Suites de héron

Approche historique

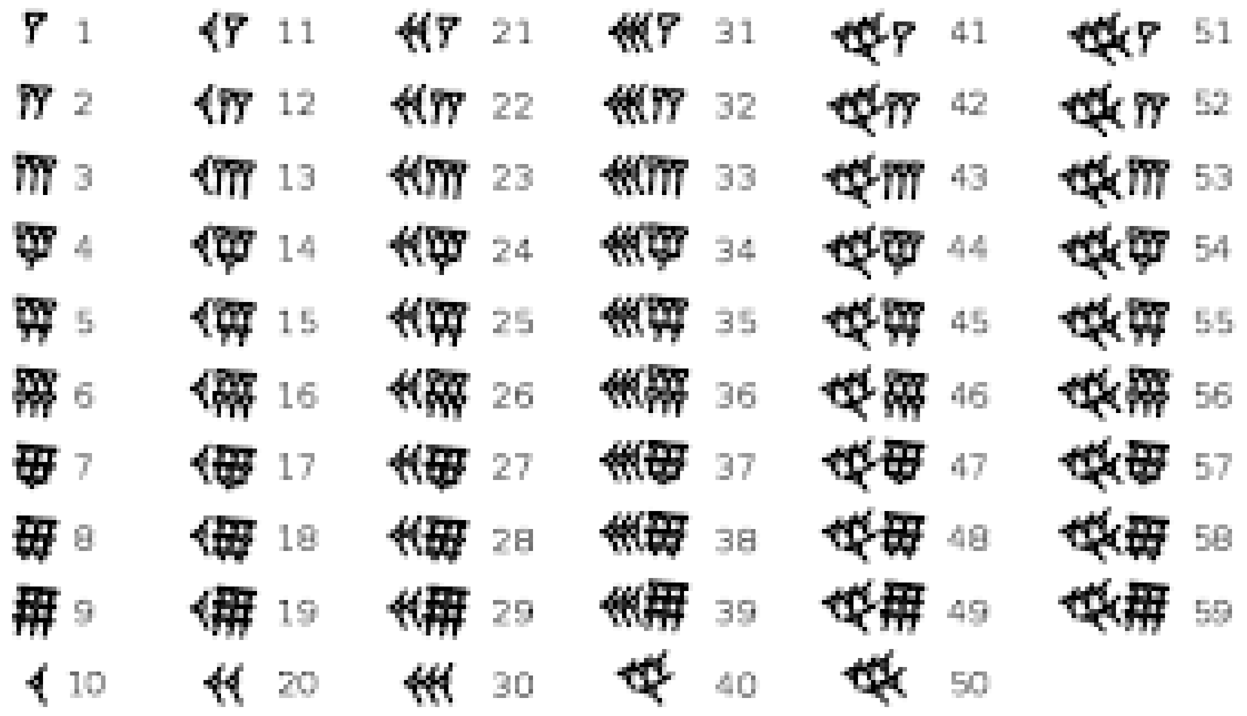
Chez les babyloniens

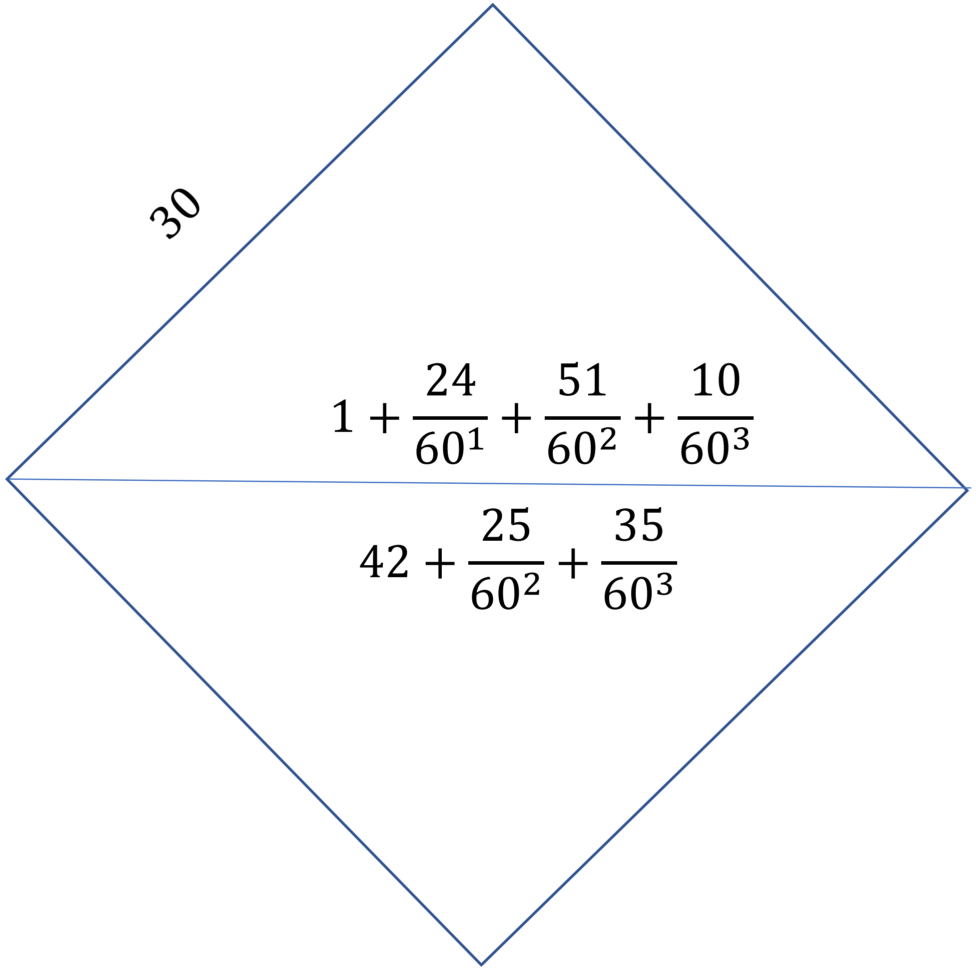
TABLETTE

YBC 7289

(Yale Babylonian collection)

