

# Enseigner les statistiques et les probabilités au collège

*Selon la loi d'orientation et de programme pour l'avenir de l'École du 23 avril 2005, « la scolarité obligatoire doit au moins garantir à chaque élève les moyens nécessaires à l'acquisition d'un socle commun constitué d'un ensemble de connaissances et de compétences qu'il est indispensable de maîtriser pour accomplir avec succès sa scolarité, poursuivre sa formation, construire son avenir personnel et professionnel et réussir sa vie en société ». Le décret du 11 juillet 2006 modifiant le code de l'éducation, définit ce socle commun, ensemble de connaissances, capacités et attitudes constituant une référence commune pour ceux qui confient leurs enfants à l'École et pour les enseignants. Au titre 3, « Les principaux éléments de mathématiques et la culture scientifique et technologique », figurent les notions fondamentales de statistique descriptive (maximum, minimum, fréquence, moyenne) et les notions de chance ou de probabilité. Les programmes de mathématiques des classes du collège ont donc été modifiés en conséquence.*

## Le hasard existe

Depuis que les hommes réfléchissent, ils ont observé de nombreux phénomènes pour lesquels des conditions initiales repérables et identiques produisent des successions d'événements différents et des issues différentes. Les interprétations proposées relèvent le plus souvent de la **pensée magique**. Si les théologiens récusèrent l'idée de l'intervention divine dans le *jugement de Dieu*, le fantastique est souvent appelé en renfort, même de nos jours, pour « donner du sens » à des événements fortuits (par exemple pour interpréter des coïncidences).

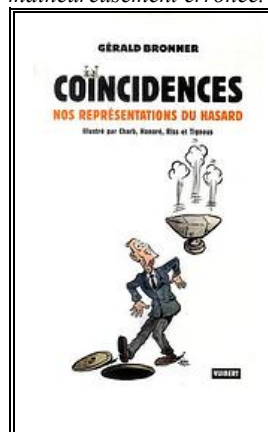
Il ne suffit pas de nier l'intervention d'une volonté cachée. Les jeux de hasard, notamment, ont permis de dégager des **régularités**. Ayant assisté à de très nombreuses parties, des passionnés de jeux de dés ont observé que, si on joue avec trois dés et qu'on s'intéresse à la somme des points obtenus, le 9 sort plus souvent que le 10.

L'existence de ces régularités confirme l'absence de fantastique. Il n'y a pas de cause, mais il y a une organisation. Pour quantifier le hasard, il faut des outils mathématiques. Les premiers seront fournis par les symétries géométriques des dés, roues ou roulettes, qui permettront de parler de chances égales, avant qu'on cherche à dénombrer les ensembles de cas élémentaires. Pascal et Fermat posent les bases d'un modèle de « géométrie du hasard ». En 1713, l'ouvrage posthume de J. Bernoulli, « *Ars conjectandi* », énonce la loi des grands nombres. (d'après J.-L. Piednoir, « Du hasard »)



Portrait de Luca Pacioli (1445-1517)

La *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita*, publiée en 1494, aborde le problème des *partis* (comment partager l'enjeu de façon équitable entre les joueurs d'une partie inachevée?)... de façon malheureusement erronée.



**COÏNCIDENCES**  
Nos représentations  
du hasard  
Un livre  
de Gérald Bronner

Une étude menée avec humour, et qui s'appuie sur des exemples nombreux, du fonctionnement de notre esprit face au hasard.

# Statistiques

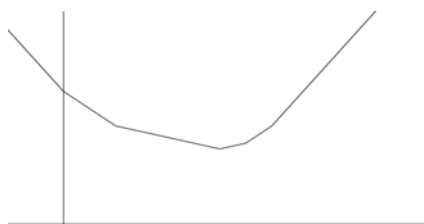
Avec les outils du lycée

## Moyenne et médiane minimisent la « dispersion »

On comprend bien que la moyenne est le résultat d'un calcul, on comprend moins bien que le résultat de ce calcul résume une série statistique. Intuitivement, si on cherche un nombre « proche de tous les termes de la série », on pourrait s'intéresser à la réalisation du

minimum de  $d_1(x) = \sum_{p=1}^n |x - a_p|$ .

