Mattéo ROJARE
Lycée Évariste Galois
2^{de} 2

Pépinière académique de mathématiques

Fiche n° 2

Exercice S2. 1. Faire bonne impression

1. On donne à la première imprimante les documents de 1 et de 7 pages, et l'on donne à la seconde les documents de 3 et de 5 pages : l'une a $1 + 7 = 8$ pages, et l'autre a $3 + 5 = 8$ pages elle aussi. Les durées de service sont les mêmes.

2. La somme de toutes les pages est $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$ pages, ce qui signifie que les deux imprimantes ne peuvent pas avoir le même nombre de pages, car on aurait alors $\frac{25}{2} = 12{,}5$ pages par imprimante. Cependant, en donnant les documents de 3 et de 9 pages à l'une et ceux de 5 et de 7 pages à l'autre, chacune a alors $3 + 9 = 5 + 7 = 12$ pages – il suffit alors de rajouter le document de 1 page restant à l'une des deux pour avoir un groupe de 12 pages et un groupe de 13 pages, on a alors une différence de 1 qui, comme vu précédemment, est la plus petite différence possible.

3. Parmi tous les documents, on en prend la moitié constituée des plus petits documents (de 1 à 49 pages), soit 25 documents, desquels on retire le plus petit et le plus grand (de 1 et de 49 pages). On fait de même pour l'autre moitié des documents (de 51 à 99 pages), en mettant de côté les documents de 51 et de 99 pages. Alors, on constitue des paires en prenant, pour chaque paire, le plus petit document du groupe des « petits documents » et le plus grand document du groupe des « grands » documents : 3 et 97 pages, 5 et 95 pages, 7 et 93 pages… jusqu'à 47 et 53 pages. On observe que l'on a créé 23 paires de 100 pages chacune.

On prévoit 13 paires pour la première imprimante et 12 paires pour la seconde, elles ont alors $13 \times 100 = 1300$ pages et $12 \times 100 = 1200$ pages respectivement. Il reste à répartir les documents de 1, de 49, de 51 et de 99 pages. En donnant ceux de 1 et de 49 pages à la première, qui a désormais $1300 + 1 + 49 = 1350$ pages, et ceux de 51 et de 99 pages à la seconde, qui a $1200 + 51 + 99 = 1350$ pages, les deux imprimantes ont alors le même nombre de pages à imprimer : 1350. Les durées de service sont les mêmes.

4. On considérera 4 cas, pour k un entier : $n = 4k$, $n = 4k + 1$, $n = 4k + 2$, $n = 4k + 3$.

Pour $n = 4k$: on a des documents de 1 à $8k - 1$ pages. Parmi tous les documents, on en prend la moitié constituée des plus petits documents (de 1 à $4k - 1$ pages), soit $4k$ documents. On a une autre moitié constituée des plus grands documents (de $4k + 1$ à $8k - 1$ pages). Alors, on constitue des paires en prenant, pour chaque paire, le plus petit document du groupe des « petits documents » et le plus grand document du groupe des « grands » documents : 1 et $8k - 1$ pages, 3 et $8k - 3$ pages, 5 et $8k - 5$ pages… jusqu'à $4k - 1$ et $4k + 1$ pages. On observe que l'on a créé exactement $2k$ paires de $8k$ pages chacune. On prévoit k paires pour chacune des imprimantes. Les deux ont alors $8k^2$ pages. Les durées de service sont les mêmes.

Pour $n = 4k + 1$: n étant impair, on ne peut donc pas répartir les pages en moitiés égales. Il y a au moins une différence de 1 page entre les imprimantes. En retirant le document de 1 page, on a $4k$ documents, de 3 à $8k + 1$ pages. La situation est alors la même que pour $n = 4k$, excepté que chaque document a 2 pages de plus. En utilisant alors le même procédé que pour le premier cas, on a alors

$2k$ paires de $8k + 4$ pages (2 pages en plus par document, donc 4 pages en plus par paires de documents). On prévoit k paires pour chacune des imprimantes. Les deux ont alors $8k^2 + 4k$ pages. On ajoute le document de 1 page restant à une des imprimantes. La durée de service est la même à 1 page près, ce qui est la plus petite différence possible.