Environ 1600 avant notre ère

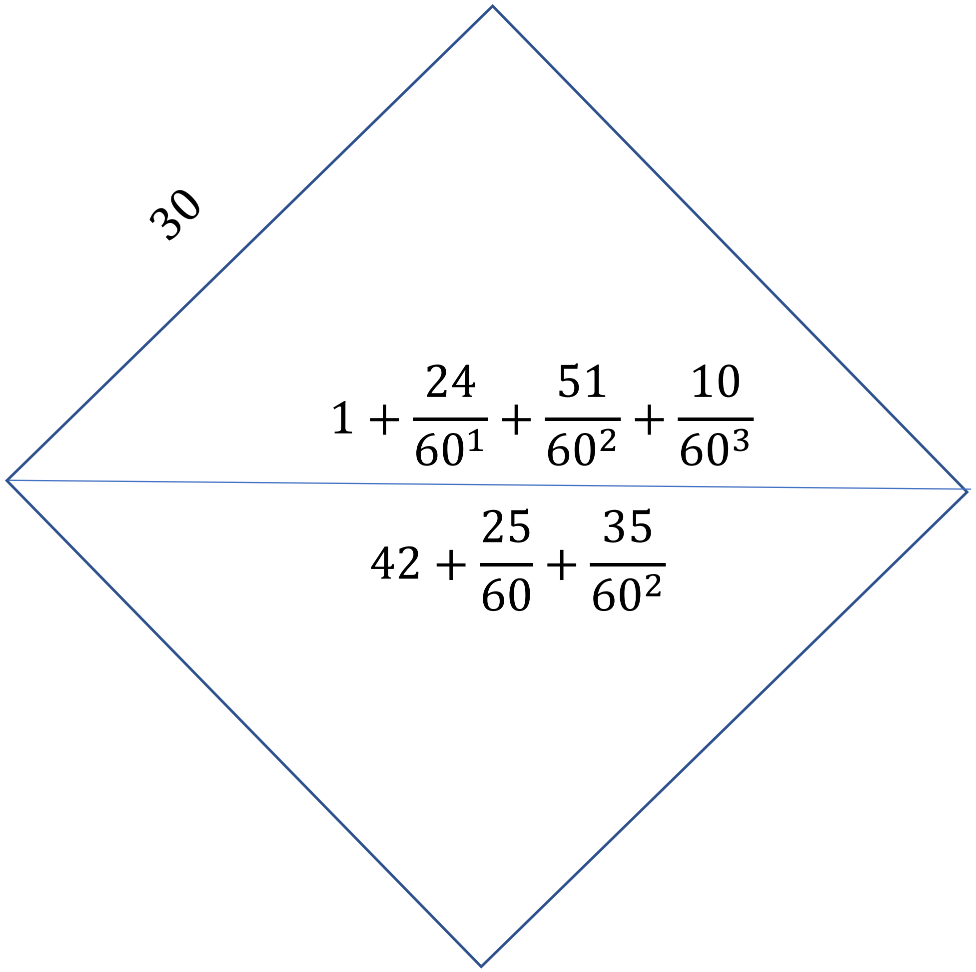

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
42
43
44
45
46
47
48
49
50
51
52
53
54
55
56
57
58
59


