ACADÉMIE DE VERSAILLES
Liberté
Égalité
Fraternité

Pépinière académique de mathématiques

Année 2022-2023 **Stage « filé »**

Classe terminale **Fiche numéro 3**

Parution lundi 30 janvier **Retour attendu pour le jeudi 16 février**

Exercice 1 – Suites et probabilités

Propriété : si A et B sont deux événements incompatibles, alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.
Cette propriété s'étend à une union finie d'événements deux à deux incompatibles.
Propriété : Soient A et B des événements tels que $p(B) \neq 0$; alors $p(A \cap B) = p_B(A) \times p(B)$.
Cette propriété permet de calculer de nombreuses probabilités en s'appuyant sur un arbre de probabilités.

Une urne contient en proportion 70% de jetons verts, 10% de jetons bleus, 20% de jetons noirs.
On extrait au hasard un jeton de l'urne et l'on note sa couleur.
Un jeu consiste à extraire un jeton de l'urne :

- Si le jeton est bleu, le jeu s'arrête et l'on a gagné.
- Si le jeton est noir, le jeu s'arrête et l'on a perdu.
- Si le jeton est vert, on le replace dans l'urne et l'on recommence l'épreuve.

Soit n un entier naturel non nul. On fixe à n le nombre d'itérations de l'épreuve précédente (qui peut s'interrompre avant le rang n si l'on a au préalable perdu ou gagné)
Pour tout entier $k \geq 1$ inférieur ou égal à n, on note :

- B_k l'événement « le jeton extrait après k itérations est bleu »
- N_k l'événement « le jeton extrait après k itérations est noir »
- V_k l'événement « le jeton extrait après k itérations est vert »
- G_n l'événement « on a gagné à un rang k inférieur ou égal à n »
- P_n l'événement « on a perdu à un rang k inférieur ou égal à n »

1. On se place dans cette question dans le cas où $n = 2$.
   a. Représenter l'épreuve à l'aide d'un arbre de probabilité.
   b. Calculer la probabilité de chacun des événements V_2, G_2, P_2.

2. n désigne maintenant un entier naturel non nul quelconque. On note respectivement v_n, g_n, p_n la probabilité des événements V_n, G_n, P_n .
   a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique ; établir l'expression du terme général en fonction de n.
   b. Soit un entier naturel k tel que $1 \leq k \leq n$. Justifier que $p(B_k) = 0{,}1 \times 0{,}7^{k-1}$ et $p(N_k) = 0{,}2 \times 0{,}7^{k-1}$
   c. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $g_n = \sum_{k=1}^{n} 0{,}1 \times 0{,}7^{k-1}$ et $p_n = \sum_{k=1}^{n} 0{,}2 \times 0{,}7^{k-1}$.
   d. Exprimer g_n et p_n en fonction de l'entier n.
   e. Etudier la convergence éventuelle des suites $(v_n), (g_n), (p_n)$.

3. Déterminer le plus petit entier naturel n pour lequel $g_n > 0{,}32$.

Exercice 2 – Comparaison de moyennes

On montre que pour tout entier n tel que $n \geq 1$, la fonction f définie sur **R⁺** par $f(x) = x^n$ est dérivable (donc continue) sur **R⁺** et strictement croissante sur **R⁺**. Comme de plus $f(0) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, le cas particulier du théorème des valeurs intermédiaires permet de dire que f est une bijection de **R⁺** sur **R⁺** et admet donc une bijection réciproque g définie sur **R⁺**. On dit que g est la fonction racine $n^{\text{ième}}$ et on note pour tout x de l'intervalle **R⁺**, $g(x) = \sqrt[n]{x}$. On note aussi $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$.
La fonction racine $n^{\text{ième}}$ est strictement croissante et vérifie les propriétés suivantes :

Pour tous réels a et b positifs $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b}$, si de plus $b \neq 0$, $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.

Rappel : pour tous réels strictement positifs a et b, $\ln ab = \ln a + \ln b$, $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$ et pour tout entier $n \geq 1$, $\ln a^n = n \ln a$ et $\ln a^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\ln a$.
Pour comparer des produits, il peut être utile de comparer les logarithmes népériens de ces produits et une somme de logarithmes népériens peut être transformée en le logarithme népérien d'un produit.

