



Les propositions de solution de chaque exercice doivent être renvoyées sous forme numérique (on peut utiliser un système de transfert de « gros fichiers ») par les professeurs selon les modalités précisées lors de l'inscription.

**Exercice CG 2. 1**

On considère deux nombres réels  $a$  et  $b$  tels que  $a^3 + b^3 - 6ab = -11$ . Montrer que  $-\frac{7}{3} < a + b < -2$ .

On note  $s = a + b$  et  $p = ab$ .

Comme  $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2$ , l'égalité donnée s'écrit  $s^3 - 3ab(a + b) - 6ab = -11$

Soit  $s^3 - 3ps - 6p = -11$ . Or  $s \neq -2$  (on aboutit sinon à  $-8 = -11$ ), ceci s'écrit aussi  $p = \frac{s^3+11}{3s+6}$ .

Or  $(a - b)^2 \geq 0$  et  $(a - b)^2 = s^2 - 4p$ . On en tire  $s^2 \geq 4 \frac{s^3+11}{3s+6}$  qui s'écrit aussi  $\frac{s^3-6s^2+44}{3s+6} \leq 0$  (\*).

On considère la fonction  $f$  définie par  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 44$ .

L'inégalité (\*) sera vérifiée si et seulement si  $s > -2$  et  $f(s) < 0$  ou  $s < -2$  et  $f(s) > 0$ .

Or la fonction polynôme  $f$  a pour dérivée la fonction définie par  $f'(x) = 3x(x - 4)$ . L'étude du signe de  $f'(x)$  et des variations de la fonction  $f$  (strictement croissante sur  $]-\infty, 0]$  et sur  $[4, +\infty[$  et strictement décroissante sur  $[0, 4]$ ) ainsi que le théorème des valeurs intermédiaires permettent d'affirmer que l'équation  $f(x) = 0$  admet sur  $\mathbf{R}$  une unique solution  $x_0$  et que  $x_0 < 0$ .

De plus  $f(-2) = 12$  et  $12 > 0$  donc on ne peut avoir  $s > -2$  et  $f(s) < 0$ .

On peut donc déjà affirmer que  $x_0 < s < -2$ .

De plus, on vérifie aisément que  $f\left(-\frac{7}{3}\right) < 0$  donc  $x_0 > -\frac{7}{3}$  et on a bien  $-\frac{7}{3} < a + b < -2$ .

**Exercice CG 2. 2 Sur les doigts d'une main**

On considère les entiers naturels non nuls comprenant exactement  $n$  chiffres. On note  $f(n)$  le nombre de tels entiers dont la somme de tous les chiffres vaut 5.

1. Montrer que, pour tout entier naturel non nul  $n$ ,  $f(n) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{24}$ .

2. Déterminer combien des 2 021 entiers  $f(1), f(2), \dots, f(2\ 021)$  ont un chiffre des unités égal à 1.

1. Soit un entier formé de  $n$  chiffres et tel que la somme de ces chiffres est égale à 5. Les choix possibles de chiffres non nuls qui ont une somme égale à 5 sont :

5      4 ; 1      3 ; 2      3 ; 1 ; 1      2 ; 2 ; 1      2 ; 1 ; 1 ; 1      1 ; 1 ; 1 ; 1 ; 1

Pour chaque choix, il y a plusieurs possibilités de positionnement des chiffres et le chiffre 0 peut être positionné partout sauf comme premier chiffre.

Pour chaque choix, on compte le nombre d'entiers possibles de  $n$  chiffres en déterminant le nombre  $A$  d'arrangements des chiffres non nuls. Le premier chiffre d'un tel arrangement sera le premier des  $n$  chiffres de l'entier à partir de la gauche. Pour chacun des  $A$  arrangements, on compte ensuite le nombre  $b$  de façons de placer les autres chiffres non nuls dans les  $n - 1$  positions qui restent. Les autres positions seront occupées par le chiffre 0. Pour chaque choix, le nombre d'entiers sera égal à  $Ab$ . Le tableau ci-dessous résume les cas possibles :

