Pépinière académique de mathématiques

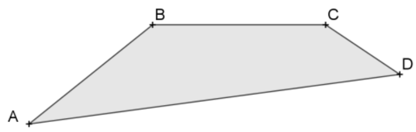
Stage « en ligne » de janvier et février 2021

Fiche numéro 3

Les propositions de solution de chaque exercice doivent être renvoyées sous forme numérique (on peut utiliser un système de transfert de « gros fichiers ») par les professeurs selon les modalités précisées lors de l'inscription.

Exercice CG 3. 1 Plutôt plat, ce quadrilatère convexe

On considère un quadrilatère convexe ABCD dont les mesures des angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{BCD}$ sont supérieures à 120°.
Montrer que $AC + BD > AB + BC + CD$.



On pose $BC = x$, $BA = y$ et $CD = z$.
La formule d'Al Kashi appliquée successivement dans les triangles ABC et BCD donne les égalités :
$AC^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos\widehat{ABC}$ et $BD^2 = x^2 + z^2 - 2xz\cos\widehat{BCD}$
Comme les mesures des angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{BCD}$ sont supérieures à 120°, $\cos\widehat{ABC} < -\frac{1}{2}$ et $\cos\widehat{BCD} < -\frac{1}{2}$
D'où $AC^2 > x^2 + y^2 + xy$ et $BD^2 > x^2 + z^2 + xz$.
Il suffit donc de prouver que $\sqrt{x^2 + y^2 + xy} + \sqrt{x^2 + z^2 + xz} > x + y + z$
Or, $4(x^2 + y^2 + xy) > (x + 2y)^2$ car $x > 0$ donc $\sqrt{x^2 + y^2 + xy} > \frac{x+2y}{2}$ (x et y étant positifs).
De même $\sqrt{x^2 + z^2 + xz} > \frac{x+2z}{2}$. Il suffit alors d'ajouter membre à membre les deux inégalités pour pouvoir conclure.

Exercice CG 3. 2 Pourquoi 19 ?

Trouver tous les entiers x et y tels que $x^3(y + 1) + y^3(x + 1) = 19$ (*).

On commence par remarquer que x comme y ne peut être nul. En effet, si $x = 0$, alors $y^3 = 19$, ce qui est impossible car y est un entier. Par symétrie de l'équation (*), on ne peut pas avoir non plus $y = 0$.
On remarque ensuite que x et y ne peuvent qu'être du même signe :

- Si $x < 0 < y$, alors $x^3(y + 1) < 0$ et comme x est un entier, $x + 1 \leq 0$ donc $y^3(x + 1) \leq 0$ et l'équation (*) ne peut être vérifiée.
- Par symétrie de l'équation (*), on en déduit que l'on ne peut pas plus avoir $y < 0 < x$.

Toujours par symétrie de l'équation (*), on va se limiter au cas où $\leq y$. On considère alors plusieurs cas :
<u>1er cas :</u> si $x \leq y < 0$, alors on pose $u = -x$ et $v = -y$, ce qui donne $u \geq v > 0$. L'équation (*) s'écrit alors $u^3(v - 1) + v^3(u - 1) = 19$ $(**)$. Comme $u \geq v > 0$, on en déduit $19 \geq v^3(v - 1) + v^3(v - 1)$, ce qui se traduit, puisque les nombres considérés sont des entiers, $v^3(v - 1) \leq 9$ soit $v \leq 2$.
Si $v = 1$, alors l'équation (**) donne $u = 20$
Si $v = 2$, alors l'équation (**) donne $u^3 + 8(u - 1) = 19$ soit $u(u^2 + 8) = 27$. On vérifie qu'aucun entier u positif ne peut être solution de cette équation.
Dans ce cas, l'unique couple solution (u, v) est donc le couple $(20,1)$ et l'unique couple solution (x, y) est donc le couple $(-20, -1)$.
<u>2e cas :</u> si $0 < x \leq y$ alors l'équation (*) entraine l'inégalité $x^3(x + 1) + x^3(x + 1) \leq 19$, d'où, comme précédemment, $x^3(x + 1) \leq 9$.
Le seul entier x positif vérifiant cette inégalité est $x = 1$. En reportant dans l'équation (*), on obtient l'équation $y(2y^2 + 1) = 18$ dont la seule solution entière positive est $y = 2$. Dans ce cas, le seul couple (x, y) solution est le couple $(2,1)$.
Au final l'équation (*) admet quatre couples solutions $(-20, -1)$, $(-1, -20)$, $(1,2)$ et $(2,1)$.