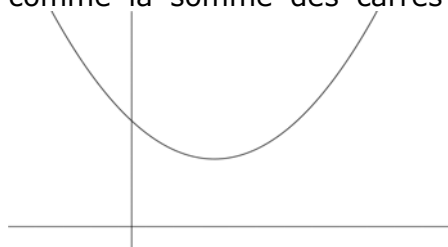
Cette somme d'écart absolu semble en effet une mesure acceptable de la dispersion.



Représentation graphique d'une fonction « somme des écarts absolus »

L'étude de la fonction conduit à un minimum réalisé en une valeur unique (série d'effectif impair) ou en tous les éléments d'un intervalle (série d'effectif pair). Les valeurs mises ainsi en évidence sont les médianes.

Si on cherche le minimum éventuel d'une dispersion définie comme la somme des carrés



Représentation graphique d'une fonction « somme des carrés des écarts »

## Une progression : organisation et représentation de données, traitement de données, résumés statistiques

Si les activités liées à l'organisation, à la représentation et au traitement des données s'intègrent naturellement à l'ensemble de ce qui se fait en classe de mathématiques, il y a une progression raisonnable dans le déroulement du programme :

En sixième, on apprend à lire des tableaux de données, puis à recueillir des données et à les présenter sous forme de tableau. D'autres représentations usuelles sont proposées.

En cinquième, une première étape est franchie dans le traitement des données avec les regroupements en classes (de même amplitude), le calcul des fréquences et la réalisation d'histogrammes simples.

En quatrième, les moyennes et moyennes pondérées conduisent à utiliser des formules les définissant, et à les intégrer dans des feuilles de calcul.

La classe de troisième est consacrée aux caractéristiques de position (tendance centrale et dispersion).

Pour l'élève de sixième, il s'agit d'apprendre à trier des données recensées de manière exhaustive et non redondante. Les différentes sortes de représentations graphiques vues ensuite montrent que des présentations différentes faites d'une même série de données peuvent suggérer des interprétations éloignées. Avec les résumés statistiques, on perd de l'information (l'information maximum, c'est la liste exhaustive des données), mais on souhaite trouver des pistes pour l'interprétation. Aussi faut-il savoir à quoi on peut s'attendre, certains résumés se révélant selon les cas plus pertinents que d'autres. Les élèves sont appelés à une réflexion qualitative qui ouvre la voie à la statistique inférentielle. Il s'agit d'établir des liens entre ce qui se passe pour l'ensemble de la population et ce qu'on observe sur des échantillons.

des distances des valeurs de la série à un nombre réel, il est obtenu... pour la moyenne (pour le voir, on pourra dériver la fonction « somme des carrés des écarts », qui est définie par :

$$d_2(x) = \sum_{p=1}^n (x - a_p)^2$$

Deux sites en français pour se procurer des données et s'informer sur les méthodes de la statistique