Choix des chiffres non nuls dont la somme vaut 5	$A$	$b$	$Ab$
5	1	1	1
4 ; 1	2	$n - 1$	$2(n - 1)$
3 ; 2	2	$n - 1$	$2(n - 1)$

3 ; 1 ; 1	3	$\binom{n-1}{2}$	$3 \binom{n-1}{2} = \frac{3(n-1)(n-2)}{2} = \frac{3n^2 - 9n + 6}{2}$
2 ; 2 ; 1	3	$\binom{n-1}{2}$	$3 \binom{n-1}{2} = \frac{3(n-1)(n-2)}{2} = \frac{3n^2 - 9n + 6}{2}$
2 ; 1 ; 1 ; 1	4	$\binom{n-1}{3}$	$4 \binom{n-1}{3} = \frac{4(n-1)(n-2)(n-3)}{6} = \frac{4n^3 - 24n^2 + 44n - 24}{6}$
1 ; 1 ; 1 ; 1 ; 1	1	$\binom{n-1}{4}$	$\binom{n-1}{4} = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{24}$ $\binom{n-1}{4} = \frac{n^4 - 10n^3 + 34n^2 - 50n + 24}{24}$

(On remarque que dans les 2<sup>e</sup> et 3<sup>e</sup> choix, il faut que  $n \geq 2$ , dans les 4<sup>e</sup> et 5<sup>e</sup> choix, il faut que  $n \geq 3$ , dans le 6<sup>e</sup> choix, il faut que  $n \geq 4$ ; dans le 7<sup>e</sup> choix, il faut que  $n \geq 5$ . Or dans chaque cas, la formule reste valable, car pour chaque valeur inférieure de  $n$ , la formule donne une valeur de 0.

$f(n)$  est la somme des expressions dans la dernière colonne du tableau. On vérifie alors que

$$f(n) = \frac{n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n}{24} = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{24}$$

2. On doit maintenant déterminer combien des entiers  $n$ , de 1 à 2021, sont tels que le chiffre des unités de  $f(n)$  est égal à 1.

Par sa définition,  $f(n)$  est un entier pour toute valeur de l'entier  $n$ .

Si le chiffre des unités de  $n$  est 0 ou 5, alors  $n$  est un multiple de 5.

Si le chiffre des unités de  $n$  est 2 ou 7, alors  $n + 3$  est un multiple de 5.

Si le chiffre des unités de  $n$  est 3 ou 8, alors  $n + 2$  est un multiple de 5.

Si le chiffre des unités de  $n$  est 4 ou 9, alors  $n + 1$  est un multiple de 5.

Donc si le chiffre des unités de  $n$  est 0, 2, 3, 4, 5, 7, 8 ou 9, alors  $n(n+1)(n+2)(n+3)$  est un multiple de 5 et  $f(n)$  est aussi un multiple de 5, puisque le dénominateur ne contient aucun diviseur 5. Le chiffre des unités de  $f(n)$  ne peut alors être égal à 1.

Il reste à considérer les cas où le chiffre des unités de  $n$  est 1 ou 6. Ce sont les seules valeurs pour lesquelles le chiffre des unités de  $f(n)$  pourrait valoir 1.

On remarque que  $3f(n) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{8}$ , ce qui doit être un entier et que si le chiffre des unités de  $f(n)$  est 1 alors celui de  $3f(n)$  est 3 et réciproquement.

On est donc ramené à déterminer le nombre de valeurs de  $n$  pour lesquels le chiffre des unités de  $\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{8}$  est 3.

On considère les entiers  $n$  par groupes de 40 (choix fait car le problème traite des multiples de 5 et des multiples de 8 et  $5 \times 8 = 40$ ).

Si le chiffre des unités de  $n$  égal à 1, alors il existe un entier  $k \geq 0$  tel que  $n = 40k + 1$  ou  $n = 40k + 11$  ou  $n = 40k + 21$  ou  $n = 40k + 31$ .