Exercice CG 3. 3 Une suite majoritairement décroissante (CG 2012)
Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombre réels positifs telle que $u_0 = 1$ et, pour tout entier n, au moins la moitié des n termes $u_0, u_1, \dots, u_{n-1}$ soient supérieurs ou égaux à $2u_n$.
Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers 0.

Pour tout entier naturel non nul n,
- Si n est pair alors il existe un entier p tel que $n = 2p$ et parmi les $2p$ termes $u_0, u_1, \dots, u_{n-1}$, au moins p termes sont supérieurs ou égaux à $2u_n$. Il y a donc au moins un terme de rang supérieur ou égal à $p-1$ qui est supérieur ou égal à $2u_n$. Or, dans ce cas, $p-1 = \frac{n}{2} - 1$.
- Si n est impair alors il existe un entier p tel que $n = 2p+1$ et parmi les $2p+1$ termes $u_0, u_1, \dots, u_{n-1}$, au moins $p+1$ termes sont supérieurs ou égaux à $2u_n$. Il y a donc au moins un terme de rang supérieur ou égal à p qui est supérieur ou égal à $2u_n$. Or, dans ce cas, $p-1 \geq \frac{n}{2} - 1$ car $p-1 = \frac{n-1}{2}$.
Dans les deux cas, il existe un terme de rang n_1 tel que $\frac{n}{2} - 1 \leq n_1 < n$ et $u_{n_1} \geq 2u_n$.
On peut de même montrer qu'il existe un terme de rang n_2 tel que $\frac{n_1}{2} - 1 \leq n_2 < n$ et $u_{n_2} \geq 2u_{n_1}$.
En posant $n_0 = n$, on construit des entiers non nuls $n_0, n_1, \dots, n_k, \dots$ tels que pour tout i, $\frac{n_i}{2} - 1 \leq n_{i+1} < n_i$ et $u_{n_{i+1}} \geq 2u_{n_i}$. Tant que $n_i \neq 0$, on peut trouver n_{i+1} et construire ainsi une suite d'entiers strictement décroissante. Le processus de construction s'arrête donc pour le premier entier k non nul tel que $n_k \leq 2$. Pour tout entier i compris entre 0 et k, on a alors $n_{i+1} + 2 \geq \frac{1}{2}(n_i + 2)$. On peut alors montrer par récurrence sur i que pour tout entier i compris entre 0 et k, $n_i + 2 \geq \frac{1}{2^i}(n_0 + 2)$:
- Il y a égalité pour $i = 0$;
- Si pour un entier i, $i < k$, $n_i + 2 \geq \frac{1}{2^i}(n_0 + 2)$, alors $n_{i+1} + 2 \geq \frac{1}{2}(n_i + 2) \geq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^i}(n_0 + 2)$ et la propriété est vraie au rang $i+1$.

On a donc $n_k + 2 \geq \frac{1}{2^k}(n_0 + 2)$ soit $2^k \geq \frac{n_0+2}{n_k+2}$ et, comme $n_k \leq 2$, on en déduit que $2^k \geq \frac{n+2}{4}$. (*)
D'autre part, pour tout entier i compris entre 0 et $k-1$, $u_{n_{i+1}} \geq 2u_{n_i}$ et on peut montrer par récurrence que, pour tout entier i compris entre 0 et k, $u_{n_i} \geq 2^i u_{n_0}$ d'où $u_{n_k} \geq 2^k u_n$ (**)
Des inégalités (*) et (**), puisque les nombres considérés sont positifs, on tire $u_{n_k} \geq \frac{n+2}{4} u_n$ soit $u_n \leq \frac{4u_{n_k}}{n+2}$.
Enfin, comme k est tel que $0 < n_k \leq 2$, on a $u_{n_k} = u_1$ ou $u_{n_k} = u_2$. Soit M le plus grand des nombres u_1 et u_2, on a alors, pour tout entier n, $0 \leq u_n \leq \frac{4M}{n+2}$.
Par encadrement, on en déduit que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers 0.

