



Exercice 1 – On retrouve l'exponentielle

On rappelle que pour tout réel a strictement positif et pour tout entier n , $a^n = e^{n \ln a}$.

Cet exercice nécessite la connaissance de limites usuelles des fonctions logarithme népérien et exponentielle.

- Déterminer, si elle existe, la limite lorsque h tend vers 0 de $\frac{\ln(1+h)}{h}$ et, pour tout nombre réel x , en déduire, si elle existe, la limite lorsque l'entier n tend vers $+\infty$ de $n \ln \left(1 + \frac{x}{n}\right)$.
- En déduire, pour tout nombre réel x , la limite de $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ lorsque l'entier n tend vers $+\infty$.

- Soit f la fonction définie sur $]-1, +\infty[$ par $f(h) = \ln(1+h)$. Par composition, la fonction f est dérivable sur $]-1, +\infty[$ et $f'(h) = \frac{1}{1+h}$. En particulier, $f'(0) = 1$. Or $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)-f(0)}{h}$ et $\frac{f(h)-f(0)}{h} = \frac{\ln(1+h)}{h}$.

Conclusion $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$.

Pour tout nombre réel x , on pose $h = \frac{x}{n}$. Pour x fixé, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{n} = 0$ et $\frac{\ln(1+h)}{h} = \frac{\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}} = \frac{1}{x} \times n \ln \left(1 + \frac{x}{n}\right)$.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$ donc $\lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \left(1 + \frac{x}{n}\right) = x$.

- Pour tout nombre réel x , $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^{n \ln \left(1 + \frac{x}{n}\right)}$. Par composition de limites (les fonctions qui interviennent étant continues sur les intervalles où elles sont définies), $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$.

Exercice 2 – Sommes d'inverses et constante d'Euler-Mascheroni

Rappels :

- pour comparer deux nombres, on étudie le signe de la différence ;
- pour déterminer le signe d'une fonction, on peut étudier ses variations et chercher les valeurs où elle s'annule ;
- on peut additionner membre à membre des inégalités de même sens.

En algèbre, on étudie des suites définies par $S_n = \sum_{k=k_0}^{k=n} t_k$, où (t_n) est une suite de réels. Ces suites (S_n) sont appelées *séries* et certaines sont très connues. La fiche 1 faisait étudier une série convergeant vers le nombre e .

Cet exercice fait étudier deux autres séries très classiques.

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies par :

Pour tout entier $n \geq 2$, $u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k^2}$ et $v_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k}$.

- Étudier le sens de variation de la suite (u_n) .
 - Comparer, pour tout entier $k > 1$, les nombres $\frac{1}{k^2}$ et $\frac{1}{k(k-1)}$. En déduire une majoration du nombre u_n .
 - Montrer que la suite (u_n) converge.

On démontre en fait que la limite de la suite (u_n) est $\frac{\pi^2}{6}$.

- Montrer que pour tout réel $x \geq 0$, $\frac{x}{x+1} \leq \ln(1+x) \leq x$.
 - En déduire que, pour tout entier $k \geq 1$, un encadrement de $\ln(k+1) - \ln k$.
 - Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $\ln(n+1) \leq v_n \leq 1 + \ln n$. En déduire la limite de la suite (v_n) .
- Soit (w_n) la suite définie par, pour tout entier $n \geq 2$, $w_n = v_{n-1} - \ln n$.
 - Déterminer le sens de variation de la suite (w_n) .
 - Montrer que la suite (w_n) converge.

On appelle constante d'Euler-Mascheroni la limite γ de la suite (w_n) .

1. a. Pour tout entier $n \geq 1$, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2}$ qui est un nombre strictement positif. On en déduit que **la suite (u_n) est strictement croissante.**

b. Pour tout entier $k \geq 2$, $k > k - 1 > 0$ d'où, en multipliant par $k > 0$, $k^2 > k(k - 1) > 0$.

On en déduit que $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)}$ (i)

On peut remarquer que, pour tout entier $k > 1$, $\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{k-k+1}{k(k-1)} = \frac{1}{k(k-1)}$. On peut alors écrire, en additionnant membre à membre les inégalités (i) en faisant varier k de 2 à n et : $u_n < 1 + \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k(k-1)}\right)$.