30
$1+\frac{24}{60^1}+\frac{51}{60^2}+\frac{10}{60^3}$
$42+\frac{25}{60^2}+\frac{35}{60^3}$

$$1+\frac{24}{60^1}+\frac{51}{60^2}+\frac{10}{60^3}=\frac{30547}{21600}\approx 1{,}414213$$

$$42+\frac{25}{60}+\frac{35}{60^2}=\frac{30547}{720}$$

$$30\times\frac{30547}{21600}=\frac{30547}{720}$$

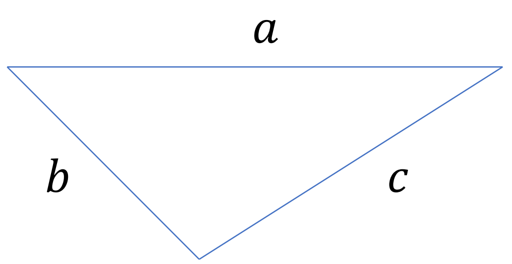


Héron de Alexandrie

1^{er} siècle de notre ère

Dans le livre I des Métriques,

Héron donne une formule donnant l'aire d'un triangle connaissant ses côtés.



$$p = \frac{a + b + c}{2}$$

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Travail de Héron :

L'aire d'un triangle de côtés 7 ; 8 et 9 est $\sqrt{720}$

Dans les programmes

- <u>En quatrième</u>

  Dans l'application du théorème de Pythagore

- <u>En seconde</u>

  Dans le cadre de l'étude de $\sqrt{2}$

- <u>En Terminale</u>

  Dans le cadre d'une étude de suite définie par récurrence

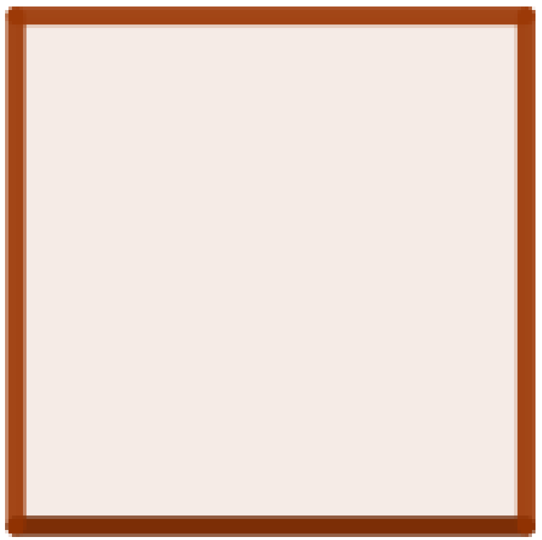
Outils d’approche

Principe d’approximation par rectangles

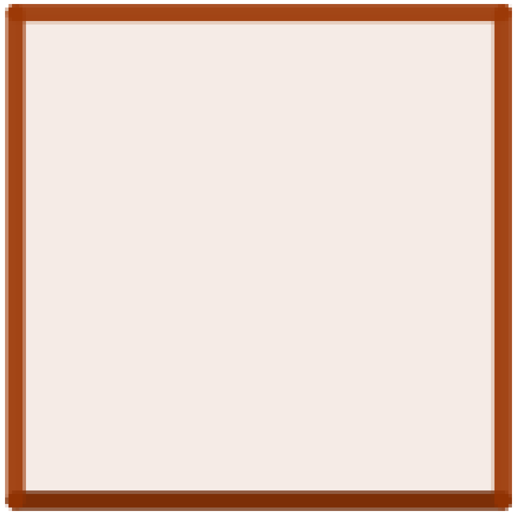
Peut se contruire à la main ou sur géogebra