Si le chiffre des unités de  $n$  égal à 6, alors il existe un entier  $k \geq 0$  tel que  $n = 40k + 6$  ou  $n = 40k + 16$  ou  $n = 40k + 26$  ou  $n = 40k + 36$

Si  $n = 40k + 1$ , alors  $3f(n) = \frac{(40k+1)(40k+2)(40k+3)(40k+4)}{8} = (40k+1)(20k+1)(40k+3)(10k+1)$

$n$	$3f(n)$	Chiffre des unités de $3f(n)$
$40k + 1$	$(40k + 1)(20k + 1)(40k + 3)(10k + 1)$	3
$40k + 11$	$(40k + 11)(10k + 3)(40k + 13)(20k + 7)$	3
$40k + 21$	$(40k + 21)(20k + 11)(40k + 23)(10k + 6)$	8
$40k + 31$	$(40k + 31)(10k + 8)(40k + 33)(20k + 17)$	8
$40k + 6$	$(20k + 3)(40k + 7)(10k + 2)(40k + 9)$	8
$40k + 16$	$(10k + 4)(40k + 17)(20k + 9)(40k + 19)$	8
$40k + 26$	$(20k + 13)(40k + 27)(10k + 7)(40k + 29)$	3
$40k + 36$	$(10k + 9)(40k + 37)(20k + 19)(40k + 39)$	3

Or  $40k + 1$  a un chiffre des unités égal à 1,  $20k + 1$  a un chiffre des unités égal à 1,  $40k + 3$  a un chiffre des unités égal à 3 et  $10k + 1$  a un chiffre des unités égal à 1. Donc, le produit de ces expressions a un chiffre des unités égal à 3.

On traite les 7 autres cas de la même façon et on résume les résultats dans le tableau suivant :

Donc,  $f(n)$  a un chiffre des unités égal à 1 lorsque  $n = 40k + 1$  ou  $n = 40k + 11$  ou  $n = 40k + 26$  ou  $n = 40k + 36$ .

Il y a 4 telles valeurs de  $n$  entre chaque paire de multiples consécutifs de 40.

Or  $2000 = 50 \times 40$ , donc 2000 est le 50<sup>e</sup> multiple de 40. Il y a donc  $50 \times 4$  entiers  $\leq 2000$  pour lesquels le chiffre des unités de  $f(n)$  est égal à 1.

De 2000 à 2021, il y a deux autres entiers :  $n = 40 \times 50 + 1$  et  $n = 40 \times 50 + 11$ .

En tout, 202 des entiers  $f(1), f(2), \dots, f(2021)$  ont un chiffre des unités égal à 1.

### Exercice CG 2. 3 Une première coupe du Monde...

Un tétraèdre ABCD vérifie les conditions suivantes :

1. Les arêtes AB, AC, AD sont deux à deux orthogonales ;

2. On a :  $AB = 3$  et  $CD = \sqrt{2}$ .

Déterminer la valeur minimale de  $BC^6 + BD^6 - AC^6 - AD^6$

$S = BC^6 + BD^6 - AC^6 - AD^6 = (BC^2 - AC^2)(BC^4 + BC^2AC^2 + AC^4) + (BD^2 - AD^2)(BD^4 + BD^2AD^2 + AD^4)$   
On se place dans les triangles ABC, ABD, ACD, rectangles en A pour ne faire apparaître dans la somme  $S$  que des longueurs d'arêtes issues de A :

$$S = AB^2[(AB^2 + AC^2)^2 + (AB^2 + AC^2)AC^2 + AC^4 + (AB^2 + AD^2)^2 + (AB^2 + AD^2)AD^2 + AD^4]$$

On peut encore écrire :

$$S = AB^2[2AB^4 + 3AC^4 + 3AD^4 + 3AB^2AC^2 + 3AB^2AD^2]$$

On peut encore écrire  $AC^4 + AD^4 = (AC^2 + AD^2)^2 - 2AC^2AD^2 = CD^4 - 2AC^2AD^2$  car  $AC^2 + AD^2 = CD^2$

Si on écrit  $S = AB^2[2AB^4 + 3CD^4 - 6AC^2AD^2 + 3AB^2CD^2]$ ,

on obtient  $S = AB^2[2AB^4 + 3CD^4 + 6AC^2(AC^2 - CD^2) + 3AB^2CD^2]$

et on voit que  $S$  est une fonction de  $AC$ , puisque  $AB$  et  $CD$  sont donnés.