Or $\sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k(k-1)}\right) = \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1}\right) + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)$

Soit $\sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k(k-1)}\right) = 1 - \frac{1}{n}$.

Cela implique que **pour tout entier $n \geq 2$, $u_n < 2 - \frac{1}{n} < 2$.**

c. La suite (u_n) est donc croissante et majorée par 2. On en déduit qu'elle **converge vers une limite $l \leq 2$.**

2. a. Pour tout réel $x \geq 0$, on pose $f(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{x+1}$, $g(x) = x - \ln(1+x)$. Ces deux fonctions sont dérivables sur $[0, +\infty[$ et :

pour tout réel $x \geq 0$, $f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1(x+1)-x(1)}{(x+1)^2} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)-1}{(x+1)^2} = \frac{x}{(x+1)^2}$.

On a donc $f'(x) \geq 0$, pour tout $x \in [0, +\infty[$.

La fonction f est donc croissante sur $[0, +\infty[$. Or $f(0) = 0$ donc **pour tout $x \in [0, +\infty[$, $f(x) \geq 0$**

Soit $\frac{x}{x+1} \leq \ln(1+x)$.

De même, pour tout réel $x \geq 0$, $g'(x) = 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x+1-1}{x+1} = \frac{x}{x+1}$, quantité positive sur $[0, +\infty[$. La fonction g est donc croissante sur $[0, +\infty[$ et comme $g(0) = 0$, on en déduit que **pour tout $x \in [0, +\infty[$, $\ln(1+x) \leq x$.**

b. Pour tout entier $k \geq 1$, $\ln(k+1) - \ln k = \ln \frac{k+1}{k} = \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$.

D'après la question précédente, on a donc $\frac{1}{\frac{1}{k}+1} \leq \ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}$ soit $\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}$ (ii).

Ces inégalités s'écrivent successivement :

$$\frac{1}{2} \leq \ln 2 - \ln 1 \leq \frac{1}{1}$$

$$\frac{1}{3} \leq \ln 3 - \ln 2 \leq \frac{1}{2}$$

....

$$\frac{1}{n} \leq \ln n - \ln(n-1) \leq \frac{1}{n-1}$$

$$\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln n \leq \frac{1}{n}$$

c. En faisant varier k de 1 à n et en additionnant membre à membre les inégalités (ii), on obtient, pour tout entier $n \geq 1$:

$v_{n+1} - 1 \leq \ln(n+1) \leq v_n$. La première inégalité de cet encadrement s'écrit aussi $v_{n+1} \leq 1 + \ln(n+1)$ et comme elle est valable pour tout entier naturel non nul n , on a aussi $v_n \leq 1 + \ln n$.

On a donc bien **pour tout entier $n \geq 1$, $\ln(n+1) \leq v_n \leq 1 + \ln n$.**

La première inégalité suffit pour affirmer que $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = +\infty$.

3. a. Pour tout entier $n \geq 2$, $w_{n+1} - w_n = v_n - \ln(n+1) - v_{n-1} + \ln n = \frac{1}{n} - \ln \frac{n+1}{n} = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

D'après la question 2a., on en déduit que $w_{n+1} - w_n \geq 0$ et que **la suite (w_n) est croissante.**

b. Pour tout entier $n \geq 2$, $w_n = v_{n-1} - \ln n$ et $v_n \leq 1 + \ln n$ donc $v_{n-1} \leq 1 + \ln(n-1)$

d'où $w_n \leq 1 + \ln(n-1) - \ln n$ soit $w_n \leq 1 + \ln \frac{n-1}{n} \leq 1$ car $0 \leq \frac{n-1}{n} \leq 1$ donc $\ln \frac{n-1}{n} \leq 0$.

La suite (w_n) est donc croissante et majorée. On en déduit que **cette suite est convergente.**

La limite γ de cette suite, appelée constante d'Euler-Mascheroni, est approchée très lentement avec la suite (w_n) . Euler en calcula pourtant 16 décimales en 1734. Ce nombre γ est encore mal connu (on ne sait toujours pas si c'est un rationnel ou non) mais il intervient dans d'autres domaines des mathématiques, notamment en arithmétique.