Soit n un entier tel que $n \geq 2$ et $a_1, a_2, \dots, a_n$, n réels strictement positifs on définit la moyenne arithmétique m, la moyenne géométrique g et la moyenne harmonique h de ces réels par :

$m = \frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n}$ $\qquad$ $g = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$ $\qquad$ $\frac{1}{h} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}\right)$

1. Montrer que pour tout réel $x > 0$, $\ln x \leq x - 1$.
2. Appliquer l'inégalité précédente successivement aux nombres $\frac{a_1}{m}, \frac{a_2}{m}, \dots, \frac{a_n}{m}$ pour comparer les nombres g et m.
3. Appliquer aux nombres $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \dots, \frac{1}{a_n}$ l'inégalité trouvée précédemment pour les nombres $a_1, a_2, \dots, a_n$ et en déduire une inégalité entre m et h.

Exercice 3 – Fonction convexe

L'étude des variations d'une fonction dérivable s'appuie le plus souvent sur le signe de sa fonction dérivée, les valeurs où celle-ci s'annule ne suffisant pas pour déterminer ce signe.
Propriété : soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I et C sa courbe représentative. C admet un point d'inflexion en un point d'abscisse x_0 si et seulement si la dérivée seconde de f s'annule en changeant de signe en x_0.
Soit f la fonction définie sur **R** par $f(x) = (x+1)\mathrm{e}^{-x^2}$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. Etudier les variations de la fonction f.
2. Déterminer les points d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}$.
3. Déterminer une équation de la tangente au point d'abscisse 1 à la courbe $\mathcal{C}$.

Exercice 4 – Encadrement de $\ln(1+x)$

Rappels :
- pour comparer deux nombres, on peut étudier le signe de la différence ;
- pour déterminer le signe d'une fonction, on peut étudier ses variations et chercher les valeurs où elle s'annule ;
- on peut additionner membre à membre des inégalités de même sens ;
- pour déterminer une limite, on peut chercher à appliquer le théorème des gendarmes.

1. Etudier le sens de variation puis le signe des fonctions suivantes :
   a. La fonction f définie sur $]-1, +\infty[$ par $f(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ln(1+x)$.
   b. La fonction g définie sur $[0, +\infty[$ par $g(x) = \ln(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2}\right)$.
   c. La fonction h définie sur $\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$ par $h(x) = \ln(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{3}\right)$.

2. En déduire que :
   a. Pour tout $x \in [0, +\infty[$, $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$.
   b. Pour tout $x \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right]$, $x - \frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{3} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$.

3. Etudier la limite éventuelle en 0 de $\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$.

Exercice 5 – Aires, intégrales et inégalités

Le plan étant muni d'un repère orthonormal, on définit l'intégrale d'une fonction f continue et positive sur un intervalle $[a, b]$ comme l'aire du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe représentant la fonction f et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.

Cette aire peut être majorée, minorée, encadrée par des sommes d'aires de rectangles ou de trapèzes lorsque la fonction est monotone et convexe ou concave, ce qui permet soit de déterminer une valeur approchée de l'aire soit d'obtenir des inégalités.

Définition : une fonction est dite convexe lorsque pour tous points A et B de sa courbe représentative, le segment [AB] est situé au-dessus de la courbe.

Propriété 1 : si une fonction f est deux fois dérivable sur un intervalle I, alors f est convexe sur I si et seulement si sa dérivée seconde est positive sur I.

Propriété 2 : si une fonction f est convexe sur un intervalle I alors, sur l'intervalle I, la courbe représentative de f est située au-dessus de ses tangentes.

On sait que si a et b sont deux réels strictement positifs alors $\sqrt{ab} < \frac{a+b}{2}$. L'objectif de cet exercice est de démontrer que si $0 < a < b$ alors $\sqrt{ab} < \frac{b-a}{\ln b - \ln a} < \frac{a+b}{2}$.

Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on considère la courbe représentative sur $]0, +\infty[$ de la fonction

$f : x \mapsto \frac{1}{x}$.

1. Montrer que $a < \frac{a+b}{2} < b$ et que $a < \sqrt{ab} < b$.
2. En partageant l'intervalle $[a, b]$ en deux intervalles comme sur la figure 1 ci-dessous, et en considérant la tangente à la courbe au point d'abscisse $\frac{a+b}{2}$ montrer que si $0 < a < b$ alors $\frac{b-a}{\ln b - \ln a} < \frac{a+b}{2}$.
3. En effectuant un autre partage de l'intervalle $[a, b]$ en deux intervalles, comme sur la figure 2 ci-dessous, montrer que si $0 < a < b$ alors $\sqrt{ab} < \frac{b-a}{\ln b - \ln a}$.

