ACADÉMIE DE VERSAILLES
Liberté
Égalité
Fraternité

Pépinière académique de mathématiques

Année 2021-2022 **Stage « filé »**

Classe terminale **Fiche numéro 3**

Parution lundi 17 janvier **Retour attendu pour le mercredi 2 février**

Exercice 1 Sommes d'inverses et constante d'Euler-Mascheroni

Rappels :

- pour comparer deux nombres, on étudie le signe de la différence ;
- pour déterminer le signe d'une fonction, on peut étudier ses variations et chercher les valeurs où elle s'annule ;
- on peut additionner membre à membre des inégalités de même sens.

En algèbre, on étudie des suites définies par $S_n = \sum_{k=k_0}^{k=n} t_k$, où (t_n) est une suite de réels. Ces suites (S_n) sont appelées *séries* et certaines sont très connues. La fiche 1 faisait étudier une série convergeant vers le nombre *e*. Cet exercice fait étudier deux autres séries très classiques.

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies par :

Pour tout entier $n \geq 1$, $u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k^2}$ et $v_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k}$.

1. a. Étudier le sens de variation de la suite (u_n).
   b. Comparer, pour tout entier $k > 1$, les nombres $\frac{1}{k^2}$ et $\frac{1}{k(k-1)}$. En déduire une majoration du nombre u_n.
   c. Montrer que la suite (u_n) converge.

On démontre en fait que la limite de la suite (u_n) est $\frac{\pi^2}{6}$.

2. a. Montrer que pour tout réel $x \geq 0$, $\frac{x}{x+1} \leq \ln(1+x) \leq x$.
   b. En déduire que, pour tout entier $k \geq 1$, un encadrement de $\ln(k+1) - \ln k$.
   c. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $\ln(n+1) \leq v_n \leq 1 + \ln n$. En déduire la limite de la suite (v_n).
3. Soit (w_n) la suite définie par, pour tout entier $n \geq 2$, $w_n = v_{n-1} - \ln n$.
   a. Déterminer le sens de variation de la suite (w_n).
   b. Montrer que la suite (w_n) converge.

On appelle constante d'Euler-Mascheroni la limite γ de la suite (w_n).

Exercice 2 Comparaison de moyennes

On montre que pour tout entier n tel que $n \geq 1$, la fonction f définie sur **R**$^+$ par $f(x) = x^n$ est dérivable (donc continue) sur **R**$^+$ et strictement croissante sur **R**$^+$. Comme de plus $f(0) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, le cas particulier du théorème des valeurs intermédiaires permet de dire que f est une bijection de **R**$^+$ sur **R**$^+$ et admet donc une bijection réciproque g définie sur **R**$^+$. On dit que g est la fonction racine $n^{\text{ième}}$ et on note pour tout x de l'intervalle **R**$^+$, $g(x) = \sqrt[n]{x}$.

La fonction racine $n^{\text{ième}}$ est strictement croissante sur **R**$^+$ et vérifie les propriétés suivantes :

Pour tous réels a et b positifs $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b}$, si de plus $b \neq 0$, $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.

Rappel : pour tous réels strictement positifs a et b, $\ln ab = \ln a + \ln b$, $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$ et pour tout entier $n \geq 1$, $\ln a^n = n \ln a$ et $\ln a^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \ln a$.

Pour comparer des produits, il peut être utile de comparer les logarithmes népériens de ces produits et une somme de logarithmes népériens peut être transformée en le logarithme népérien d'un produit.

Soit n un entier tel que $n \geq 2$ et $a_1, a_2, \dots, a_n$, n réels strictement positifs on définit la moyenne arithmétique m, la moyenne géométrique g et la moyenne harmonique h de ces réels par :

$m = \frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n}$ $\qquad$ $g = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$ $\qquad$ $\frac{1}{h} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}\right)$

1. Montrer que pour tout réel $x > 0$, $\ln x \leq x - 1$.
2. Appliquer l'inégalité précédente successivement aux nombres $\frac{a_1}{m}, \frac{a_2}{m}, \dots, \frac{a_n}{m}$ pour comparer les nombres g et m.
3. Appliquer aux nombres $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \dots, \frac{1}{a_n}$ l'inégalité trouvée précédemment pour les nombres $a_1, a_2, \dots, a_n$ et en déduire une inégalité entre m et h.

Exercice 3 Fonctions puissances

Dans le prolongement de la fonction racine $n^{\text{ième}}$, si α est un réel non nul, on définit sur $]0, +\infty[$ la fonction puissance notée f_α par $f_\alpha(x) = \mathrm{e}^{\alpha \ln x} = x^\alpha$.
On rappelle que pour tout réel $x > 0$, $x = \mathrm{e}^{\ln x}$.