Exercice 3 – Application de la concavité

Définition : le plan est muni d'un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Soit f une fonction définie sur l'intervalle I de \mathbf{R} et C sa courbe représentative dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

La fonction f est dite **convexe** sur I si et seulement si pour tous points A et B de la courbe C d'abscisses respectives des réels a et b de I tels que $a < b$, le segment $[AB]$ est situé au-dessus de la courbe C sur l'intervalle $[a; b]$.

La fonction f est dite **concave** sur I si et seulement si pour tous points A et B de la courbe C d'abscisses respectives des réels a et b de I tels que $a < b$, le segment $[AB]$ est situé au-dessous de la courbe C sur l'intervalle $[a; b]$.

Propriété : soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I de \mathbf{R} .

La fonction f est convexe sur I si et seulement si sa fonction dérivée seconde f'' est positive sur I .

La fonction f est concave sur I si et seulement si sa fonction dérivée seconde f'' est négative sur I .

1. Montrer que la fonction $f: x \mapsto \ln(\ln x)$ est concave sur son intervalle de définition.
2. En déduire que pour tous nombres réels a et b strictement supérieurs à 1, $\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \sqrt{\ln a \times \ln b}$.

1. $f(x)$ existe si et seulement si $\ln x$ existe et $\ln x > 0$. La fonction f est donc définie sur l'intervalle $I =]1, +\infty[$. De plus par composition de fonction, la fonction f est dérivable sur I et pour tout nombre réel x de I ,

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}}{\ln} = \frac{1}{x \ln x}.$$

Par produit et quotient, la fonction f' est dérivable sur I et pour tout nombre réel x de I ,

$$f''(x) = -\frac{\ln x + x \times \frac{1}{x}}{(x \ln x)^2} = -\frac{1 + \ln x}{x^2 (\ln x)^2}.$$

Pour tout $x > 1$, $\ln x > 0$ et $x^2 > 0$ donc $f'' < 0$. On en déduit que la fonction f est concave sur I .

2. Comme la fonction f est concave sur I , pour tous réels a et b de I , la courbe C représentant f dans un repère est située au-dessus de la droite passant par les points A et B de C d'abscisses respectives a et b , donc le point M de C d'abscisse $\frac{a+b}{2}$ est situé au-dessus du milieu du segment $[AB]$ (voir figure ci-contre).

Cela signifie que pour tous nombres réels a et b strictement supérieurs à 1, $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \frac{f(a)+f(b)}{2}$

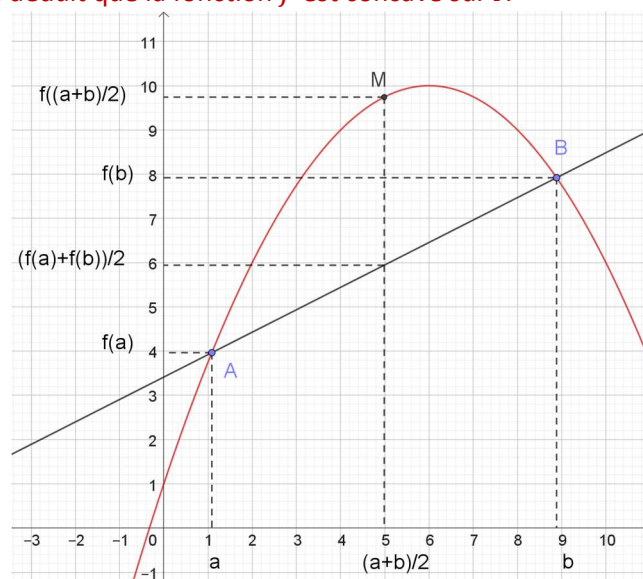
$$\text{Soit } \ln\left(\ln\left(\frac{a+b}{2}\right)\right) \geq \frac{1}{2}(\ln(\ln a) + \ln(\ln b))$$

$$\text{Soit } \ln\left(\ln\left(\frac{a+b}{2}\right)\right) \geq \frac{1}{2}(\ln(\ln a \times \ln b))$$

$$\text{Soit } \ln\left(\ln\left(\frac{a+b}{2}\right)\right) \geq \ln \sqrt{\ln a \times \ln b}$$

Soit, en composant par la fonction exponentielle qui est croissante sur \mathbf{R} ,

$$\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \sqrt{\ln a \times \ln b}.$$