Exercice CG 3. 4 À la recherche de la contradiction
Montrer qu'il n'existe pas de fonction f de **R**⁺ dans **R** telle que pour tous réels x et y positifs ou nuls :
$$f(x+y^2) \geq f(x) + y$$

Montrons par récurrence que s'il existe une telle fonction f alors pour tout entier n, $f(ny^2) \geq f(0) + ny$:
Pour $n = 0$, c'est évident.
Si l'inégalité est vraie pour un entier n, alors $f((n+1)y^2 \geq f(ny^2) + y \geq f(0) + ny + y$ et l'inégalité est donc encore vérifiée pour l'entier $n+1$.
On pose $y = \frac{1}{\sqrt{n}}$ dans cette inégalité et on obtient, pour tout entier n, $f(1) \geq f(0) + \sqrt{n}$, ce qui est impossible puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$

Exercice CG 3. 5 Un multiple de 48

Montrer que si a, b, c sont trois nombres premiers strictement supérieurs à 3, alors le nombre $(a-b)(b-c)(c-a)$ est divisible par 48.

On remarque déjà que tout nombre premier strictement supérieur à 3 est congru à 1 ou à -1 modulo 4. En effet, étant supérieur à 3, il est nécessairement impair et il existe un entier k tel qu'il puisse s'écrire $2k+1$. Alors si k est pair, $2k+1 \equiv 1 \ \ [4]$ et si k est impair, $2k+1 \equiv -1 \ \ [4]$.
On en déduit, en regardant les différents cas, que l'un au moins des nombres $a-b, b-c, c-a$ est divisible par 4, les deux autres étant au moins divisibles par 2. Le produit $(a-b)(b-c)(c-a)$ est donc divisible par 16.
On remarque maintenant que tout nombre premier strictement supérieur à 3 est aussi congru à 1 ou à -1 modulo 3. Il n'est en effet pas divisible par 3 et il existe un entier k tel qu'il puisse s'écrire $3k \pm 1$. Alors, modulo 3, au moins deux des entiers a, b, c sont congrus entre eux et l'un au moins des nombres $a-b, b-c, c-a$ est divisible par 3.
Comme 3 et 16 sont premiers entre eux, on en déduit que $(a-b)(b-c)(c-a)$ est divisible par 48.

Exercice CG 3. 6 Dés icosaédriques

Sur chacune des vingt faces d'un dé icosaédrique est inscrit un entier compris entre 1 et 20 (tous ces entiers sont utilisés). On considère que ces dés sont bien équilibrés. On lance quatre tels dés et on note les quatre nombres apparaissant sur les faces supérieures.
Si la même face apparaît deux fois ou plus, on marque le nombre de points indiqué sur cette face.
Par exemple, le tirage $(2,16,5,10)$ ne rapporte rien, le tirage $(5,5,10,20)$rapporte 5 points, le tirage $(7,7,7,7)$ rapporte 7 points et le tirage $(8,11,11,8)$ rapporte 19 points.
1. Quelle est la probabilité que je ne marque rien ?
2. On donne un entier a compris entre 1 et 20. Pour tout entier k compris entre 0 et 4, quelle est la probabilité d'un lancer amenant exactement k « a » ?
3. Pour tout a, on note X_a la variable aléatoire qui à chaque lancer associe 1 s'il y a au moins deux faces marquées a, 0 dans les autres cas.
Quelle est la loi de X_a ? Exprimer le gain G en fonction de ces variables et calculer son espérance.
4. Quelle est la probabilité de marquer exactement 8 points ?
Lors d'une partie, on décide que chaque joueur est autorisé à relancer un ou plusieurs dés pour tenter d'améliorer son score.
5. Si je tire $(11,7,2,2)$, ai-je intérêt à tout relancer, garder le 11 ou garder les deux 2 ? Que dois-je faire ?