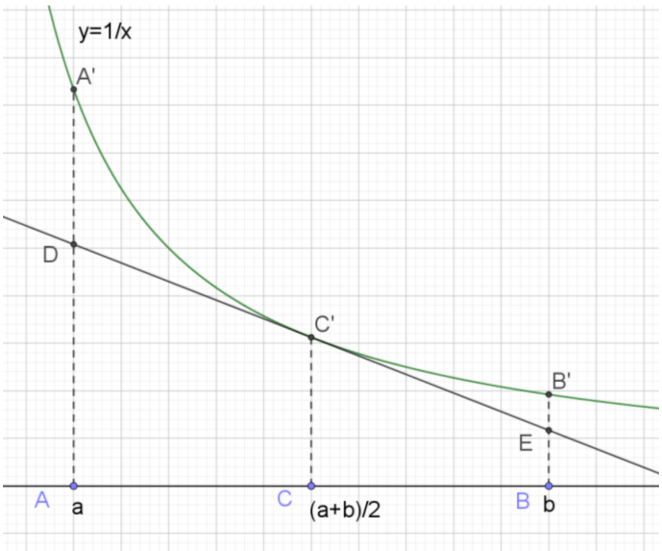


Figure 1

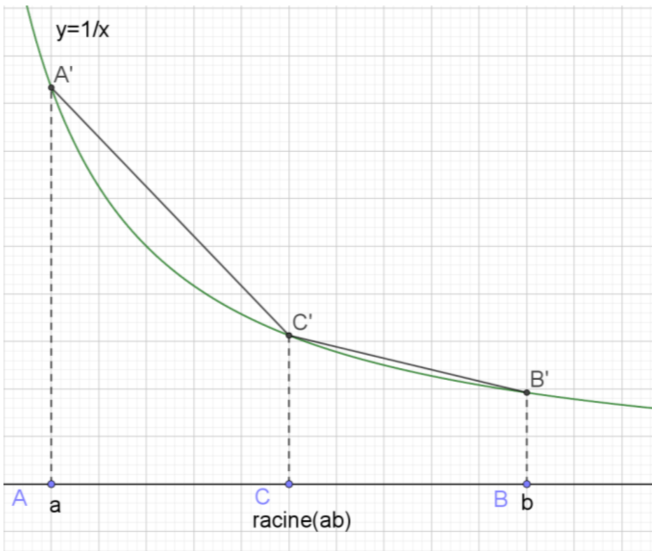


Figure 2

Exercice 6 : …le désordre, ça vous dérange ?

Définition : On appelle permutation des éléments de l'ensemble $E = \{a_1, a_2, \dots, a_N\}$ toute liste à n éléments de E deux à deux distincts.

Propriété : le nombre de permutations d'un ensemble de cardinal n est $n\,! = n \times (n-1) \times \dots \times 1$

Propriété : si A et B sont deux ensembles finis disjoints (c'est-à-dire $A \cap B = \emptyset$), alors

$$\text{Card}\,(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B).$$

Soit k un entier naturel non nul et une liste ordonnée $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ de k éléments deux à deux distincts.
On appelle *dérangement* de la liste $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ toute permutation des éléments de la liste telle qu'aucun élément ne conserve la même place.
Exemple :
$(2,3,4,1)$ est un dérangement de la liste $(1,2,3,4)$.
$(1,4,3,2)$ n'est pas un dérangement de la liste $(1,2,3,4)$ car 1 et 3 conservent leurs places respectives.
On désigne par D_k le nombre de dérangements d'une liste à k éléments.

1. Ecrire tous les dérangements de chacune des listes suivantes : ***a.*** (1) ***b.*** $(1,2)$ ***c.*** $(1,2,3)$ ***d.*** $(1,2,3,4)$ et donner la valeur des nombres D_1, D_2, D_3, D_4.

2. Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 2 et la liste des k entiers $L_k = (1,2, \ldots, k)$.

a. Montrer que le nombre de permutations laissant un unique élément de la liste L_k à sa place est kD_{k-1}.

b. Déterminer le nombre de permutations laissant exactement deux éléments de la liste L_k à leur place.

c. Établir la formule : $k\,! = 1 + \sum_{i=0}^{k-2} \binom{k}{i} \mathrm{D}_{k-i}$

3. À l'entrée d'une salle de spectacle au début du <u>XX</u>ième siècle, cinq hommes déposent au vestiaire leurs chapeaux respectifs. L'employé leur attribue les numéros de porte-manteaux 1, 2 ,3 ,4 ,5 mais en réalité dispose au hasard ces chapeaux sur les cinq porte-manteaux. Quelle est la probabilité qu'à la sortie, aucun des hommes ne se retrouve avec son propre chapeau ?