Exercice 4 – Limite d'une suite d'intégrales

On rappelle les théorèmes suivants :

- $\lim_{X \rightarrow +\infty} e^{-X} = 0$; $\lim_{X \rightarrow +\infty} X e^{-X} = 0$; $\lim_{X \rightarrow +\infty} X^2 e^{-X} = 0$
- Le théorème de limite d'une composée (suites ou fonctions)
- Les formules de dérivation
- La formule d'intégration par parties pour des fonctions u et v dérivables dont les dérivées sont continues :

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

Pour tout entier naturel n non nul, on définit sur l'intervalle $[0; +\infty[$, la fonction $f_n: x \mapsto n^2 x e^{-nx}$. On désigne par C_n la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère orthonormé du plan.

1. a. Soit n entier naturel non nul fixé. Montrer que la fonction f_n admet une limite que l'on déterminera lorsque x tend vers $+\infty$.
 - b. Calculer la fonction dérivée de f_n puis établir le tableau de variation de la fonction f_n .
 - c. Tracer sur un même graphique les courbes C_1, C_2, C_3 .
2. a. Soit x un nombre réel positif ou nul fixé. Montrer que la suite de terme général $f_n(x)$ est convergente.
 - b. On définit sur l'intervalle $[0; +\infty[$ la fonction $f: x \mapsto \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$. Définir explicitement la fonction f .
3. Soit a un nombre réel positif ou nul. Soit n un entier naturel fixé. Exprimer en fonction de a et de n , l'intégrale $I_n(a) = \int_0^a f_n(x) dx$
4. a. Pour un entier naturel n non nul fixé, montrer que $I_n(a)$ admet une limite réelle lorsque a tend vers $+\infty$, limite que l'on notera I_n .
 - b. Montrer que la suite (I_n) est convergente.
5. Indiquer ce que représentent les limites suivantes et les comparer :

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \left(\int_0^a \lim_{n \rightarrow +\infty} (f_n(x)) dx \right) \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a f_n(x) dx \right).$$

1. a. On connaît $\lim_{x \rightarrow +\infty} X e^{-X} = 0$; pour tout réel $x \geq 0$, $f_n(x) = n \times n x e^{-nx}$.

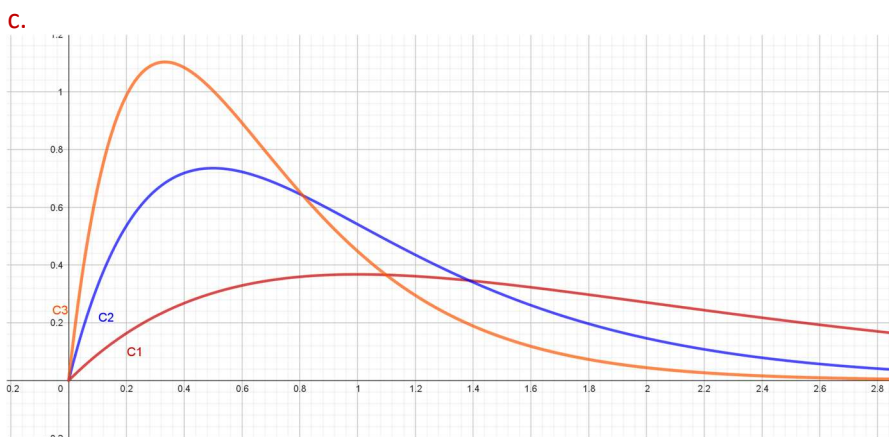
Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} nx = +\infty$, alors par composition, $\lim_{x \rightarrow +\infty} n x e^{-nx} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$

b. La fonction f_n est dérivable comme composée et produit de fonctions dérivables. D'après les formules de dérivation du produit et de la composée :

$$\forall x \in [0; +\infty[, f'_n(x) = n^2(1 \times e^{-nx} + x \times (-n)e^{-nx}) = n^2(1 - nx)e^{-nx}$$

L'exponentielle ayant ses valeurs strictement positives et $n^2 > 0$, on en déduit que $f'_n(x)$ a le signe de $1 - nx$.

x	0	$\frac{1}{n}$	$+\infty$
$f'_n(x)$	+	0	-
f_n	0	ne^{-1}	0



2. a. Si $x = 0$, alors pour tout entier naturel n non nul, $f_n(0) = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(0) = 0$.