1. Je ne marque rien en tirant quatre dés différents, ce qui peut se produire $20 \times 19 \times 18 \times 17$ fois sur les 20^4 possibilités. En situation d'équiprobabilité, on fait le quotient des deux effectifs $\frac{20\times19\times18\times17}{20^4} = \frac{5\,814}{8\,000} = 0{,}72675$.
2.

Nombre de « a » obtenus	Probabilité correspondante	Calculs	Résultat numérique (*)
0	$\frac{19^4}{20^4}$		$0{,}815$
1	$\binom{4}{1}\frac{19^3}{20^4}$	$\frac{19^3}{5\times20^3}$	$0{,}171$
2	$\binom{4}{2}\frac{19^2}{20^4}$	$\frac{3\times19^2}{10\times20^3}$	$0{,}014$
3	$\binom{4}{3}\frac{19}{20^4}$	$\frac{4\times19}{20^4}$	$0{,}0005$
4	$\frac{1}{20^4}$		$0{,}0625\times10^{-4}$

(*) Ces résultats sont donnés arrondis au millième, sauf le dernier, mais ne perdons pas de vue que ce sont des décimaux
3. $\frac{6\times19^2}{20^4} + \frac{4\times19}{20^4} + \frac{1}{20^4} = \frac{2\,243}{160\,000}$ est la probabilité que X_a prenne la valeur 1.
Le gain potentiel G est tel que $G = \sum_{a=1}^{20} aX_a$ et son espérance vaut :
$E(G) = E(\sum_{a=1}^{20} aX_a) = \sum_{a=1}^{20} aE(X_a) = \sum_{a=1}^{20} a(1p(X_a=1) + 0p(X_a=0)) = \sum_{a=1}^{20} ap(X_a=1)$

soit, puisque, pour tout a, $p(X_a = 1) = \frac{2\,243}{160\,000}$, $E(G) = \sum_{a=1}^{20} ap(X_a = 1) = \frac{20\times 21}{2} \times \frac{2\,243}{160\,000} = 2{,}9439375$ qui, arrondi au millième, donne $2{,}944$

4. On marque 8 points si on tire 2, 3 ou 4 faces « 8 ». La probabilité d'un tel événement est :

$$p = \frac{1}{20^4} + \frac{4\times 19}{20^4} + 6 \times \frac{19\times 18}{20^4} + \frac{3\times 6}{20^4}$$

Les quatre termes de cette somme correspondent à quatre, trois, deux faces « 8 » obtenues (dans le dernier cas, il faut aussi que les « non 8 »ne soient pas identiques) et, enfin à la situation où deux faces de marque totale 8 apparaissent chacune deux fois (comme (7,7,1,1), (6,6,2,2), (5,5,3,3) : chacun est de probabilité $\frac{1}{20^4}$, possède six variantes d'ordre de même probabilité). Finalement $= \frac{2\,147}{160\,000}$, soit, arrondi au millième 0,013.

5. Le tirage $(11, 7, 2, 2)$ procure un gain de 2.

* si on relance tout, l'espérance de gain est 2,94, précédemment calculée ;

* si on garde les deux « 2 », ou bien on gagne $2 + x$ si les deux dés jetés marquent tous les deux « x », x état différent de 2, la probabilité d'un tel événement étant $\frac{1}{20^2}$ ou bien on en reste à 2, avec une probabilité $\left(1 - \frac{19}{20^2}\right)$.