La fonction définie par  $f(x) = x(x - CD^2)$  atteint son minimum en  $\frac{CD^2}{2}$ , et ce minimum est  $-\frac{CD^4}{4}$

Le minimum de  $S$  est donc  $AB^2 \left[ 2AB^4 + 3CD^4 - 6\frac{CD^4}{4} + 3AB^2CD^2 \right] = 1998$

### Exercice CG 2. 4 Histoires de familles

Pour tout entier naturel non nul  $n$ , on pose  $C_n = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ . Un ensemble  $F$  de sous-ensembles de  $C_n$  est appelé *famille Furoni* de  $C_n$  si aucun élément de  $F$  n'est un sous-ensemble d'un autre élément de  $F$ .

1. Soit  $A = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}\}$ . Vérifier que  $A$  est une famille Furoni de  $C_4$  et déterminer les deux familles Furoni de  $C_4$  qui contiennent tous les éléments de  $A$  et auxquels aucun autre sous-ensemble de  $C_4$  ne peut être ajouté pour former une nouvelle famille Furoni (plus grande).

2. Soit  $n$  un entier strictement positif et  $F$  une famille Furoni de  $C_n$ . Pour tout entier naturel  $k$ , soit  $a_k$  le nombre d'éléments de  $F$  qui contiennent exactement  $k$  entiers. Démontrer que

$$\frac{a_0}{\binom{n}{0}} + \frac{a_1}{\binom{n}{1}} + \frac{a_2}{\binom{n}{2}} + \dots + \frac{a_{n-1}}{\binom{n}{n-1}} + \frac{a_n}{\binom{n}{n}} \leq 1$$

1. Les 16 sous-ensembles de  $C_4$  sont :

$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}$ .

Le sous-ensemble  $A = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}\}$  est bien tel qu'aucun de ses éléments n'est un sous-ensemble d'un autre élément.

Chacun des sous-ensembles suivants de  $C_4$  est un élément de  $A$  :  $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}$

Chacun des sous-ensembles suivants de  $C_4$  est un sous-ensemble d'au moins un élément de  $A$  :  $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}$

On considère les sous-ensembles suivants de  $C_4$  :  $\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}$ .

Pour chacun, au moins un élément de  $A$  est un sous-ensemble de ce sous-ensemble.

Puisqu'une famille Furoni de  $C_4$  ne peut contenir deux sous-ensembles de  $C_4$  dont un est un sous-ensemble de l'autre, on ne peut pas ajouter aucun élément de l'une ou l'autre de ces listes à  $A$  pour former une plus grande famille Furoni.

Il reste à considérer les sous-ensembles suivants de  $C_4$  comme éléments possibles que l'on pourrait ajouter à  $A$  :

$$\{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}, \{2,3,4\}$$

Si on ajoute  $\{2,3,4\}$  à  $A$  pour former  $A' = \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3,4\}\}$ , alors  $A'$  est aussi une famille Furoni de  $C_4$  et aucun des sous-ensembles  $\{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}$  ne peut être ajouté, puisque chacun est un sous-ensemble de  $\{2,3,4\}$ . Donc  $A'$  est une famille Furoni de  $C_4$  à laquelle aucun autre sous-ensemble ne peut être ajouté.

Si on ajoutait un des ensembles  $\{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}$  à  $A$ , on ne pourrait pas ajouter l'ensemble  $\{2,3,4\}$  (puisque chacun de ces trois ensembles est un sous-ensemble de  $\{2,3,4\}$ ), mais on pourrait ajouter chacun des deux autres ensembles tout en conservant la condition d'un ensemble Furoni.

Donc  $A'' = \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}\}$  est une famille Furoni de  $C_4$  à laquelle on ne peut ajouter un autre sous-ensemble.