Soit $x > 0$. Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} nx = +\infty$; or $\lim_{X \rightarrow \infty} X^2 e^{-X} = 0$ donc par composition $\lim_{n \rightarrow +\infty} (nx)^2 e^{-nx} = 0$.

On remarque que puisque $x \neq 0$, $f_n(x) = \frac{1}{x} \times (nx)^2 e^{-nx}$. Donc $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$.

b. $\forall x \in [0; +\infty[, f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$; f est donc la fonction nulle sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

3. Effectuons une intégration par parties en posant :

$$u(x) = x \quad u'(x) = 1$$

$$v(x) = -\frac{1}{n} e^{-nx} \quad v'(x) = e^{-nx}$$

$$I_n(a) = \int_0^a f_n(x) dx = n^2 \left(\left[x \times \frac{-1}{n} e^{-nx} \right]_0^a - \int_0^a \frac{-1}{n} e^{-nx} dx \right)$$

$$I_n(a) = n^2 \left(\frac{-a}{n} e^{-na} + \frac{1}{n} \int_0^a e^{-nx} dx \right) = n^2 \left(\frac{-a}{n} e^{-na} + \frac{1}{n} \left[\frac{e^{-nx}}{-n} \right]_0^a \right) = -nae^{-na} - e^{-na} + 1$$

4. a. On utilise les limites : $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} = 0$

puisque $n > 0$, $\lim_{a \rightarrow +\infty} na = +\infty$; on en déduit que pour tout entier naturel n non nul $\lim_{a \rightarrow +\infty} e^{-na} = 0$ et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} nae^{-na} = 0 ; \text{ d'où } \lim_{a \rightarrow +\infty} I_n(a) = 1$$

b. $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = 1$. La suite (I_n) est constante égale à 1 donc converge vers 1.

$$5. \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a f_n(x) dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} I_n(a) = 1 ; \text{ d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a f_n(x) dx \right) = 1$$

$$\int_0^a \lim_{n \rightarrow +\infty} (f_n(x)) dx = \int_0^a 0. dx = 0 ; \text{ d'où } \lim_{a \rightarrow +\infty} \left(\int_0^a \lim_{n \rightarrow +\infty} (f_n(x)) dx \right) = \lim_{a \rightarrow +\infty} 0 = 0$$

On constate, dans ce cas, que l'on ne peut pas permuter la limite quand le réel a tend vers $+\infty$ et la limite quand l'entier n tend vers $+\infty$.

Exercice 5 – Temps d'attente moyen

On utilisera les théorèmes suivants :

- Nombre de permutations d'un ensemble à n éléments
- Définition de l'espérance mathématique
- Pour tout nombre réel q distinct de 1, $\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$ si $0 < q < 1$

On dispose d'une boîte sphérique en rotation contenant trois boules identiques numérotés 1, 2, 3. On laisse successivement s'échapper chacune des boules et on donne la liste des numéros dans l'ordre de sortie. On suppose que toutes listes ont la même probabilité d'apparition.

1. Quelle est la probabilité que sorte la liste (1, 2, 3) ?

Soit n un entier naturel non nul. On répète l'épreuve précédente n fois de suite en remettant à chaque fois les trois boules dans la boîte.

2. Soit un entier naturel k tel que $1 \leq k \leq n$. Calculer la probabilité que la liste (1, 2, 3) apparaisse pour la première fois au rang k .

3. On désigne par X la variable aléatoire donnant le premier rang k où la liste (1, 2, 3) apparaît et 0 si la liste (1, 2, 3) n'apparaît pas. Donner l'expression de l'espérance mathématique $E(X)$ de la variable aléatoire X .

$E(X)$ est appelé le temps d'attente moyen d'apparition de la liste (1, 2, 3).

