Pépinière académique de mathématiques

Stage « en ligne » de janvier et février 2021

Fiche numéro 1

Les propositions de solution de chaque exercice doivent être envoyées d'ici le lundi 8 février à l'adresse euler.pepiniere@ac-versailles.fr*, sous forme numérique (format .pdf ou image), en pièce jointe ou avec un système de dépôt pour les fichiers volumineux, par les professeurs selon les modalités précisées dans le courrier envoyé dans les lycées (envoi des propositions d'au plus deux équipes).*

Exercice CG 1. 1 Mais quel est donc le rapport avec 2 021 ?

Soit a et b deux nombres réels tels que $\left(a+\sqrt{1+a^2}\right)\left(b+\sqrt{1+b^2}\right)=1$. Que vaut $(a+b)^{2\,021}$?

Exercice CG 1. 2 Équation du troisième degré

1. Montrer que l'équation $ax^3+bx^2+cx+d=0$, où a, b, c et d sont des réels donnés, avec $a \neq 0$, peut être ramenée, par mise en facteur et changement de variable, à l'équation type du troisième degré de la forme

$$x^3+px+q=0$$

2. On pose $x=u+v$. Montrer que la condition sur u et v obtenue en posant $uv=-\frac{p}{3}$ est équivalente à :

$$\begin{cases} u^3+v^3=-q \\ u^3v^3=-\dfrac{p^3}{27} \end{cases}$$

3. Ce système se résout en résolvant l'équation auxiliaire, du second degré :

$$X^2+qX-\frac{p^3}{27}=0 \;(*)$$

a. Montrer que la fonction f définie sur **R** par $f(x)=x^3$ admet une fonction réciproque.

b. Montrer que, si l'équation (*) admet deux racines réelles, on peut en déduire une solution de l'équation initiale

4. *a.* En étudiant la fonction $x \longmapsto x^3+px+q$, montrer que l'équation de départ peut avoir une, deux ou trois solutions.

b. Dans quels cas la formule dite de Cardan

$$x=\sqrt[3]{\frac{-q-\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{-q+\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}}{2}}$$

en donne-t-elle une solution ?

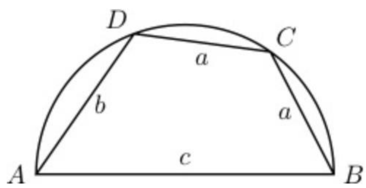
5. Quelle solution la formule de Cardan donne-t-elle pour l'équation $x^3+3x-4=0$? Trouver une expression plus simple de ce résultat.

Exercice CG 1. 3 Des entiers qui tournent en rond

Soit $ABCD$ un quadrilatère inscrit dans un demi-cercle de diamètre $[AB]$.

On suppose que : $BC=CD=a$, $DA=b$ où $b \neq a$, $AB=c$

Montrer que si a, b et c sont des entiers alors c ne peut pas être un nombre premier.



Exercice CG 1. 4 Suite de Prouhet-Thue-Morse

On considère la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \text{pour tout } n \geq 0,\ u_{2n} = u_n \text{ et } u_{2n+1} = 1 - u_n \end{cases}$

1. Montrer que les termes de cette suite valent 0 ou 1.
2. Calculer $u_{2\,021}$.
3. Pour combien d'indices n inférieurs ou égaux à 2 021 a-t-on $u_n = 0$?
4. On considère un entier p et l'entier $N = (2^p - 1)^2$.Déterminer u_N.

Exercice CG 1. 5 Problèmes de maximum

Soit (C) un cercle du plan de rayon 1.

1. Déterminer les triangles ABC inscrits dans le cercle (C) pour lesquels la somme $AB^2 + BC^2 + CA^2$ est maximale.
2. Déterminer les quadrilatères $ABCD$ inscrits dans le cercle (C) pour lesquels la somme

$$AB^2 + AC^2 + AD^2 + BC^2 + BD^2 + CD^2$$

est maximale. Représenter un tel quadrilatère

Exercice CG 1. 6 Tout ça pour un malheureux rationnel !

Sans utiliser de calculatrice, déterminer des entiers naturels non nuls m et n pour lesquels :

$$(\sin 1°)^6 + (\sin 2°)^6 + (\sin 3°)^6 + \cdots + (\sin 87°)^6 + (\sin 88°)^6 + (\sin 89°)^6 = \frac{m}{n}.$$

Exercice CG 1. 7 (programme « mathématiques expertes ») Congruences

Déterminer, s'ils existent, les entiers naturels n tels que le nombre $A_n = \frac{2^{4n+2}+1}{65}$ soit

a. un entier

b. un nombre premier.