Donc, les deux familles Furoni de  $C_4$  qui contiennent tous les éléments de  $A$  et auxquels aucun autre sous-ensemble de  $C_4$  ne peut être ajouté pour former une nouvelle famille Furoni sont :

$$A' = \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3,4\}\} \text{ et } A'' = \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}\}$$

2. Soit  $n$  un entier strictement positif et  $F$  une famille Furoni de  $C_n$  choisie au hasard.

On considère  $L = \{\emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \{1,2,3, \dots, n\}\}$

La probabilité pour que l'intersection de  $L$  et de  $F$  soit non vide est inférieure ou égale à 1.

On remarque que puisque chaque élément de  $L$  est un sous-ensemble de tous les éléments à sa « droite » dans la définition de  $L$ , alors au plus un élément de  $L$  peut être un élément de  $F$ .

Soit  $k$  un entier,  $k \geq 0$ . La probabilité pour que  $\{1,2,3, \dots, k\}$  soit un élément de  $F$  est égale à  $\frac{a_k}{\binom{n}{k}}$ ,  $a_k$  étant le nombre

d'éléments de  $F$  qui contiennent exactement  $k$  entiers. En effet :

- Il existe  $\binom{n}{k}$  sous-ensembles de  $C_n$  qui contiennent exactement  $k$  entiers.
- La probabilité pour qu'un de ces sous-ensembles soit  $\{1,2,3, \dots, k\}$  est égale à  $\frac{1}{\binom{n}{k}}$ . En effet, tout sous-ensemble de  $F$  contenant  $k$  éléments a la même probabilité d'être l'ensemble  $\{1,2,3, \dots, k\}$  puisque tous les éléments de  $C_n$  jouent un même rôle.
- Puisque  $a_k$  de ces sous-ensembles sont dans  $F$ , alors la probabilité pour qu'un de ces  $a_k$  sous-ensembles soit  $\{1,2,3, \dots, k\}$  est égale à  $\frac{a_k}{\binom{n}{k}}$ .

(en considérant que si  $k = 0$ , alors  $\{1,2,3, \dots, k\} = \emptyset$ )

Donc, puisque la probabilité pour que l'intersection de  $L$  et de  $F$  soit non vide est inférieure ou égale à 1, on a bien

$$\frac{a_0}{\binom{n}{0}} + \frac{a_1}{\binom{n}{1}} + \frac{a_2}{\binom{n}{2}} + \dots + \frac{a_{n-1}}{\binom{n}{n-1}} + \frac{a_n}{\binom{n}{n}} \leq 1$$

### Exercice CG 2. 5 Convergence d'une suite

On définit la suite  $(u_n)$  par son premier terme  $u_0$ , positif, et la relation de récurrence :

$$\text{Pour tout } n > 0, u_{n+1} = \sqrt{u_n} + \frac{1}{n+1}$$

Cette suite est-elle convergente ?

$u_1 = \sqrt{u_0} + 1$  ; à partir de ce terme, par récurrence, tous les termes de la suite sont bien définis et positifs.

Remarquons que si cette suite admet une limite  $\ell$ , cette limite ne peut être que 1, car tous les termes sont supérieurs à 1 et l'égalité  $\ell = \sqrt{\ell}$  conduit à  $\ell = 0$  ou  $\ell = 1$ .

Peut-on déterminer un sens de variation ?

Calculons pour  $n$  quelconque :  $u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n} - \sqrt{u_{n-1}} - \frac{1}{n(n+1)}$

S'il existe un rang  $n$  tel que  $\sqrt{u_n} - \sqrt{u_{n-1}} < 0$ , les différences suivantes le sont aussi et la suite est décroissante à partir du premier rang où cette occurrence se produit. Elle est minorée donc converge et on a vu qu'elle ne peut converger que vers 1.

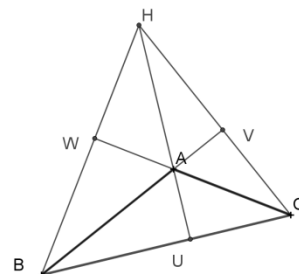
Sinon, cela signifie que la suite est croissante à partir du rang 0, comme elle a des termes supérieurs à 1, elle ne peut croître et avoir la limite 1. Elle ne peut que tendre vers  $+\infty$ . Mais alors la différence  $u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n}(1 - \sqrt{u_n}) + \frac{1}{n+1}$  tend vers  $-\infty$ .