Exercice 7 – Histoires de tétraèdre

<u>Propriété :</u> soit A, B, C, D quatre points de l'espace tels que $A \neq \mathrm{B}$ et $\mathrm{C} \neq \mathrm{D}$. Alors les droites (AB) et (CD) sont orthogonales si et seulement si $\overrightarrow{\mathrm{AB}}.\overrightarrow{\mathrm{CD}} = 0$.

<u>Définition :</u> on dit qu'une droite de l'espace est perpendiculaire à un plan lorsqu'elle est orthogonale à toute droite de ce plan.

<u>Propriété :</u> si une droite de l'espace est orthogonale à deux droites sécantes d'un plan alors elle est perpendiculaire à ce plan.

<u>Méthode :</u> pour montrer que deux droites sont orthogonales, on peut :

- montrer que le produit scalaire de vecteurs directeurs de ces droites est nul ;
- montrer qu'une des droites est perpendiculaire à un plan contenant l'autre droite (en montrant qu'elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan)..

Soit OABC un tétraèdre tel que les triangles $\mathrm{OAB}, \mathrm{OAC}$ et OBC sont isocèles rectangles en O. Soit I milieu de $[\mathrm{AB}]$, H le pied de la hauteur issue de O dans le triangle OIC.

1. ***a.*** Démontrer que les droites (OH) et (AB) sont orthogonales.

b. Que représente le point H pour le tétraèdre OABC ?

c. Montrer que le point H est l'orthocentre du triangle ABC.

2. On pose $\mathrm{OA} = a$.

a. Calculer le volume du tétraèdre OABC.

b. En déduire que $\mathrm{OH} = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

3. Soit D le symétrique du point H par rapport à O.

a. Démontrer que $\left(\mathrm{O}, \frac{1}{a}\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \frac{1}{a}\overrightarrow{\mathrm{OB}}, \frac{1}{a}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)$ est un repère orthonormal de l'espace.

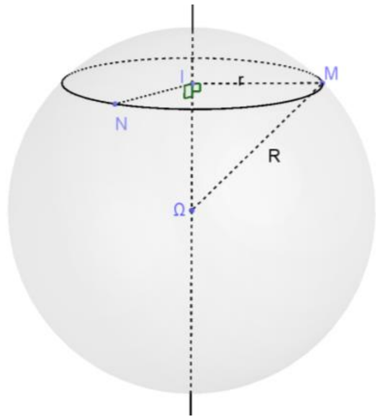
b. Déterminer les coordonnées des points $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}$ et montrer que ABCD est un tétraèdre régulier (toutes ses arêtes ont la même longueur).

Exercice 8 – Intersection sphère plan

La distance d'un point A à un plan P est la distance entre le point A et son projeté orthogonal H sur le plan, c'est-à-dire le point d'intersection entre le plan P et la perpendiculaire au plan P passant par A.

L'intersection d'une sphère S de centre Ω et d'un plan P peut être :
- l'ensemble vide ;
- un point (le plan P est alors tangent à la sphère S) ;
- un cercle

suivant que la distance du centre de la sphère au plan est respectivement supérieure, égale ou inférieure au rayon R de la sphère.



Dans le cas où l'intersection est un cercle, si on note I son centre et r son rayon alors la droite $(\Omega\mathrm{I})$ est perpendiculaire au plan P donc orthogonale à toute droite de ce plan.

Propriété : si P est un plan passant par un point B et si $\vec{n}$ est un vecteur normal de P, alors la distance $d(A,P)$ d'un point A au plan P est $d(A,P) = \frac{|\overrightarrow{AB}.\vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$.

1. Démonstration et application de la propriété

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, on considère le plan P d'équation $ax + by + cz + d = 0$, où $a \neq 0$. Soit $A(x_A, y_A, z_A)$ un point de l'espace et $B(x_B, y_B, z_B)$ un point du plan P. On note H le projeté orthogonal de A sur P.

a. Montrer que, si $\vec{n}$ est un vecteur normal du plan P, alors $|\overrightarrow{AB}.\vec{n}| = AH \times \|\vec{n}\|$.

b. En déduire l'expression de la distance du point A au plan P en fonction de $x_A, y_A, z_A, a, b, c, d$.

2. On considère la sphère S de centre $\Omega(1,2,-1)$, de rayon $R = 4$ et le plan P d'équation $2x + y + 2z = k$ où k est un réel quelconque.

   a. Déterminer, suivant les valeurs de k, l'intersection de la sphère S avec le plan P.

   b. Dans le cas où $k = -7$, déterminer les éléments caractéristiques de l'intersection de la sphère S avec le plan P.