Pour $n = 4k + 2$: on a des documents de 1 à $8k + 3$ pages. Parmi tous les documents, on en prend la moitié constituée des plus petits documents (de 1 à $4k + 1$ pages), soit $2k + 1$ documents, desquels on retire le plus petit et le plus grand (de 1 et de $4k + 1$ pages). On fait de même pour l'autre moitié des documents (de $4k + 3$ à $8k + 3$ pages), en mettant de côté les documents de $4k + 3$ et de $8k + 3$ pages. Alors, on constitue des paires en prenant, pour chaque paire, le plus petit document du groupe des « petits documents » et le plus grand document du groupe des « grands » documents : 3 et $8k + 1$ pages, 5 et $8k – 1$ pages, 7 et $8k – 3$ pages… jusqu'à $4k – 1$ et $4k + 5$ pages. On observe que l'on a créé $2k – 1$ paires de $8k + 4$ pages chacune.

On prévoit k paires pour la première imprimante et $k – 1$ paires pour la seconde, elles ont alors $k \times (8k + 4) = 8k^2 + 4k$ pages et $(k – 1) \times (8k + 4) = 8k^2 – 4k – 4$ pages respectivement. Il reste à répartir les documents de 1, de $4k + 1$, de $4k + 3$ et de $8k + 3$ pages. En donnant ceux de 1 et de $4k + 1$ pages à la première, qui a désormais $8k^2 + 8k + 2$ pages, et ceux de $4k + 3$ et de $8k + 3$ pages à la seconde, qui a $8k^2 + 8k + 2$ pages, les deux imprimantes ont alors le même nombre de pages à imprimer : $8k^2 + 8k + 2$. Les durées de service sont les mêmes.

Pour $n = 4k + 3$: n étant impair, on ne peut donc pas répartir les pages en moitiés égales. Il y a au moins une différence de 1 page entre les imprimantes. En retirant le document de 1 page, on a $4k + 2$ documents, de 3 à $8k + 5$ pages. La situation est alors la même que pour $n = 4k + 2$, excepté que chaque document a 2 pages de plus. En appliquant le même procédé que pour le troisième cas, chaque imprimante a $2k + 1$ documents et $8k^2 + 8k + 2$ pages auxquelles on ajoute 2 pages par document, soit au total : $8k^2 + 8k + 2 + 2(2k + 1) = 8k^2 + 12k + 4$ pages. En ajoutant le document de 1 page restant à une des deux imprimantes, les durées de service sont les mêmes à 1 page près, ce qui est la plus petite différence possible.

Exercice S2. 3. À la crèche

Q est à 6 arêtes de P dans une direction, 4 arêtes dans une autre et encore 4 dans une autre. On a donc $PQ^2 = (4x)^2 + (4x)^2 + (6x)^2 = 68x^2$. Donc $PQ = \sqrt{68}\,x = 2\sqrt{17}\,x$. PQ et x sont proportionnels, donc, plus petit x est, plus petit PQ l'est aussi. On cherche donc x tel que PQ soit le plus petit entier (non nul) possible, soit 1 : $2\sqrt{17}\,x = 1$, on a donc pour solution $x = \dfrac{1}{2\sqrt{17}}$.

Exercice S2. 4. À la fin, reste 1

On a donc a, b et c tels que $abc = 1$ et $a + b + c = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$. On suppose que $a \neq 1$, que $b \neq 1$ et que $c \neq 1$. Alors, 1 n'est pas une solution de x à l'équation $(x-a)(x-b)(x-c) = 0$. On a alors :

$$
\begin{aligned}
& (1-a)(1-b)(1-c) \neq 0 \\
\Leftrightarrow\ & (1 + ab - a - b)(1-c) \neq 0 \\
\Leftrightarrow\ & 1 + ab - a - b - c - abc + ac + bc \neq 0 \\
\Leftrightarrow\ & 1 - abc + ab + ac + bc - (a + b + c) \neq 0
\end{aligned}
$$

$\Leftrightarrow \quad 1-1+\dfrac{(ab+ac+bc)}{1} \neq (a+b+c)$

$\Leftrightarrow \quad \dfrac{(ab+ac+bc)}{abc} \neq (a+b+c)$

$\Leftrightarrow \quad \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c} \neq a+b+c$, or on sait que $a+b+c=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$. Notre hypothèse est donc invalide, puisqu'il y a contradiction. On a alors au moins $a = 1$, ou $b = 1$, ou $c = 1$.