Contradiction. La première hypothèse est la bonne.

### Exercice CG 2. 6 Triangles cartésiens (programme « mathématiques expertes » sur la fin)

On appelle *triangle cartésien* tout triangle possédant un angle de mesure  $120^\circ$  et dont les longueurs des côtés sont des nombres entiers.

1. On considère un triangle cartésien ABC dont les côtés mesurent  $BC = a, CA = b, AB = c$  et l'angle en A  $120^\circ$ . On appelle H son orthocentre et U, V et W les projetés orthogonaux de H respectivement sur les côtés [BC], [CA] et [AB]. Déterminer lesquelles des longueurs AU, AV, AW, BU, BV, BW, CU, CV, CW, HA, HB, HC, HU, HV, HW sont des nombres rationnels.



### 2. Un « rappel » qui n'en est pas forcément un

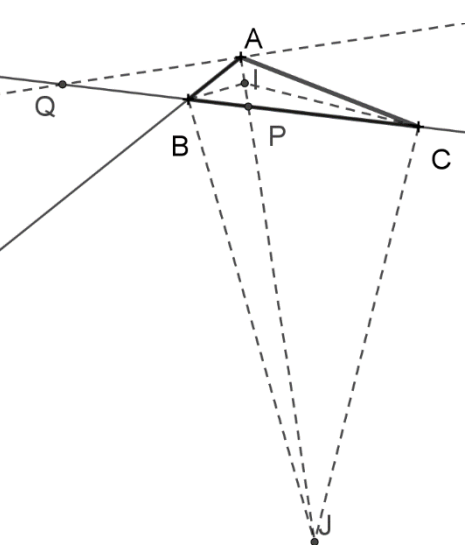
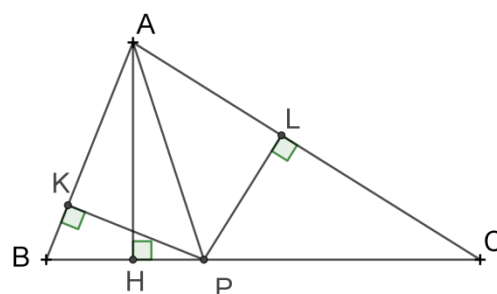
Montrer que, dans tout triangle ABC, le point d'intersection P de la bissectrice intérieure de l'angle en A avec le côté [BC] détermine sur ce côté des segments de longueurs proportionnelles aux longueurs AB et AC. Ce qui suit concerne un triangle ABC quelconque, les noms de points ne sont pas les mêmes que dans le corps du problème). Pour cela,

a. Exprimer de deux manières différentes l'aire du triangle ABP. En

déduire que  $BP = AB \times \frac{PK}{AH}$ ;

b. Montrer que  $CP = AC \times \frac{PL}{AH}$ . Conclure.

On pourra admettre une propriété analogue concernant la bissectrice extérieure de l'angle en A.



3. On note I le centre du cercle inscrit dans ce triangle, J le point de concours de la bissectrice intérieure de l'angle en A et des bissectrices extérieures des angles en B et C, P et Q les points d'intersection des bissectrices de l'angle en A avec la droite (BC). Déterminer lesquelles parmi les longueurs PB, PC, QB, QC, AI, AJ, AP, et AQ sont des nombres rationnels.

4. On suppose que  $b$  et  $c$  sont premiers entre eux. Montrer qu'un et un seul des nombres  $a + b - c$  et  $a - b + c$  est multiple de 3.

5. On suppose que  $\frac{p}{q}$  est l'écriture irréductible de  $\frac{a+b-c}{3c}$  et on appelle  $d$  le PGCD de  $p(3p + 2q)$  et  $q(2p + q)$ . Calculer  $a, b$  et  $c$  en fonction de  $p, q$  et  $d$ .

