :

- pour comparer deux nombres, on étudie le signe de la différence ;
- pour déterminer le signe d'une fonction, on peut étudier ses variations et chercher les valeurs où elle s'annule ;
- on peut additionner membre à membre des inégalités de même sens.

En algèbre, on étudie des suites définies par $S_n = \sum_{k=k_0}^{k=n} t_k$, où (t_n) est une suite de réels. Ces suites (S_n) sont appelées *séries* et certaines sont très connues. La fiche 1 faisait étudier une série convergeant vers le nombre e .

Cet exercice fait étudier deux autres séries très classiques.

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies par :

Pour tout entier $n \geq 2$, $u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k^2}$ et $v_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k}$.

- Étudier le sens de variation de la suite (u_n) .
 - Comparer, pour tout entier $k > 1$, les nombres $\frac{1}{k^2}$ et $\frac{1}{k(k-1)}$. En déduire une majoration du nombre u_n .
 - Montrer que la suite (u_n) converge.

On démontre en fait que la limite de la suite (u_n) est $\frac{\pi^2}{6}$.

- Montrer que pour tout réel $x \geq 0$, $\frac{x}{x+1} \leq \ln(1+x) \leq x$.
 - En déduire que, pour tout entier $k \geq 1$, un encadrement de $\ln(k+1) - \ln k$.
 - Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $\ln(n+1) \leq v_n \leq 1 + \ln n$. En déduire la limite de la suite (v_n) .
- Soit (w_n) la suite définie par, pour tout entier $n \geq 2$, $w_n = v_{n-1} - \ln n$.
 - Déterminer le sens de variation de la suite (w_n) .
 - Montrer que la suite (w_n) converge.

On appelle constante d'Euler-Mascheroni la limite γ de la suite (w_n) .

Exercice 3 – Application de la concavité

Définition : le plan est muni d'un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Soit f une fonction définie sur l'intervalle I de $\mathbf{R}$ et C sa courbe représentative dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

La fonction f est dite **convexe** sur I si et seulement si pour tous points A et B de la courbe C d'abscisses respectives des réels a et b de I tels que $a < b$, le segment $[AB]$ est situé au-dessus de la courbe C sur l'intervalle $[a; b]$.
La fonction f est dite **concave** sur I si et seulement si pour tous points A et B de la courbe C d'abscisses respectives des réels a et b de I tels que $a < b$, le segment $[AB]$ est situé au-dessous de la courbe C sur l'intervalle $[a; b]$.

Propriété : soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I de $\mathbf{R}$.

La fonction f est convexe sur I si et seulement si sa fonction dérivée seconde f'' est positive sur I .

La fonction f est concave sur I si et seulement si sa fonction dérivée seconde f'' est négative sur I .

1. Montrer que la fonction $f: x \mapsto \ln(\ln x)$ est concave sur son intervalle de définition.
2. En déduire que pour tous nombres réels a et b strictement supérieurs à 1, $\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \sqrt{\ln a \times \ln b}$.

Exercice 4 – Limite d'une suite d'intégrales

On rappelle les théorèmes suivants :

- $\lim_{X \rightarrow +\infty} e^{-X} = 0$; $\lim_{X \rightarrow +\infty} X e^{-X} = 0$; $\lim_{X \rightarrow +\infty} X^2 e^{-X} = 0$
- Le théorème de limite d'une composée (suites ou fonctions)
- Les formules de dérivation
- La formule d'intégration par parties pour des fonctions u et v dérivables dont les dérivées sont continues :

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

Pour tout entier naturel n non nul, on définit sur l'intervalle $[0; +\infty[$, la fonction $f_n: x \mapsto n^2 x e^{-nx}$. On désigne par C_n la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère orthonormé du plan.

1. a. Soit n entier naturel non nul fixé. Montrer que la fonction f_n admet une limite que l'on déterminera lorsque x tend vers $+\infty$.
b. Calculer la fonction dérivée de f_n puis établir le tableau de variation de la fonction f_n .
c. Tracer sur un même graphique les courbes C_1, C_2, C_3 .
2. a. Soit x un nombre réel positif ou nul fixé. Montrer que la suite de terme général $f_n(x)$ est convergente.
b. On définit sur l'intervalle $[0; +\infty[$ la fonction $f: x \mapsto \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$. Définir explicitement la fonction f .
3. Soit a un nombre réel positif ou nul. Soit n un entier naturel fixé. Exprimer en fonction de a et de n , l'intégrale $I_n(a) = \int_0^a f_n(x)dx$.
4. a. Pour un entier naturel n non nul fixé, montrer que $I_n(a)$ admet une limite réelle lorsque a tend vers $+\infty$, limite que l'on notera I_n .
b. Montrer que la suite (I_n) est convergente.
5. Indiquer ce que représentent les limites suivantes et les comparer :