1. Etudier, suivant les valeurs de α, les variations sur $]0, +\infty[$ de la fonction f_α.
2. Etudier, suivant les valeurs de α, les limites en 0 et en $+\infty$ de la fonction f_α.
3. Dans le cas où $\alpha > 0$, on prolonge la fonction f_α en 0 en posant $f_\alpha(0) = 0$. Montrer que la nouvelle fonction f_α est alors continue en 0 et étudier, suivant les valeurs de α, sa dérivabilité en 0.
4. Choisir plusieurs valeurs particulières de α représentatives des différents cas étudiés et tracer, sur un même graphique, les courbes représentatives des fonctions f_α correspondantes.

Exercice 4 Aires, intégrales et inégalités

Le plan étant muni d'un repère orthonormal, on définit l'intégrale d'une fonction f continue et positive sur un intervalle $[a, b]$ comme l'aire du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe représentant la fonction f et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.
Cette aire peut être majorée, minorée, encadrée par des sommes d'aires de rectangles ou de trapèzes lorsque la fonction est monotone et convexe ou concave, ce qui permet soit de déterminer une valeur approchée de l'aire soit d'obtenir des inégalités.
Définition : une fonction est dite convexe lorsque pour tous points A et B de sa courbe représentative, le segment [AB] est situé au-dessus de la courbe.
Propriété 1 : si une fonction f est deux fois dérivable sur un intervalle I, alors f est convexe sur I si et seulement si sa dérivée seconde est positive sur I.
Propriété 2 : si une fonction f est convexe sur un intervalle I alors, sur l'intervalle I, la courbe représentative de f est située au-dessus de ses tangentes.

On sait que si a et b sont deux réels strictement positifs alors $\sqrt{ab} < \frac{a+b}{2}$. L'objectif de cet exercice est de démontrer que si $0 < a < b$ alors $\sqrt{ab} < \frac{b-a}{\ln b - \ln a} < \frac{a+b}{2}$.
Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on considère la courbe représentative sur $]0, +\infty[$ de la fonction

$f : x \mapsto \frac{1}{x}$.

1. Montrer que $a < \frac{a+b}{2} < b$ et que $a < \sqrt{ab} < b$.
2. En partageant l'intervalle $[a, b]$ en deux intervalles comme sur la figure 1 ci-dessous, et en considérant la tangente à la courbe au point d'abscisse $\frac{a+b}{2}$ montrer que si $0 < a < b$ alors $\frac{b-a}{\ln b - \ln a} < \frac{a+b}{2}$.

3. En effectuant un autre partage de l'intervalle $[a, b]$ en deux intervalles, comme sur la figure 2 ci-dessous, montrer que si $0 < a < b$ alors $\sqrt{ab} < \frac{b-a}{\ln b - \ln a}$.

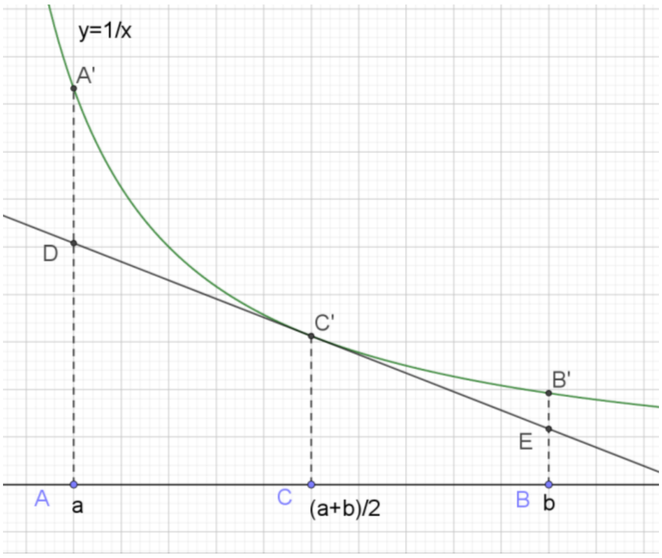


Figure 1

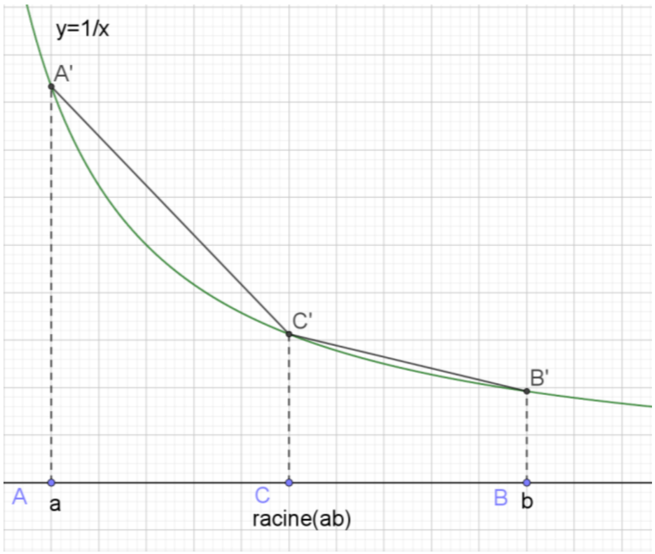


Figure 2

Exercice 5 Espérance et variance en indépendance

On rappelle que :