Exercice S2. 5. C'est la foule, au club de math

On peut ici écrire n de trois manières différentes. On considère ici a, r_4 et r_3 des entiers, $0 < r_4 < 4$ et $0 < r_3 < 3$. On a :

$n = 4a + r_4$

$n = 3(a + 3) + r_3 \Leftrightarrow n = 3a + 9 + r_3$

$n = 2(a + 3 + 5) + 1 \Leftrightarrow n = 2a + 17$.

On a donc : $4a + r_4 - (2a + 17) = 0 \Leftrightarrow 2a + r_4 - 17 = 0 \Leftrightarrow 2a = 17 - r_4$.

Puisque $0 < r_4 < 4$, alors $13 < 2a < 17$, donc $14 \leq 2a \leq 16$, ainsi $7 \leq a \leq 8$.

De plus, on a : $3a + 9 + r_3 - (2a + 17) = 0 \Leftrightarrow a + r_3 - 8 = 0 \Leftrightarrow a = 8 - r_3$.

Puisque $0 < r_3 < 3$, alors $5 < a < 8$, donc $6 \leq a \leq 7$.

Si $7 \leq a \leq 8$ et que $6 \leq a \leq 7$, on a forcément $a = 7$. Ainsi, $n = 2 \times 7 + 17 = 31$. Par conséquent, on a $n^2 - n = n(n - 1) = 31 \times 30 = 930$. La somme des chiffres de $n^2 - n$ vaut donc $9 + 3 + 0 = 12$.

Exercice S2. 6. Différences de deux carrés

On considère ici k un entier naturel non-nul.

1. Prenons la différence de carrés suivante : $k^2 - (k - 1)^2 = k^2 - k^2 + 2k - 1 = 2k - 1$.

$2k - 1$ est impair, et l'on peut exprimer tous les nombres impairs sous cette forme, en fonction de k. Par conséquent, tout nombre impair peut être écrit comme la différence de deux carrés.

2. Prenons la différence de carrés suivante : $k^2 - (k - 2)^2 = k^2 - k^2 + 4k - 4 = 4k - 4 = 4(k - 1)$.

$4k$ est par définition un multiple de 4, et l'on peut exprimer tous les multiples de 4 de cette manière (hormis 0, pour $k \geq 1$), il en est donc de même pour $4(k - 1)$, par lequel on peut aussi exprimer 0 ($k = 1$). Ainsi, tout multiple de 4 peut être écrit comme la différence de deux carrés.

3. On suppose que, pour a et b des entiers naturels et $a \geq b$, il existe une valeur de k telle que : $2(2k - 1) = a^2 - b^2$. Puisque $2(2k - 1)$ est pair, alors $a^2 - b^2$ l'est aussi, par conséquent, soit a^2 et b^2 sont tous deux pairs, soit ils sont tous deux impairs. On en déduit que soit a et b sont tous deux pairs, soit ils sont tous deux impairs. On a alors forcément $a + b$ pair et $a - b$ pair ; pour k_1 et k_2 des entiers naturels, on a ainsi $a + b = 2k_1$, et $a - b = 2k_2$. Enfin :

$2(2k - 1) = a^2 - b^2$

$\Leftrightarrow 4k - 2 = (a + b)(a - b)$

$\Leftrightarrow 4k - 2 = 2k_1 \times 2k_2$

$\Leftrightarrow 4k - 2 = 4k_1k_2$. Dans cette égalité, $4k - 2$, qui n'est pas un multiple de 4, est égal à $4k_1k_2$, qui est un multiple de 4. Il y a contradiction, donc il n'existe pas de valeur de k telle que $2(2k - 1) = a^2 - b^2$: les produits de 2 par un nombre impair ne peuvent pas être exprimés comme la différence de deux carrés.