Rectangle d’aire 2
et de longueur 2 donc de largeur 1

Carré d’aire 2

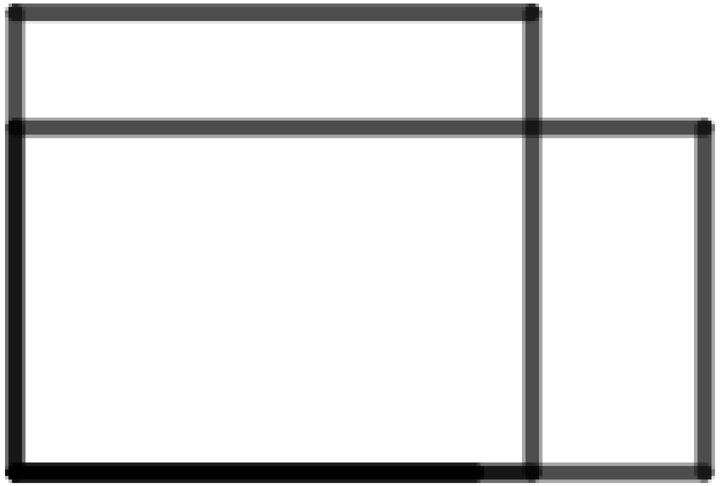


Carré d'aire 2



Rectangle d'aire 2
et de longueur 2 donc de largeur 1

Rectangle d'aire 2
et de longueur $\frac{1}{2}(2+1)=\frac{3}{2}$ donc de largeur $\frac{4}{3}$

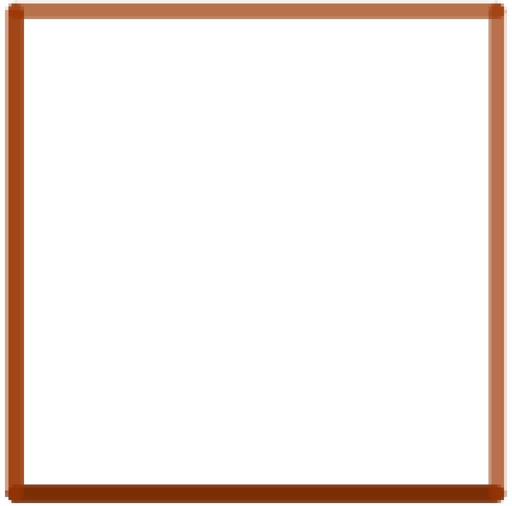


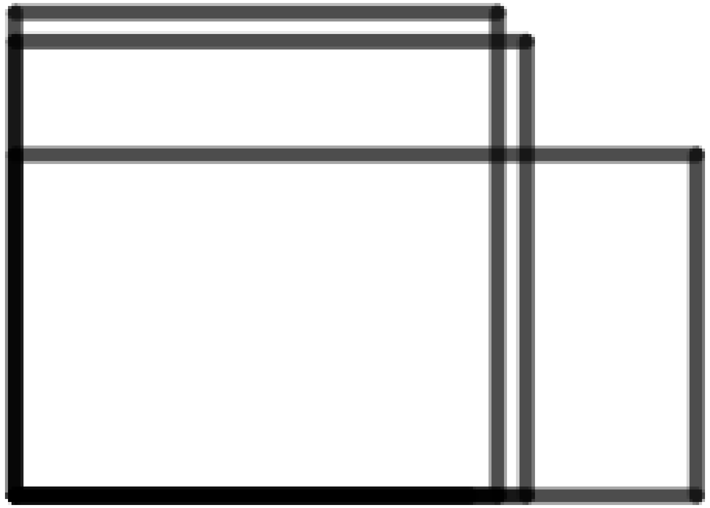
Rectangle d'aire 2
et de longueur 2 donc de largeur 1

Rectangle d'aire 2
et de longueur $\frac{1}{2}(2+1)=\frac{3}{2}$ donc de largeur $\frac{4}{3}$

Rectangle d'aire 2
et de longueur $\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+\frac{4}{3}\right)=\frac{17}{12}$ donc de largeur $\frac{24}{17}$

Carré d'aire 2





Utilisation d’Excel

=(A2+B2)/2

	A	B	C
1	Longueur	largeur	aire
2	2	1	2
3	1,5	1,333333	
4	1,416667	1,411765	
5	1,414216	1,414211	
6	1,414214	1,414214	
7	1,414214	1,414214	
8	1,414214	1,414214	
9	1,414214	1,414214	
10	1,414214	1,414214	
11			