Définition : soit X est une variable aléatoire prenant les valeurs $x_1, x_2, \dots, x_n$ alors l'espérance mathématique $E(X)$ de X et la variance $V(X)$ de X sont définies par :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{i=n} x_i P(X = x_i) \qquad \text{et} \qquad V(X) = E((X - E(X))^2).$$

Propriété 1 : soit X et Y deux variables aléatoires et a un réel, alors $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$ et $E(aX) = aE(X)$

Propriété 2 : soit X une variable aléatoire, alors $V(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2$.

Définition : soit X et Y deux variables aléatoires prenant respectivement les valeurs $x_1, x_2, \dots, x_n$ et les valeurs $y_1, y_2, \dots, y_m$. On dit que X et Y sont indépendantes lorsque pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq n$ et pour tout entier j tel que $1 \leq j \leq m$, on a $P\left(X = x_i \; et \; Y = y_j\right) = P(X = x_i) \times P(Y = y_j)$.

1. Démontrer la propriété 2.
2. Montrer que si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes alors $E(XY) = E(X)E(Y)$ et $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$.
3. Soit X la variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n et p. À l'aide des propriétés ci-dessus, retrouver l'expression de $E(X)$ et de $V(X)$ en fonction de n et p.

Exercice 6 Orthogonalité dans un cercle

On peut démontrer une orthogonalité en prouvant qu'un produit scalaire est nul.

Les propriétés opératoires du produit scalaire alliées à la relation de Chasles sont souvent utiles pour calculer des produits scalaires.

On considère un cercle C de centre O et de rayon R et un point M intérieur au cercle. Par le point M, on mène deux droites perpendiculaires qui coupent le cercle en A et A' pour une droite, en B et B' pour l'autre droite. On note I le milieu de [AB].

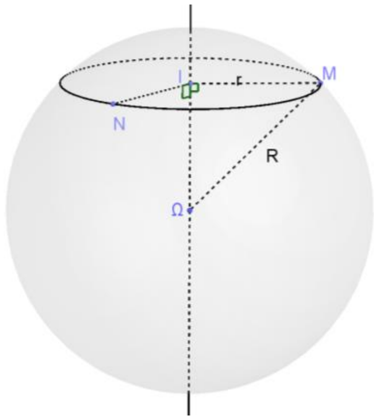
1. Montrer que $\overrightarrow{\mathrm{MA}}.\overrightarrow{\mathrm{MA'}} = \mathrm{MO}^2 - R^2$.

(On pourra introduire le point C diamétralement opposé à A sur le cercle C).
2. Montrer que la droite (IM) est la hauteur issue de M dans le triangle MA'B'.

Exercice 7 Intersection sphère plan

L'intersection d'une sphère S de centre Ω et d'un plan P peut être :
- l'ensemble vide ;
- un point (le plan P est alors tangent à la sphère S) ;
- un cercle

suivant que la distance du centre de la sphère au plan est respectivement supérieure, égale ou inférieure au rayon R de la sphère.



Dans le cas où l'intersection est un cercle, si on note I son centre et r son rayon alors la droite $(\Omega\mathrm{I})$ est perpendiculaire au plan P donc orthogonale à toute droite de ce plan.

La distance d'un point A à un plan P est la distance entre le point A et son projeté orthogonal H sur le plan, c'est-à-dire le point d'intersection entre le plan P et la perpendiculaire au plan P passant par A.
Propriété : si P est un plan passant par un point B et si $\vec{n}$ est un vecteur normal de P, alors la distance $d(A, P)$ d'un point A au plan P est $d(A, P) = \frac{|\overrightarrow{AB}.\vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$.

1. Démonstration et application de la propriété

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, on considère le plan P d'équation $ax + by + cz + d = 0$, où $a \neq 0$. Soit $A(x_A, y_A, z_A)$ un point de l'espace et $B(x_B, y_B, z_B)$ un point du plan P. On note H le projeté orthogonal de A sur P.

a. Montrer que, si $\vec{n}$ est un vecteur normal du plan P, alors $|\overrightarrow{AB}.\vec{n}| = AH \times \|\vec{n}\|$.
b. En déduire l'expression de la distance du point A au plan P en fonction de $x_A, y_A, z_A, a, b, c, d$.

2. On considère la sphère S de centre $\Omega(1,2,-1)$, de rayon $R = 4$ et le plan P d'équation $2x + y + 2z = k$ où k est un réel quelconque.
   a. Déterminer, suivant les valeurs de k, l'intersection de la sphère S avec le plan P.
   b. Dans le cas où $k = -7$, déterminer les éléments caractéristiques de l'intersection de la sphère S avec le plan P.