Olympiades nationales 2020
Zone Asie-Pacifique
Éléments de solution

Exercice 3
Fiabilité

1. ***a.*** $F(t) = 1 - D(t)$, donc $F(t) = 0{,}4$ si $D(t) = 0{,}6$
b. De même $D(t) = 0{,}3$ si $F(t) = 0{,}7$

2. ***a.*** et ***b.***

Temps en centaines d'heures	0	1	2	3	4
Fiabilité $F(t)$	1	0,9	0,81	0,729	0,6561
Rapport $\frac{F(t+1)}{F(t)}$	0,9	0,9	0,9	0,9	

Les quatre quotients sont égaux. Sur cette observation, le taux d'évolution ne change pas.
c. Pour la défaillance, on peut compléter un autre tableau :

Temps en centaines d'heures	0	1	2	3	4
Défaillance $D(t)$	0	0,1	0,19	0,271	0,3439
Rapport $\frac{D(t+1)}{D(t)}$	0,1	1,9	1,4263…	1,26900..	

Le taux d'évolution n'est pas constant.
d. et ***e.*** La valeur finale de t est le nombre de fois qu'il a fallu multiplier le contenu de la mémoire F par 0,9 pour obtenir un résultat inférieur à 0,1. Or, $0{,}9^{21} = 0{,}1094\ldots$ et $0{,}9^{22} = 0{,}0984\ldots$
À l'arrêt du programme, le compteur t affiche 22.

3. ***Montage de plusieurs systèmes***
a. Dans ce cas, la fiabilité du système est le produit de la fiabilité des composants, soit $0{,}8 \times 0{,}7 = 0{,}56$.
b. Si les fiabilités sont 0,7 et 0,8, les défaillances sont 0,3 et 0,2 et la défaillance du système $0{,}3 \times 0{,}2 = 0{,}06$. Sa fiabilité est donc $1 - 0{,}06 = 0{,}94$.
c. Deux composants identiques de fiabilité 0,9 montés en parallèle ont une défaillance de $0{,}1 \times 0{,}1 = 0{,}01$ et donc une fiabilité de $1 - 0{,}01 = 0{,}99$. L'augmentation de la fiabilité par rapport à un seul composant de fiabilité 0,9 est 0,09 et l'augmentation que représente 0,09 est $\frac{0{,}09}{0{,}9} = 0{,}1$. Exprimée en pourcentage, ctte augmentation représente 10%.

4. ***Étude d'un montage***
a. La défaillance d'un composant C_1 est $1 - 0{,}9^n$, celle d'un composant C_2 est $1 - 0{,}8^n$. Pour un montage en parallèle, les défaillances se multiplient : la défaillance du premier parallèle est donc $(1 - 0{,}9^n)^2$, celle du second $(1 - 0{,}8^n)^2$
b. La fiabilité du montage est le produit des fiabilités. Elle est donc :$(1 - (1 - 0{,}9^n)^2)(1 - (1 - 0{,}8^n)^2)$.
On peut réduire cette écriture, en appelant $F_m(n)$ la fiabilité de l'ensemble :

$$F_m(n) = 0,9^n(2 - 0{,}9^n)0{,}8^n(2 - 0{,}8^n)$$

c. Utilisons un tableau

n	$0{,}9^n$	$0{,}8^n$	$2 - 0{,}9^n$	$2 - 0{,}8^n$	$F_m(n)$
2	0,81	0,64	1,19	1,36	0,8389…
3	0,729	0,512	1,271	1,488	0,70590…
4	0,6561	0,4096	1,3439	1,5904	0,57438…
5	0,59049	0,32768	1,40951	1,67232	0,45608…

La fiabilité est inférieure à 0,5 après 500 heures de fonctionnement.
d. et ***e.*** Cette fois, la fiabilité de l'ensemble est $F_m(n) = 0,9^n(2 - 0,9^n)p^n(2 - p^n)$ au bout de n centaines d'heures de fonctionnement. On souhaite donc que $F_m(10) > 0,5$, c'est-à-dire que :$p^{10}(2 - p^{10}) > \frac{0,5}{0,9^{10}(2-0,9^{10})}$.
Ou encore $p^{10}(2 - p^{10} > 0,8683868 \ldots)$
On peut procéder par approximations successives (le calcul précédent prouve que p cherché est supérieur à 0,9) :

p	p^{10}	$2 - p^{10}$	$p^{10}(2 - p^{10})$
0,95	0,598736…	1, 401263…	0,838987…
0,97	0,737424…	1, 262575…	0,9310539…
0,96	0,6648326…	1,3351673…	0,8876628…
0,955	0,6310063…	1, 3689936…	0,86384367…

Il ressort de cette étude que la fiabilité des composants doit être supérieure à 0,955 et qu'elle peut être inférieure à 0,96 pour donner le résultat souhaité. On s'en tiendra donc à l'estimation 0,96.