**INSEE Indices et séries statistiques**  
[www.indices.insee.fr](http://www.indices.insee.fr)



**Statistique Canada**  
[www.statcan.gc.ca](http://www.statcan.gc.ca)

# Probabilités

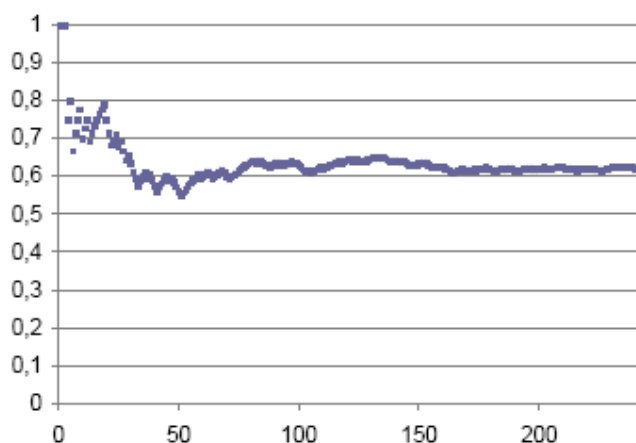
## Approche fréquentiste

### 1. Le déterminisme peut se révéler « à long terme »

Les régularités observées lors de la répétition d'expériences dont l'issue semblait soumise au hasard permettent de retrouver une certaine forme de déterminisme : la connaissance exacte de toutes les positions initiales et des lois du rebond lors du lancer d'un dé pourrait peut-être conduire à la prévision de la face finalement apparente. Une telle connaissance est inaccessible, mais « si l'on observe des nombres considérables d'événements d'une même nature, dépendant de causes qui varient régulièrement, tantôt dans un sens, tantôt dans un autre, c'est-à-dire sans que leur variation soit progressive dans un sens déterminé, on trouvera entre ces nombres des rapports constants » (S. D. Poisson).

### 2. La probabilité objective

On peut considérer qu'au moins au niveau microscopique, la nature des phénomènes physiques est fondamentalement aléatoire. Si les phénomènes observables de nature physique, biologique, sociale, sont fondamentalement aléatoires, alors la probabilité est une propriété du phénomène étudié : c'est la conception objective de la probabilité. Les procédures statistiques utilisées pour donner une valeur aux paramètres inconnus du modèle devront être convergentes, l'estimateur du paramètre inconnu devant tendre vers sa « vraie » valeur.



*Stabilisation de la fréquence de succès au cours de 250 parties du jeu de franc-carreau*

### 3. L'approche fréquentiste au collège

On part de situations simples, d'expériences réalisées avec des dispositifs dont les symétries appellent une estimation a priori des chances d'apparition de telle ou telle issue. De nombreuses expériences illustrent à la fois

## Randomisation et simulation

Il peut arriver qu'on soit contraint de **fabriquer** du hasard : si, dans une entreprise, on veut tester la résistance des pièces d'un lot sortant de fabrication, on peut les forcer toutes jusqu'à la rupture, mais alors la production est détruite. Un choix de certaines de ces pièces doit être fait **au hasard**. La proportion de pièces défectueuses dans l'échantillon fournit un estimateur de la proportion de celles qui le sont dans le lot. Encore faut-il savoir fabriquer le hasard : pour des études portant sur la société l'ordre alphabétique fournit des échantillons biaisés.

Il est possible, grâce à des algorithmes, de fabriquer des suites de chiffres qui se comportent comme s'ils étaient choisis au hasard, c'est-à-dire que tous ont la même « probabilité » (justement, ça n'en est pas une) d'apparaître à chaque rang de la liste. Avec ces nombres, on peut simuler des expériences aléatoires dont on connaît la loi de probabilité. Le programme actuel du lycée prévoit d'utiliser des simulations pour illustrer la stabilisation des fréquences (mais naturellement ce n'est possible que pour des expériences dans lesquelles la probabilité est connue).

la variabilité et l'imprévisibilité des résultats, la fluctuation d'échantillonnage et la stabilisation des fréquences ... vers les probabilités estimées. Si rien ne permet aux élèves d'estimer « la probabilité » d'un événement élémentaire (cas du lancer d'une punaise à tableau, cas du jeu de franc-carreau), la stabilisation des fréquences conduit à une estimation de cette probabilité.

### 4. Fréquences et probabilité

En réalisant des expériences aléatoires, on fait des statistiques, et on détermine des fréquences d'apparition de telle ou telle issue. On ne « détermine » pas la probabilité, ou la loi de probabilité. Tout au plus l'estime-t-on. Il y a donc des précautions de langage à respecter.

### 5. Les calculs, eux, ne sont pas hasardeux

Les élèves doivent comprendre que l'estimation de la probabilité associée à une expérience aléatoire ne relève pas de l'opinion, et que les opinions ne sont pas départagées par tirage au sort... Par la suite, une fois accepté le modèle, les raisonnements faits sur les probabilités sont tout-à-fait rigoureux.

