ACADÉMIE DE VERSAILLES
Liberté
Égalité
Fraternité

Pépinière académique de mathématiques

Stage « en ligne » de janvier et février 2021

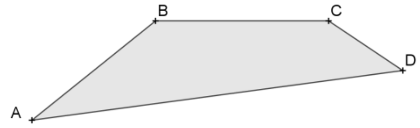
Fiche numéro 3

Les propositions de solution de chaque exercice doivent être envoyées d'ici le vendredi 5 mars à l'adresse euler.pepiniere@ac-versailles.fr, sous forme numérique (format .pdf ou image), en pièce jointe ou avec un système de dépôt pour les fichiers volumineux, par les professeurs selon les modalités précisées dans le courrier envoyé dans les lycées (envoi des propositions d'au plus deux équipes).

Exercice CG 3. 1 Plutôt plat, ce quadrilatère convexe

On considère un quadrilatère convexe ABCD dont les mesures des angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{BCD}$ sont supérieures à 120°.

Montrer que $AC + BD > AB + BC + CD$.



Exercice CG 3. 2 Pourquoi 19 ?

Trouver tous les entiers x et y tels que $x^3(y+1) + y^3(x+1) = 19$ (*).

Exercice CG 3. 3 Une suite majoritairement décroissante (CG 2012)

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombre réels positifs telle que $u_0 = 1$ et, pour tout entier n, au moins la moitié des n termes $u_0, u_1, \dots, u_{n-1}$ soient supérieurs ou égaux à $2u_n$.

Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers 0.

Exercice CG 3. 4 À la recherche de la contradiction

Montrer qu'il n'existe pas de fonction f de **R**$^+$ dans **R** telle que pour tous réels x et y positifs ou nuls :

$$f(x + y^2) \geq f(x) + y$$

Exercice CG 3. 5 (programme « mathématiques expertes ») Un multiple de 48

Montrer que si a, b, c sont trois nombres premiers strictement supérieurs à 3, alors le nombre $(a-b)(b-c)(c-a)$ est multiple de 48.

Exercice CG 3. 6 Dés icosaédriques

Sur chacune des vingt faces d'un dé icosaédrique est inscrit un entier compris entre 1 et 20 (tous ces entiers sont utilisés). On considère que ces dés sont bien équilibrés. On lance quatre tels dés et on note les quatre nombres apparaissant sur les faces supérieures.

Si la même face apparaît deux fois ou plus, on marque le nombre de points indiqué sur cette face.

Par exemple, le tirage $(2,16,5,10)$ ne rapporte rien, le tirage $(5, 5, 10, 20)$rapporte 5 points, le tirage $(7, 7, 7, 7)$ rapporte 7 points et le tirage $(8, 11, 11,8)$ rapporte 19 points.

1. Quelle est la probabilité que je ne marque rien ?

2. On donne un entier a compris entre 1 et 20. Pour tout entier k compris entre 0 et 4, quelle est la probabilité d'un lancer amenant exactement k « a » ?

3. Pour tout a, on note X_a la variable aléatoire qui à chaque lancer associe 1 s'il y a au moins deux faces marquées a, 0 dans les autres cas.

Quelle est la loi de X_a ? Exprimer le gain G en fonction de ces variables et calculer son espérance.

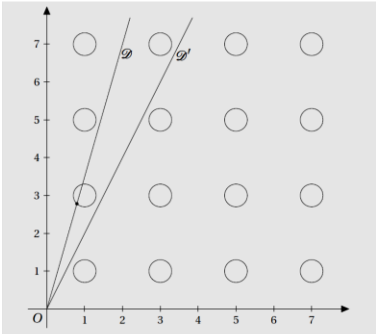
4. Quelle est la probabilité de marquer exactement 8 points ?

Lors d'une partie, on décide que chaque joueur est autorisé à relancer un ou plusieurs dés pour tenter d'améliorer son score.

5. Si je tire $(11, 7, 2, 2)$, ai-je intérêt à tout relancer, garder le 11 ou garder les deux 2 ? Que dois-je faire ?

Exercice CG 3. 7 Un arbre peut-il cacher la forêt ?

Un observateur se trouve au sein d'une plantation régulière d'arbres de même diamètre. On cherche à savoir s'il existe des directions dans lesquelles le regard de l'observateur ne butte pas sur un tronc. L'observateur est situé à l'origine d'un repère orthonormé, son regard est figuré par des demi-droites issues de O et contenues dans le premier quadrant. Les arbres sont figurés par des disques de rayon R, centrés aux points à coordonnées entières impaires et positives.



Soit m un réel strictement positif, on note $\mathcal{D}_m$ la demi-droite de pente m issue de l'origine.

« Rappel » : si m est un nombre irrationnel positif alors pour tout réel positif ε, il existe des entiers naturels a et b premiers entre eux tels que $|b - am| < \varepsilon$.

1. Montrer que la demi-droite $\mathcal{D}_m$ rencontre le cercle centré au point de coordonnées a et b si et seulement si $|b - ma| \leq R\sqrt{1 + m^2}$.

2. En déduire que si m est irrationnel, alors $\mathcal{D}_m$ rencontre un arbre.

3. On suppose que $m = \frac{b}{a}$, a et b étant des entiers naturels premiers entre eux.

a. On suppose que a et b sont impairs. $\mathcal{D}_m$ rencontre-t-elle un arbre ?

b. On suppose que a et b sont de parités différentes et que $\mathcal{D}_m$ rencontre un arbre. Montrer que $1 \leq R\sqrt{a^2 + b^2}$.

4. En déduire que, si toutes les demi-droites $\mathcal{D}_m$ rencontrent un arbre, alors $R \geq \frac{1}{\sqrt{5}}$.

5. On suppose réciproquement que $R \geq \frac{1}{\sqrt{5}}$. Montrer qu'alors, pour tout m il existe un entier naturel impair α tel que la demi-droite $\mathcal{D}_m$ rencontre l'arbre planté au point de coordonnées $(\alpha, 1)$ ou au point de coordonnées $(1, \alpha)$.

6. Les *premières rangées d'arbres* sont celles constituées des arbres centrés aux points d'abscisse ou d'ordonnée 1. Montrer que si l'observateur voit à travers les premières rangées, il voit à travers la plantation.