L'espérance de gain est alors $\sum_{\substack{x=1\\x\neq 2}}^{x=20} \frac{2+x}{20^2} + \left(1 - \frac{19}{20^2}\right) \times 2 = \frac{3+5+6+\cdots+21+22}{400} + 2 - \frac{19}{400}$

Ce qui donne tous calculs faits $\frac{1\,008}{400}$, soit 2,52 (résultat exact). Ce n'est pas meilleur ;

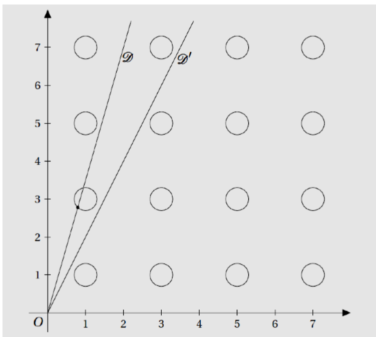
* si on garde le 11, il reste à évaluer la probabilité d'obtenir deux résultats identiques et différents de 11 sur les trois dés restants, et celle d'obtenir au moins un 11 sur les trois dés restants. La première, pour chaque x différent de 11, est $3 \times \frac{19}{20^3} + \frac{1}{20^3} = \frac{58}{8\,000}$ et la seconde $\frac{1}{20^3} + 3 \times \frac{19}{20^3} + 3 \times \frac{19^2}{20^3}$.

L'espérance de gain est donc $g = \sum_{\substack{x\neq 11\\x=1}}^{20} \frac{58\times x}{8\,000} + 11 \times \frac{1\,141}{8\,000} = \frac{24\,093}{8\,000} = 3{,}011625$ (valeur exacte)

Cette espérance est légèrement supérieure aux précédentes. On a intérêt à rejouer (… si la règle du jeu nous autorise à prendre le temps de calculer avant de lancer les dés).

Exercice CG 3. 7 Un arbre peut-il cacher la forêt ?

Un observateur se trouve au sein d'une plantation régulière d'arbres de même diamètre. On cherche à savoir s'il existe des directions dans lesquelles le regard de l'observateur ne butte pas sur un tronc. L'observateur est situé à l'origine d'un repère orthonormé, son regard est figuré par des demi-droites issues de O et contenues dans le premier quadrant. Les arbres sont figurés par des disques de rayon R, centrés aux points à coordonnées entières impaires et positives.



Soit m un réel strictement positif, on note $\mathcal{D}_m$ la demi-droite de pente m issue de l'origine.

« Rappel » : si m est un nombre irrationnel positif alors pour tout réel positif ε, il existe des entiers naturels a et b premiers entre eux tels que $|b - am| < \varepsilon$.

1. Montrer que la demi-droite $\mathcal{D}_m$ rencontre le cercle centré au point de coordonnées a et b si et seulement si $|b - ma| \leq R\sqrt{1 + m^2}$.

2. En déduire que si m est irrationnel, alors $\mathcal{D}_m$ rencontre un arbre.

3. On suppose que $m = \frac{b}{a}$, a et b étant des entiers naturels premiers entre eux.

a. On suppose que a et b sont impairs. $\mathcal{D}_m$ rencontre-t-elle un arbre ?

b. On suppose que a et b sont de parités différentes et que $\mathcal{D}_m$ rencontre un arbre. Montrer que $1 \leq R\sqrt{a^2 + b^2}$.

4. En déduire que, si toutes les demi-droites $\mathcal{D}_m$ rencontrent un arbre, alors $R \geq \frac{1}{\sqrt{5}}$.

5. On suppose réciproquement que $R \geq \frac{1}{\sqrt{5}}$. Montrer qu'alors, pour tout m il existe un entier impair α tel que la demi-droite $\mathcal{D}_m$ rencontre l'arbre planté au point de coordonnées $(\alpha, 1)$ ou au point de coordonnées $(1, \alpha)$.

6. Les *premières rangées d'arbres* sont celles constituées des arbres centrés aux points d'abscisse ou d'ordonnée 1.

Montrer que si l'observateur voit à travers les premières rangées, il voit à travers la plantation.

1. La distance du point de coordonnées (a, b) à la droite d'équation $y - mx = 0$ s'obtient en calculant la distance de ce point à son projeté orthogonal sur la droite. Les coordonnées de ce projeté sont $x = \frac{a+mb}{1+m^2}$ et$y = m\frac{a+mb}{1+m^2}$, ce qui fournit $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = \frac{|b-ma|}{\sqrt{1+m^2}}$. Il reste à écrire que cette distance est inférieure à R pour signifier que la demi-droite rencontre l'arbre.