# Les ressources

## Les programmes et la documentation officielle

- Programmes de mathématiques des collèges : Arrêté du 6 avril 2007, paru au B.O. hors série n°6 du 19 avril 2007 ;
- Attention : une nouvelle rédaction des programmes est applicable dans toutes les classes à compter de la rentrée 2009 : Arrêté du 9 juillet 2008, paru au B.O. spécial n°6 du 28 août 2008. Dans l'académie, une information des collèges est prévue au troisième trimestre ;
- Les documents ressources pour faire la classe, proposés par la DGESCO sont téléchargeables sur le site EDUSCOL, à l'adresse : <http://eduscol.education.fr/D0015/LLPHAG00.htm>
- L'ensemble des documents concernant le **socle commun de connaissances et de compétences** (textes officiels, grilles de compétences, livrets d'évaluation mis en expérimentation) est accessible sur le site EDUSCOL, à l'adresse : <http://eduscol.education.fr/D0231/accueil.htm>

### UNE ÉPREUVE PRATIQUE DE MATHÉMATIQUES EN CLASSE DE TROISIEME

L'année scolaire 2007-2008, une vingtaine de collèges ont proposé à leurs élèves de troisième une épreuve pratique de mathématiques. Il s'agit de résoudre, en une heure, un exercice qui demande qu'on mette en œuvre les T.I.C.E. pour réfléchir à une situation mathématique, et qu'on résolve un petit problème posé (en dialoguant avec le professeur).

Une réunion de présentation et de préparation est prévue mercredi 21 janvier 2009, à l'U.F.R. des sciences de l'université de Versailles Saint Quentin, amphi Bertin.

**Attention ! n'oubliez pas les inscriptions pour les Olympiades de quatrième**

## Le site académique de mathématiques



**43 ressources (exercices d'apprentissage et outils) déjà disponibles en probabilités et 31 en statistiques pour la classe de troisième !**

Le lexique du site académique propose également un ensemble de définitions, chacune comme il se doit accompagnée de liens vers les rubriques connexes et les ressources. En statistiques, plusieurs des ressources consistent en des feuilles d'exercices téléchargeables et imprimables.

Un court extrait du catalogue

<a href="#">2310</a>	<a href="#">Calculer la probabilité de tirer une boule de couleur donnée dans une urne</a>
<a href="#">2311</a>	<a href="#">Calculer la probabilité de tirer une boule qui ne soit pas d'une couleur donnée dans une urne</a>
<a href="#">2312</a>	<a href="#">Calculer la probabilité de tirer une boule qui soit d'une couleur ou d'une autre dans une urne</a>
<a href="#">2313</a>	<a href="#">Calculer la probabilité qu'une roue de loterie s'arrête sur un secteur associé à un nombre donné</a>
<a href="#">2315</a>	<a href="#">Calculer la probabilité d'obtenir un nombre donné à l'issue du lancer d'un dé dodécaédrique</a>
<a href="#">2316</a>	<a href="#">Calculer la probabilité d'obtenir un nombre donné à l'issue du lancer d'un dé icosaédrique</a>
<a href="#">2317</a>	<a href="#">Calculer la probabilité d'obtenir un nombre donné à l'issue du lancer d'un dé octaédrique</a>
<a href="#">2318</a>	<a href="#">Calculer la probabilité d'obtenir un nombre donné à l'issue du lancer d'un dé cubique</a>
<a href="#">2319</a>	<a href="#">Calculer la probabilité d'obtenir un nombre donné à l'issue du lancer d'un dé tétraédrique</a>

Des visioconférences centrées sur l'utilisation des espaces personnels, des espaces élèves et des wikis sont à présent régulièrement offertes. Les inscriptions sont possibles sur le site.

## Publications du C.R.D.P.



Démontrer et évaluer au collège : outils et réflexion pédagogique en mathématique pour enseigner au collège.

Doc Sciences : une revue de grande qualité, réalisée avec le concours de partenaires qualifiés (ici, l'INRIA)