4. Calcul de $E(X)$ en fonction de n .

- On considère la fonction $f: x \mapsto \sum_{k=0}^n x^k$ définie dans \mathbf{R} . Vérifier que $E(X) = \frac{1}{6} f' \left(\frac{5}{6} \right)$.
- Pour $x \neq 1$, exprimer $f(x)$ sous la forme d'un quotient et donner une expression de la dérivée de la fonction f obtenue à partir de ce quotient.
- En déduire une expression directe de $E(X)$ en fonction de l'entier n .
- Montrer que lorsque n tend vers $+\infty$, $E(X)$ admet une limite que l'on déterminera. (On pourra admettre et utiliser la propriété suivante : soit $q \in]0; 1[$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} nq^n = 0$)

5. Généralisation.

On considère une épreuve conduisant à deux issues : S de probabilité p et S' de probabilité $1 - p$.

On répète cette épreuve n fois, chaque épreuve étant indépendante des autres.

On désigne par X la variable aléatoire donnant le premier rang où S apparaît et 0 s'il n'apparaît pas.

Exprimer $E(X)$ en fonction de n et montrer que $E(X)$ admet une limite lorsque n tend vers $+\infty$.

1. Une issue est une permutation de l'ensemble (1, 2, 3). Il y a $3! = 6$ permutations d'un ensemble à trois éléments. Les issues étant équiprobables, la probabilité d'obtenir (1, 2, 3) est donc $\frac{1}{6}$.

2. L'événement E_k : « le triplet apparaît pour la première fois au rang k » est l'intersection des événements A_{k-1} : « aux rangs 1; 2; ...; $k - 1$ le triplet (1, 2, 3) n'apparaît pas » et B_k : « au rang k , le triplet (1, 2, 3) apparaît »

$p(A_{k-1}) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}$ (répétition $k - 1$ fois de suite de façon indépendante de l'événement « (1, 2, 3) n'apparaît pas »).

D'où $p(E_k) = p(A_{k-1} \cap B_k) = p(A_{k-1}) \times p_{A_{k-1}}(B_k) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \times \frac{1}{6}$

3. $p(X = 0) = \left(\frac{5}{6}\right)^n$; pour tout entier k compris entre 1 et n , $p(X = k) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \times \frac{1}{6}$

D'où l'espérance mathématique $E(X) = 0 \times \left(\frac{5}{6}\right)^n + \sum_{k=1}^n k \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \times \sum_{k=1}^n k \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}$

4. a. La fonction dérivée de f est donnée par $f'(x) = 0 + \sum_{k=1}^n kx^{k-1} = \sum_{k=1}^n kx^{k-1}$; on vérifie immédiatement que $E(X) = \frac{1}{6} f' \left(\frac{5}{6} \right)$.

b. Pour $x \neq 1$, on connaît la formule de somme des termes d'une suite géométrique :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$

La fonction f est dérivable sur $\mathbf{R} - \{-1\}$ comme quotient de fonctions dérivables et pour tout nombre réel $x \neq 1$

$$f'(x) = \frac{-(n+1)x^n \times (1-x) - (1-x^{n+1}) \times (-1)}{(1-x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-(n+1)x^n + (n+1)x^{n+1} + 1 - x^{n+1}}{(1-x)^2} = \frac{1 - (n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}$$

c. On en déduit $E(X) = \frac{1}{6} \times \frac{1 - (n+1)\left(\frac{5}{6}\right)^n + n\left(\frac{5}{6}\right)^{n+1}}{\left(1 - \frac{5}{6}\right)^2} = 6 \left(1 - (n+1)\left(\frac{5}{6}\right)^n + n\left(\frac{5}{6}\right)^{n+1} \right)$

soit $E(X) = 6 \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n (n+1 - \frac{5}{6}n) \right) = 6 - \left(\frac{5}{6}\right)^n (n+6)$

d. On utilise la propriété : soit $q \in]0; 1[$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} nq^n = 0$

$$\left(\frac{5}{6}\right)^n (n+6) = n\left(\frac{5}{6}\right)^n + \left(\frac{5}{6}\right)^n.$$

En appliquant la propriété précédente à $q = \frac{5}{6}$, on obtient $\lim_{n \rightarrow +\infty} n\left(\frac{5}{6}\right)^n = 0$ et par ailleurs $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^n = 0$

On en déduit $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^n (n+6) = 0$ d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(6 - \left(\frac{5}{6}\right)^n (n+6) \right) = 6$.

Le temps moyen d'attente, c'est-à-dire le nombre moyen d'épreuves à effectuer pour obtenir (1,2,3) est 6.