6. Montrer que  $q$  n'est pas multiple de 3, puis que  $d = 1$ .

7. Formuler une condition nécessaire et suffisante pour qu'un triangle soit cartésien de côtés premiers entre eux.

1. La formule d'Al Kashi appliquée au triangle ABC et à son angle en A donne  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \frac{2\pi}{3}$ , c'est-à-dire  $a^2 = b^2 + c^2 + bc$ . Les triangles ABW et ACV sont rectangles et possèdent un angle en A de mesure  $60^\circ$  (car ces angles sont opposés par le sommet comme les angles  $\widehat{WAU}$  et  $\widehat{BAC}$  qui mesurent chacun  $120^\circ$ ). On a donc  $AV = \frac{b}{2}$  et  $CV = b \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $AW = \frac{c}{2}$  et  $BW = c \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Pour déterminer AU, on écrit de deux manières l'aire du triangle ABC et on en déduit que  $aAU = CVc$  et donc  $AU = \frac{bc\sqrt{3}}{2a}$ .  $BV = c + \frac{b}{2}$  et  $CW = b + \frac{c}{2}$ . Pour calculer BU et CU, on utilise  $BU = c \cos \widehat{ABC}$  et  $BV = a \cos \widehat{ABC}$ , ce qui conduit à  $BU = \frac{c}{a}BV = c \frac{2c+b}{2a}$ . De même  $CU = b \frac{2b+c}{2a}$ .

En utilisant les triangles semblables AUC et AWH on obtient  $WH = CU \frac{AW}{AU}$ , qui donne  $WH = \frac{c}{2} \times \frac{2a}{bc\sqrt{3}} \times b \frac{2b+c}{2a}$

Finalement  $WH = \frac{2b+c}{2\sqrt{3}}$ . On trouvera de la même façon  $VH = \frac{2c+b}{2\sqrt{3}}$ .

En écrivant de deux manières différentes l'aire du triangle BCH, on trouve  $AH = \frac{a\sqrt{2}}{3}$ .

L'irrationalité de certaines de ces longueurs provient de celle de  $\sqrt{3}$ .

2. a. L'aire du triangle APB (demi-produit d'une « base » par la hauteur correspondante) est égale à  $\frac{1}{2}BP \times AH$ . Elle est aussi égale à  $\frac{1}{2}AB \times PK$ , où H est le pied de la hauteur issue de A du triangle ABC et K le projeté orthogonal de P sur (AB). Finalement,  $\frac{BP}{AB} = \frac{PK}{AH}$  ;

b. On agit de même avec le triangle ABC et le projeté orthogonal de P sur (AC).

3.  $b$  et  $c$  jouent des rôles symétriques, ce qui autorise à supposer sans perte de généralité que  $b > c$  comme sur la figure. L'égalité  $b = c$  donnerait  $a^2 = 3b^2$ , ce qui est impossible si  $a$  et  $b$  sont entiers.

Les bissectrices de l'angle en A déterminent sur le côté (BC) des segments de longueurs proportionnelles aux longueurs des côtés [AB] et [AC] :  $\frac{PB}{PC} = \frac{c}{b}$  et  $PC = a - PB$  d'une part,  $\frac{QB}{QC} = \frac{c}{b}$  et  $QC - QB = a$  d'autre part.

Tous calculs faits, on trouve  $PB = \frac{ac}{b+c}$ ,  $PC = \frac{ab}{b+c}$ ,  $QB = \frac{ac}{b-c}$  et  $QC = \frac{ab}{b-c}$

Dans le triangle APB, dont l'angle en A mesure  $60^\circ$ , la formule d'Al Kashi donne  $BP^2 = AB^2 + AP^2 - 2AP \cdot AB \times \frac{1}{2}$

En résolvant cette équation du second degré et en remarquant que la formule d'Al Kashi dans le triangle ABC donne  $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \times \left(-\frac{1}{2}\right)$  soit  $a^2 = b^2 + c^2 + 2bc$ , on trouve  $AP = \frac{bc}{b+c}$

La même technique menée dans le triangle ABQ permet de trouver  $AQ = \frac{bc}{b-c}\sqrt{3}$

La propriété des bissectrices appliquée à la bissectrice (BI) dans le triangle APB donne  $IA = \frac{bc}{a+b+c}$

La même propriété donne  $\frac{JA}{JP} = \frac{BA}{BP}$  et, après calculs  $JA = \frac{bc}{b+c-a}$

Seule la longueur AQ est irrationnelle.