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \left(\int_0^a \lim_{n \rightarrow +\infty} (f_n(x)) dx \right) \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a f_n(x) dx \right).$$

Exercice 5 – Temps d'attente moyen

On utilisera les théorèmes suivants :

- Nombre de permutations d'un ensemble à n éléments
- Définition de l'espérance mathématique
- Pour tout nombre réel q distinct de 1, $\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$ si $0 < q < 1$

On dispose d'une boîte sphérique en rotation contenant trois boules identiques numérotés 1, 2, 3. On laisse successivement s'échapper chacune des boules et on donne la liste des numéros dans l'ordre de sortie. On suppose que toutes listes ont la même probabilité d'apparition.

1. Quelle est la probabilité que sorte la liste (1, 2, 3) ?
Soit n un entier naturel non nul. On répète l'épreuve précédente n fois de suite en remettant à chaque fois les trois boules dans la boîte.
2. Soit un entier naturel k tel que $1 \leq k \leq n$. Calculer la probabilité que la liste (1, 2, 3) apparaisse pour la première fois au rang k .
3. On désigne par X la variable aléatoire donnant le premier rang k où la liste (1, 2, 3) apparaît et 0 si la liste (1, 2, 3) n'apparaît pas. Donner l'expression de l'espérance mathématique $E(X)$ de la variable aléatoire X .
 $E(X)$ est appelé le temps d'attente moyen d'apparition de la liste (1, 2, 3).
4. Calcul de $E(X)$ en fonction de n .
a. On considère la fonction $f: x \mapsto \sum_{k=0}^n x^k$ définie dans $\mathbf{R}$. Vérifier que $E(X) = \frac{1}{6} f'\left(\frac{5}{6}\right)$.
b. Pour $x \neq 1$, exprimer $f(x)$ sous la forme d'un quotient et donner une expression de la dérivée de la fonction f obtenue à partir de ce quotient.
c. En déduire une expression directe de $E(X)$ en fonction de l'entier n .

- d. Montrer que lorsque n tend vers $+\infty$, $E(X)$ admet une limite que l'on déterminera. (On pourra admettre et utiliser la propriété suivante : soit $q \in]0; 1[$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} nq^n = 0$)

5. Généralisation.

On considère une épreuve conduisant à deux issues : S de probabilité p et S' de probabilité $1 - p$.

On répète cette épreuve n fois, chaque épreuve étant indépendante des autres.

On désigne par X la variable aléatoire donnant le premier rang où S apparaît et 0 s'il n'apparaît pas.

Exprimer $E(X)$ en fonction de n et montrer que $E(X)$ admet une limite lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 6 – Perpendiculaire commune

On utilisera les définitions et les théorèmes suivants :

- Positions relatives de droites de l'espace.
- Des droites D et D' de l'espace sont perpendiculaires par définition si et seulement si D et D' sont orthogonales et sécantes.
- Dans un repère orthonormé de l'espace des vecteurs $\vec{u}(a, b, c)$ et $\vec{u}'(a', b', c')$ sont orthogonaux si et seulement si $aa' + bb' + cc' = 0$
- Représentations paramétriques d'une droite.
- Equations cartésiennes d'un plan.
- Calcul de la distance dans un repère orthonormé de l'espace.

On se place dans un repère orthonormé de l'espace $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On donne deux droites D_1 et D_2 définies par des représentations paramétriques :

$$D_1: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = -t \end{cases}, t \in \mathbf{R} \quad D_2: \begin{cases} x = 1 + t' \\ y = 4 - t' \\ z = 5 \end{cases}, t' \in \mathbf{R}$$

Le but de l'exercice est de déterminer s'il existe une droite D perpendiculaire à la fois à D_1 et à D_2 .

1. Montrer que D_1 et D_2 sont des droites non coplanaires.
2. Déterminer les coordonnées d'un vecteur $\vec{u}$ distinct du vecteur nul et orthogonal à la fois à un vecteur directeur de D_1 et à un vecteur directeur de D_2 .
3. Déterminer une équation cartésienne du plan P contenant à la fois D_1 et une droite dirigée par le vecteur $\vec{u}$.
4. a. Déterminer les coordonnées du point d'intersection B du plan P et de la droite D_2 .
b. Déterminer les coordonnées du point d'intersection A de la droite D_1 et de la droite contenant le point B , dirigée par le vecteur $\vec{u}$ trouvé dans la question 2.
5. Montrer que la droite (AB) est perpendiculaire à la fois à D_1 et à D_2 .
6. Montrer que si une droite D est une perpendiculaire commune à D_1 et D_2 , alors $D = (AB)$.
7. Montrer que pour tout point M de la droite D_1 et tout point M' de la droite D_2 , $MM' \geq AB$.