2. Le *rappel* donné en préambule indique que la pente irrationnelle d'une demi-droite $\mathcal{D}_m$ peut être approchée aussi près qu'on veut par la pente $\frac{b}{a}$ d'une droite voisine, qui rencontre l'arbre centré au point de coordonnées (a, b).

3. ***a.*** Comme ci-dessus, la droite de pente $\frac{b}{a}$ rencontre l'arbre centré au point de coordonnées (a, b).

b. Supposons que a et b soient des entiers de parités différentes et que la droite $\mathcal{D}_{\frac{b}{a}}$ rencontre l'arbre centré au point de coordonnées (p, q). D'après ce qui a été vu plus haut, $\left|p - \frac{b}{a}q\right| \leq R\sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}$,

ce qui s'écrit encore $|ap - bq| \leq R\sqrt{a^2 + b^2}$. Le nombre $|ap - bq|$ est un entier non nul (cas traité précédemment) donc supérieur ou égal à 1, ce qui se traduit pas $R\sqrt{a^2 + b^2} \geq 1$

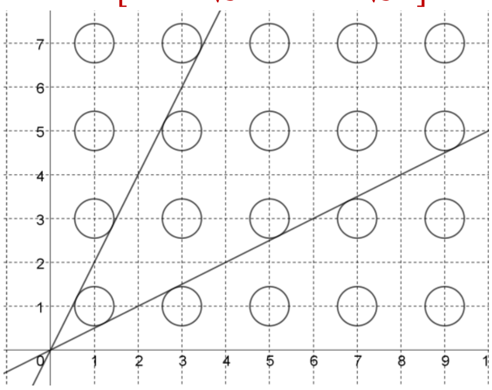
4. Si toutes les demi-droites rencontrent un arbre, alors c'est le cas pour la demi-droite $\mathcal{D}_2$ et donc $1 \leq R\sqrt{5}$, d'où le résultat.

5. On va montrer que ce résultat est vrai pour $R = \frac{1}{\sqrt{5}}$, ce qui l'assurera pour les valeurs supérieures. On se donne m positif et on cherche s'il existe α tel que $|\alpha - m| \leq \sqrt{\frac{1+m^2}{5}}$.

En élevant au carré, on obtient l'inégalité $5\alpha^2 - 10m\alpha + 4m^2 - 1 \leq 0$

Le discriminant réduit de cette inéquation du second degré en α est $25m^2 - 5(4m^2 - 1) = 5m^2 + 5$. Les racines définissent un intervalle à l'intérieur duquel l'inégalité est satisfaite. Cet intervalle est $\left[m - \frac{\sqrt{m^2+1}}{\sqrt{5}}, m + \frac{\sqrt{m^2+1}}{\sqrt{5}}\right]$

Il a pour longueur $\frac{2}{\sqrt{5}}\sqrt{m^2 + 1}$. Cette longueur est supérieure à 2 dès que $m \geq 2$. L'intervalle contient alors un entier impair. Ce cas couvre également la situation où $m \leq \frac{1}{2}$, dans ce cas c'est la demi-droite symétrique par rapport à la première bissectrice qui rencontre un arbre de la rangée horizontale.



Dans le cas où m est compris entre $\frac{1}{2}$ et 2, $\sqrt{\frac{1+m^2}{5}}$ prend toutes les valeurs entre 0,5 et 1. Le nombre impair le plus proche est 1.

La figure ci-contre montre les demi-droites de pentes 2 et $\frac{1}{2}$.

6. Si l'observateur ne voit pas à travers la forêt, c'est que son regard rencontre un arbre. Si son regard rencontre un arbre, c'est que $R \geq \frac{1}{\sqrt{5}}$, mais alors il ne voit pas à travers la première rangée. Donc, s'il voit à travers la première rangée, il voit à travers la forêt.