Pépinière académique de mathématiques

Stage « en ligne » de janvier et février 2021

Fiche numéro 2

Les propositions de solution de chaque exercice doivent être envoyées d'ici le lundi 15 février à l'adresse euler.pepiniere@ac-versailles.fr, sous forme numérique (format .pdf ou image), en pièce jointe ou avec un système de dépôt pour les fichiers volumineux, par les professeurs selon les modalités précisées dans le courrier envoyé dans les lycées (envoi des propositions d'au plus deux équipes).

Exercice CG 2. 1

On considère deux nombres réels a et b tels que $a^3 + b^3 - 6ab = -11$. Montrer que $-\frac{7}{3} < a + b < -2$.

Exercice CG 2. 2 Sur les doigts d'une main

On considère les entiers naturels non nuls comprenant exactement n chiffres. On note $f(n)$ le nombre de tels entiers dont la somme de tous les chiffres vaut 5.

1. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, $f(n) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{24}$.
2. Déterminer combien des 2 021 entiers $f(1), f(2), \dots, f(2\,021)$ ont un un chiffre des unités égal à 1.

Exercice CG 2. 3 Une première coupe du Monde…

Un tétraèdre ABCD vérifie les conditions suivantes :

1. Les arêtes [AB], [AC], [AD] sont deux à deux orthogonales ;
2. On a : AB = 3 et CD = $\sqrt{2}$.

Déterminer la valeur minimale de $\mathrm{BC}^6 + \mathrm{BD}^6 - \mathrm{AC}^6 - \mathrm{AD}^6$

Exercice CG 2. 4 Histoires de familles

Pour tout entier naturel non nul n, on pose $C_n = \{1,2,3, \dots, n\}$. Un ensemble F de sous-ensembles de $C_n$est appelé *famille Furoni de* C_n si aucun élément de F n'est un sous-ensemble d'un autre élément de F.

1. Soit $A = \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}\}$. Vérifier que A est une famille Furoni de C_4 et déterminer les deux familles Furoni de C_4 qui contiennent tous les éléments de A et auxquels aucun autre sous-ensemble de C_4 ne peut être ajouté pour former une nouvelle famille Furoni (plus grande).
2. Soit n un entier strictement positif et F une famille Furoni de C_n. Pour tout entier naturel k, soit a_k le nombre d'éléments de F qui contiennent exactement k entiers. Démontrer que

$$\frac{a_0}{\binom{n}{0}} + \frac{a_1}{\binom{n}{1}} + \frac{a_2}{\binom{n}{2}} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{\binom{n}{n-1}} + \frac{a_n}{\binom{n}{n}} \leq 1$$

Exercice CG 2. 5 Convergence d'une suite

On définit la suite (u_n) par son premier terme u_0, positif, et la relation de récurrence :

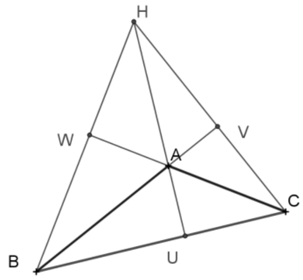
Pour tout $n > 0, u_{n+1} = \sqrt{u_n} + \frac{1}{n+1}$

Cette suite est-elle convergente ?

Exercice CG 2. 6 Triangles cartésiens (programme « mathématiques expertes » sur la fin)

On appelle *triangle cartésien* tout triangle possédant un angle de mesure 120° et dont les longueurs des côtés sont des nombres entiers.

1. On considère un triangle cartésien ABC dont les côtés mesurent $\mathrm{BC} = a, \mathrm{CA} = b$, $\mathrm{AB} = c$ et l'angle en A 120°. On appelle H son orthocentre et U, V et W les projetés orthogonaux de H respectivement sur les côtés [BC], [CA] et [AB].
Déterminer lesquelles des longueurs AU, AV, AW, BU, BV, BW, CU, CV, CW, HA, HB, HC, HU, HV, HW sont des nombres rationnels.



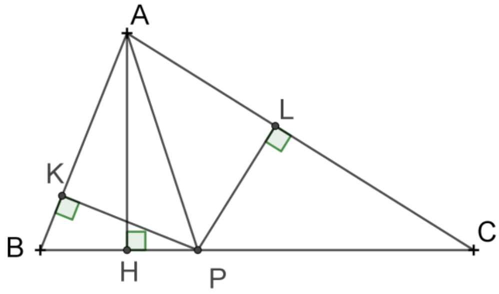
2. ***Un « rappel » qui n'en est pas forcément un***

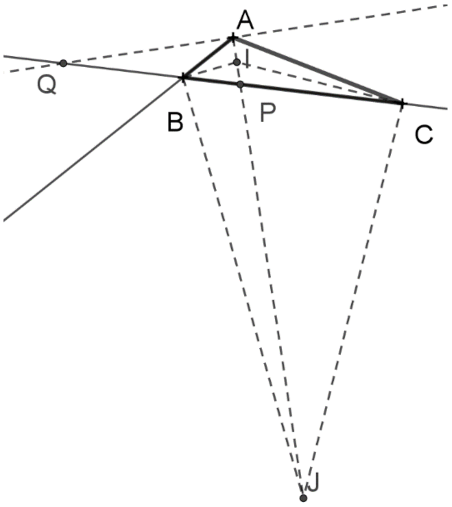
Montrer que, dans tout triangle ABC, le point d'intersection P de la bissectrice intérieure de l'angle en A avec le côté [BC] détermine sur ce côté des segments de longueurs proportionnelles aux longueurs AB et AC. Ce qui suit concerne un triangle ABC quelconque, les noms de points ne sont pas les mêmes que dans le corps du problème).Pour cela,

a. Exprimer de deux manières différentes l'aire du triangle ABP. En déduire que $\mathrm{BP} = \mathrm{AB} \times \frac{\mathrm{PK}}{\mathrm{AH}}$;

b. Montrer que $\mathrm{CP} = \mathrm{AC} \times \frac{\mathrm{PL}}{\mathrm{AH}}$. Conclure.

On pourra admettre une propriété analogue concernant la bissectrice extérieure de l'angle en A.





3. On note I le centre du cercle inscrit dans ce triangle, J le point de concours de la bissectrice intérieure de l'angle en A et des bissectrices extérieures des angles en B et C, P et Q les points d'intersection des bissectrices de l'angle en A avec la droite (BC). Déterminer lesquelles parmi les longueurs PB, PC, QB, QC, AI, AJ, AP, et AQ sont des nombres rationnels.

4. On suppose que b et c sont premiers entre eux. Montrer qu'un et un seul des nombres $a + b - c$ et $a - b + c$ est multiple de 3.

5. On suppose que $\frac{p}{q}$ est l'écriture irréductible de $\frac{a+b-c}{3c}$ et on appelle d le PGCD de $p(3p + 2q)$ et $q(2p + q)$. Calculer a, b et c en fonction de p, q et d.

6. Montrer que q n'est pas multiple de 3, puis que $d = 1$.

7. Formuler une condition nécessaire et suffisante pour qu'un triangle soit cartésien de côtés premiers entre eux.