5. La méthode se transpose exactement à une épreuve à deux issues S de probabilité p et S' de probabilité $1 - p$.

$$E(X) = 0 \times (1-p)^n + \sum_{k=1}^n k (1-p)^{k-1} \times p = p \times \sum_{k=1}^n k (1-p)^{k-1}$$

$$E(X) = p \times \frac{1 - (n+1)(1-p)^n + n(1-p)^{n+1}}{(1-(1-p))^2} = \frac{1}{p} (1 - (n+1)(1-p)^n + n(1-p)^{n+1})$$

En utilisant $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(1-p)^n = 0$, on en déduit que le temps moyen d'attente tend vers $\frac{1}{p}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 6 – Perpendiculaire commune

On utilisera les définitions et les théorèmes suivants :

- Positions relatives de droites de l'espace.
- Des droites D et D' de l'espace sont perpendiculaires par définition si et seulement si D et D' sont orthogonales et sécantes.
- Dans un repère orthonormé de l'espace des vecteurs $\vec{u}(a, b, c)$ et $\vec{u}'(a', b', c')$ sont orthogonaux si et seulement si $aa' + bb' + cc' = 0$
- Représentations paramétriques d'une droite.
- Equations cartésiennes d'un plan.
- Calcul de la distance dans un repère orthonormé de l'espace.

On se place dans un repère orthonormé de l'espace $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On donne deux droites D_1 et D_2 définies par des représentations paramétriques :

$$D_1: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = -t \end{cases}, t \in \mathbf{R} \quad D_2: \begin{cases} x = 1 + t' \\ y = 4 - t' \\ z = 5 \end{cases}, t' \in \mathbf{R}$$

Le but de l'exercice est de déterminer s'il existe une droite D perpendiculaire à la fois à D_1 et à D_2 .

1. Montrer que D_1 et D_2 sont des droites non coplanaires.
2. Déterminer les coordonnées d'un vecteur \vec{u} distinct du vecteur nul et orthogonal à la fois à un vecteur directeur de D_1 et à un vecteur directeur de D_2 .
3. Déterminer une équation cartésienne du plan P contenant à la fois D_1 et une droite dirigée par le vecteur \vec{u} .
4. a. Déterminer les coordonnées du point d'intersection B du plan P et de la droite D_2 .
b. Déterminer les coordonnées du point d'intersection A de la droite D_1 et de la droite contenant le point B , dirigée par le d'un vecteur \vec{u} trouvé dans la question 2.
5. Montrer que la droite (AB) est perpendiculaire à la fois à D_1 et à D_2 .
6. Montrer que si une droite D est une perpendiculaire commune à D_1 et D_2 , alors $D = (AB)$.
7. Montrer que pour tout point M de la droite D_1 et tout point M' de la droite D_2 , $MM' \geq AB$.

1. Des vecteurs directeurs respectifs de D_1 et D_2 sont $\vec{u}_1(1,1,-1)$ et $\vec{u}_2(1,-1,0)$. Les coordonnées de ces vecteurs n'étant pas proportionnelles, \vec{u}_1 et \vec{u}_2 ne sont pas colinéaires donc D_1 et D_2 ne sont pas parallèles. Etudions si les droites D_1 et D_2 sont sécantes. Pour cela résolvons le système d'équations :

$$\begin{cases} 1+t' = 1+t \\ 4-t' = 2+t \\ 5 = -t \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} 1+t' = -4 \\ 4-t' = -3 \\ -5 = t \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} t' = -5 \\ t' = 7 \\ t = -5 \end{cases}$$

Les équations sont incompatibles donc D_1 et D_2 ne sont pas sécantes et ne sont donc pas coplanaires.

2. Soit un vecteur $\vec{u}(a,b,c)$

$$\vec{u} \text{ est orthogonal à } \vec{u}_1 \text{ et } \vec{u}_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{u}_1 = 0 \\ \vec{u} \cdot \vec{u}_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b-c = 0 \\ a-b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 2a \\ b = a \end{cases}$$

Donnons au nombre réel a une valeur non nulle simple, par exemple $a = 1$. On en déduit que $\vec{u}(1,1,2)$ est orthogonal à \vec{u}_1 et \vec{u}_2 .