4. Puisque les nombres impairs (de forme $4k - 1$ et $4k - 3$) ainsi que les multiples de 4 (de forme $4k$) peuvent s'écrire comme la différence de deux carrés, et que le double des nombres impairs (de forme $4k - 2$) ne le peuvent pas, il y a donc trois nombres sur quatre qui peuvent être exprimés de cette manière.

1000 et 0 ayant la même congruence modulo 4 (soit 0), parmi tous les nombres de 1 à 1000 (compris), il y en a exactement trois quarts qui peuvent s'écrire comme la différence de deux carrés, soit : $\frac{3}{4} \times 1000 = 750.$ 1000 étant un multiple de 4 et pouvant donc s'écrire comme la différence de deux carrés, parmi tous les nombres de 1 à 999, exactement 750 – 1 = 749 nombres peuvent s'exprimer comme la différence de deux carrés.

Exercice S2. 7. Phil sans téléphone

Quand Phil n'utilise pas son téléphone et que celui-ci charge, sa batterie gagne 100 % en 120 minutes. Pour une durée d (en minutes), la batterie gagne donc (en pourcentage) : $\frac{100}{120}d = \frac{5}{6}d.$

Quand Phil utilise son téléphone et que celui-ci charge, sa batterie gagne 40 % de la charge en moins, soit 60 % de la charge qu'elle gagne quand le téléphone n'est pas utilisé. Pour une durée d, la batterie gagne donc $\frac{5}{6}d \times 0{,}60 = \frac{1}{2}d.$

Phil ayant 150 minutes pour charger son téléphone, on cherche donc deux durées d_1 et d_2 (en minutes), telles que $d_1 + d_2 = 150$, et que $\frac{1}{2}d_1 + \frac{5}{6}d_2 = 100.$ On a donc :

$$2\left(\frac{1}{2}d_1 + \frac{5}{6}d_2\right) - (d_1 + d_2) = 2 \times 100 - 150$$

$$\Leftrightarrow \; d_1 + \frac{5}{3}d_2 - d_1 - d_2 = 200 - 150$$

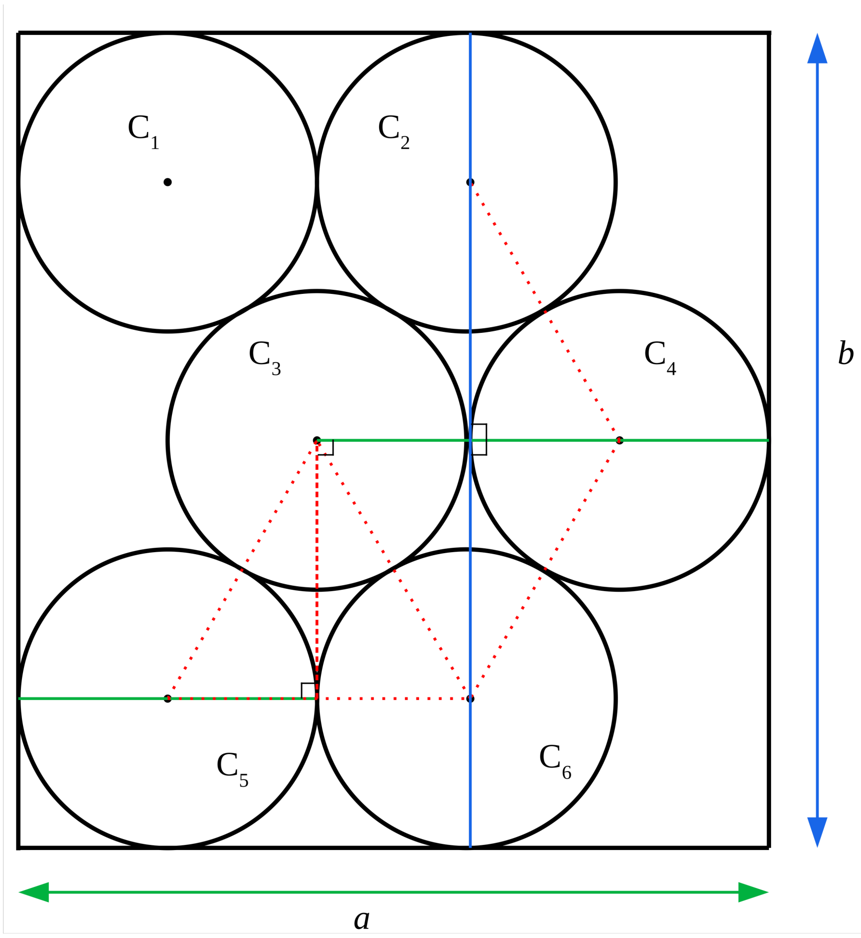
$$\Leftrightarrow \; \frac{2}{3}d_2 = 50$$