4. Tout diviseur commun à  $a$  et  $b$  divise  $a^2 - b^2 - bc$ , donc divise  $c^2$ . Comme  $b$  est premier avec  $c$ , ce diviseur ne peut être que 1, donc  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux. De même,  $c$  et  $a$  sont premiers entre eux. Les égalités  $(a + b - c)(a - b + c) = a^2 - (b - c)^2 = 3bc$  montrent que 3 divise l'un des deux facteurs. S'il divisait les deux, il diviserait leur somme  $2a$  et donc  $a$  et  $3bc$  seraient divisibles par 9, donc  $b$  ou  $c$  serait divisible par 3 et non premier avec  $a$ . Contradiction.

5. Dans l'égalité  $(a + b - c)(a - b + c) = 3bc$ , si on pose  $\frac{a+b-c}{3c} = \frac{p}{q}$ , il vient  $a - b + c = \frac{bq}{p}$ .

Les égalités  $\begin{cases} q(a + b - c) = 3pc \\ p(a - b + c) = bq \end{cases}$  peuvent être écrites  $\begin{cases} qa + qb - (q + 3p)c = 0 \\ pa - (p + q)b + pc = 0 \end{cases}$  qu'on lit comme un système linéaire d'inconnues  $b$  et  $c$ . La résolution donne :

$b = \frac{p(3p+2q)}{3p^2+q^2+3pq}a$  et  $c = \frac{q(2p+q)}{3p^2+q^2+3pq}a$  (où on retrouve les paramètres livrés par l'énoncé, ouf !)

Posons, comme dit dans l'énoncé,  $d = \text{PGCD}((3p + 2q), (2p + q))$ . Il existe deux entiers  $\alpha$  et  $\beta$ , premiers entre eux, tels que  $3p + 2q = d\alpha$  et  $2p + q = d\beta$

Les égalités  $\begin{cases} ad\alpha = (3p^2 + q^2 + 3pq)b \\ ad\beta = (3p^2 + q^2 + 3pq)c \end{cases}$  assurent que  $ad = 3p^2 + q^2 + 3pq$  (le PGCD des seconds membres est

évidemment celui des premiers membres, puisque  $b$  et  $c$  sont premiers entre eux comme  $\alpha$  et  $\beta$ ).

On en tire  $= \frac{3p^2+q^2+3pq}{d}$ , puis  $b = \frac{p(3p+2q)}{d}$  et  $c = \frac{q(2p+q)}{d}$

6. Dans les égalités précédentes, rappelons que  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont des entiers, et il faut donc déduire de la première que  $d$  divise  $3p^2 + q^2 + 3pq$ . Et donc  $d$  divise  $p(3p + 2q) + q(2p + q) - (3p^2 + q^2 + 3pq) = pq$

Si  $q$  était multiple de 3,  $p$  ne le serait pas, étant premier avec  $q$ , et de l'égalité  $p(a - b + c) = bq$ , on déduirait que 3 divise  $a - b + c$ , ce qui a été exclu.

$d$  divise  $pq$ , il divise  $3p^2 + 2pq$ , donc il divise  $3p^2$  ; il divise  $2pq + q^2$ , donc il divise  $q^2$ . Mais  $q^2$  et  $3p^2$  sont premiers entre eux ( $p$  et  $q$  sont premiers entre eux et  $q$  est premier avec 3). Finalement  $d = 1$ .

7. Pour que  $a$ ,  $b$ ,  $c$  soient les longueurs des côtés d'un triangle cartésien ( $a$  opposé à l'angle de  $120^\circ$ ) il est donc nécessaire qu'il existe deux entiers  $p$  et  $q$  premiers entre eux, vérifiant en outre  $q$  non multiple de 3, tels que :

$$a = 3p^2 + q^2 + 3pq, b = p(3p + 2q) \text{ et } c = q(2p + q)$$

On vérifie que cette condition est suffisante en montrant que  $a^2 = b^2 + c^2 + bc$ .