3. Déterminons les coordonnées d'un vecteur $\vec{n}(a,b,c)$ normal au plan P .

$$\vec{n} \text{ vérifie } \begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{u}_1 = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{u} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b-c = 0 \\ a+b+2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -2c \\ a+b+2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ b = -a \end{cases}; \text{ par exemple } \vec{n}(1,-1,0) \text{ est un vecteur normal au plan } P.$$

Par suite $x - y + d = 0$ est une équation cartésienne du plan P , où d est un réel à déterminer.

Le point de coordonnées $(1, 2, 0)$ appartient à la droite D_1 donc au plan P d'où $1 - 2 + d = 0$ soit $d = 1$.

Une équation cartésienne du plan P est donc $x - y + 1 = 0$.

4. a. Les coordonnées du point B vérifient :

$$\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x = 1 + t' \\ y = 4 - t' \\ z = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + t' - (4 - t') + 1 = 0 \\ x = 1 + t' \\ y = 4 - t' \\ z = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t' - 2 = 0 \\ x = 1 + t' \\ y = 4 - t' \\ z = 5 \end{cases}$$

On en déduit $t' = 1$, d'où B a pour coordonnées $(2, 3, 5)$.

- b. Etablissons une représentation paramétrique de la droite D passant par B et dirigée par le vecteur $\vec{u}(1,1,2)$.

$$D: \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = 5 + 2\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbf{R}$$

Réolvons maintenant le système :

$$\begin{cases} 1+t = 2+\lambda \\ 2+t = 3+\lambda \\ -t = 5+2\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t-\lambda = 1 \\ t-\lambda = 1 \\ t+2\lambda = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1+\lambda \\ 1+\lambda+2\lambda = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ \lambda = -2 \end{cases}$$

On en déduit $A(0, 1, 1)$

5. La droite (AB) est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{AB}(2,2,4)$. $\overrightarrow{AB} = 2\vec{u}$ donc (AB) est orthogonale à D_1 et à D_2 , coupe D_1 en A et D_2 en B . La droite (AB) est donc perpendiculaire à D_1 et à D_2 .

6. Soit D une droite perpendiculaire à D_1 et à D_2 . \vec{u} est donc un vecteur directeur de la droite D et par suite D et (AB) sont des droites parallèles. Désignons par A' et B' les points d'intersection respectifs de D avec D_1 et D_2 .

D coupe D_1 en un point A' . Le plan contenant les droites D et D_1 est le plan P défini à la question 3.

Le plan P et la droite D_2 se coupent en B . De plus B' appartient à D_2 par définition et appartient à D donc à P . On en déduit que $B' = B$.

D et (AB) sont des droites parallèles contenant un même point B , donc $D = (AB)$.

7. Soit M un point de la droite D_1 et M' un point de la droite D_2 . Il existe alors des nombres réels t et t' tels que $M(1+t, 2+t, -t)$ et $M'(1+t', 4-t', 5)$.

$$\text{On en déduit } \overrightarrow{MM'}(t'-t; 2-t'-t; 5+t) \text{ puis } MM'^2 = (t'-t)^2 + (2-t'-t)^2 + (5+t)^2$$

En développant :

$$MM'^2 = t'^2 - 2tt' + t^2 + 4 + t'^2 + t^2 - 4t' - 4t + 2tt' + 25 + 10t + t^2$$

$$MM'^2 = 2t'^2 + 3t^2 + 6t - 4t' + 29 = 2(t'^2 - 2t') + 3(t^2 + 2t) + 29$$

$$MM'^2 = 2[(t'-1)^2 - 1] + 3[(t+1)^2 - 1] + 29 = 2(t'-1)^2 + 3(t+1)^2 + 24$$

$$\text{De plus } AB^2 = 2^2 + 2^2 + 4^2 = 24$$

$$\text{Donc } MM'^2 - AB^2 = 2(t'-1)^2 + 3(t+1)^2 \text{ est positif ou nul ; d'où } MM'^2 \geq AB^2.$$

Puisque MM' et AB sont des distances, ces nombres sont positifs et par croissance de la fonction $x \mapsto x^2$ sur l'intervalle $[0; +\infty[$, $MM' \geq AB$.

Remarque : $AB = 24$ est donc le minimum de distance entre un point M de D et un point M' de D' .