$\Leftrightarrow \; d_2 = 75,$ donc $d_1 + 75 = 150$, on alors $d_1 = 75$. Phil pourra donc téléphoner pendant 75 minutes au maximum, soit 1h15, s'il veut avoir son téléphone complètement chargé à 20h30. Il devra s'arrêter de téléphoner à 19h15 au plus tard.

Exercice S2. 8. Tri sélectif

Étant donné que les bouteilles (ou, dans le plan du fond de la boîte, les cercles) rentrent « tout juste », on peut considérer que les cercles sont agencés de la manière la plus compacte possible, soit en hexagones. Modélisons la situation ainsi :

[Voir page suivante]



Comme vu précédemment, les cercles sont agencés en « hexagones », c'est à dire qu'ici, les centres des cercles C_1, C_2, C_4, C_5 et C_6 sont 5 des 6 sommets d'un hexagone régulier, de côté égal au diamètre des cercles, soit ici 10 cm. Le centre de cet hexagone est C_3, donc, par conséquent, les centres de C_3, de C_5 et de C_6 sont les sommets d'un triangle équilatéral. Une des hauteurs de ce triangle, perpendiculaire à la largeur de la boîte et passant par le centre de C_3 et l'intersection de C_5 et de C_6, indique que ces derniers points sont alignés verticalement. La largeur *a* de la boîte peut donc s'exprimer par la somme du diamètre de C_4 (10 cm), du rayon de C_3 (5 cm) et du diamètre de C_5 (10 cm). [Voir segments verts sur le schéma]
On a : a = 10 cm + 5 cm + 10 cm = 25 cm.

Considérons le triangle formé par les centres de C_2 et de C_4, ainsi que par l'intersection de C_3 et de C_4. Comme dans la situation précédente, le segment du centre de C_2 à l'intersection de C_3 et de C_4, de longueur l, est perpendiculaire au segment reliant cette intersection au centre de C_4. Ce dernier est un rayon de C_4, il mesure donc 5 cm de longueur, et l'hypoténuse du triangle, reliant deux centres de cercles tangents, a pour longueur la somme de leur deux rayons (5 cm + 5 cm = 10 cm).
D'après le théorème de Pythagore, on a : $l^2 + 5^2 = 10^2$

$$\Leftrightarrow \quad l^2 + 25 = 100$$
$$\Leftrightarrow \quad l^2 = 75$$
$$\Leftrightarrow \quad l = \sqrt{75} \quad (l \text{ est une longueur, donc } l \geq 0)$$
$$\Leftrightarrow \quad l = 5\sqrt{3}. \quad l \text{ mesure donc } 5\sqrt{3} \text{ cm}.$$

On constate que le triangle formé par les centres de C_6 et de C_4, ainsi que par l'intersection de C_3 et de C_4, est symétrique au triangle précédent par rapport à la droite passant par les centres de de C_3 et de C_4, et que par conséquent, le segment reliant le centre de C_6 et l'intersection de C_3 et de C_4 a aussi pour longueur $l = 5\sqrt{3}$ cm. On en déduit que la longueur *b* de la boîte peut s'exprimer par la somme du rayon de C_6 (5 cm), de deux fois la longueur l et du rayon de C_2 (5 cm).
[Voir segments bleus sur le schéma]
On a : $b = 5 \text{ cm} + 2 \times 5\sqrt{3} \text{ cm} + 5 \text{ cm} = \left(10 + 10\sqrt{3}\right) \text{ cm}$.

Le fond de la boîte de Justin mesure donc 25 cm par $10 + 10\sqrt{3}$ cm.