=C$2/A3

Application au calcul de $\sqrt{720}$

	A	B	C
1	Longueur	largeur	aire
2	720	1	720
3	360,5	1,997226	
4	181,2486	3,972444	
5	92,61053	7,774494	
6	50,19251	14,34477	
7	32,26864	22,31268	
8	27,29066	26,38265	
9	26,83666	26,82898	
10	26,83282	26,83282	
11	26,83282	26,83282	
12			
13			

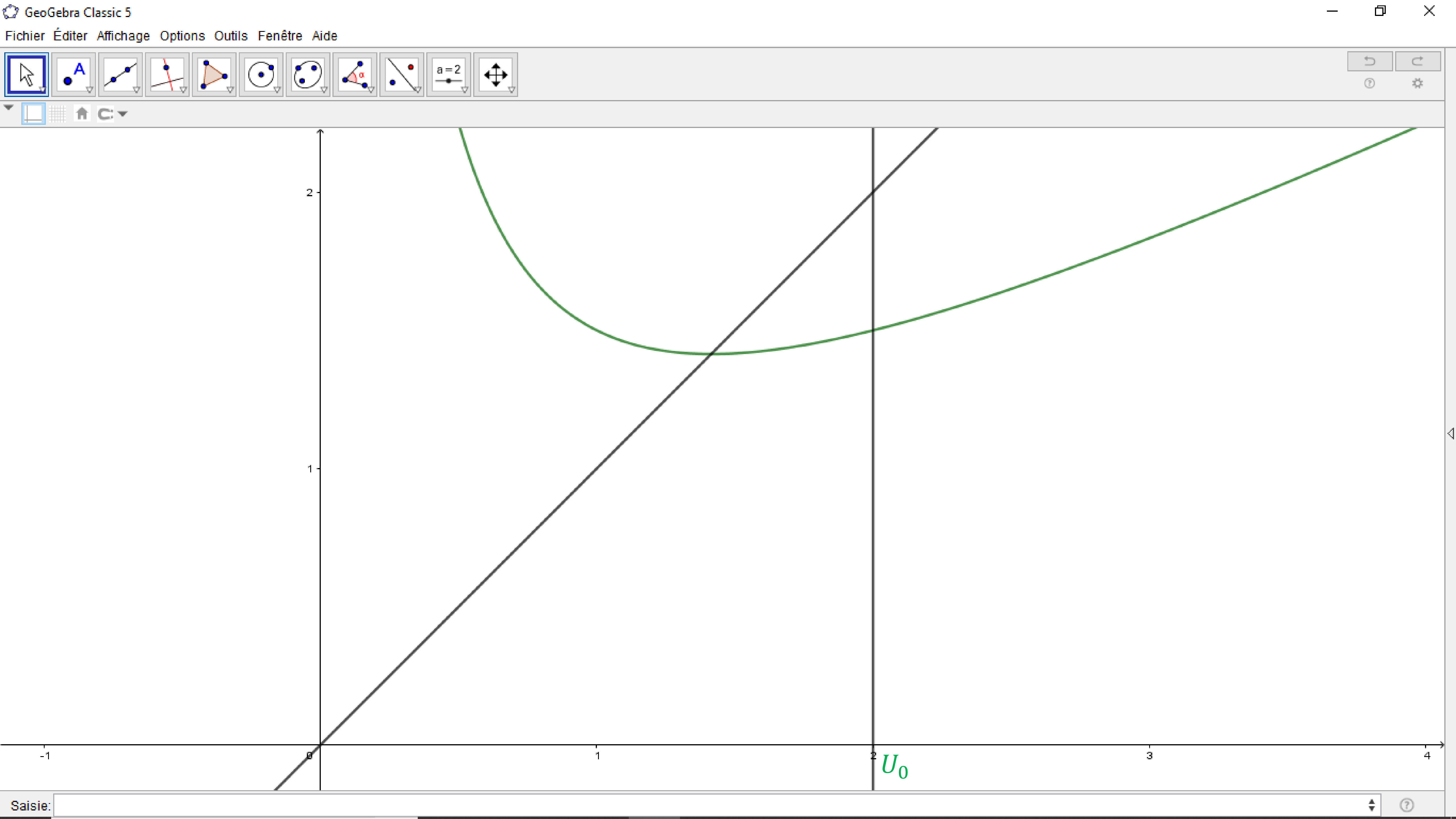
Voici cette méthode exposée par Héron lui-même dans son ouvrage Les métriques :

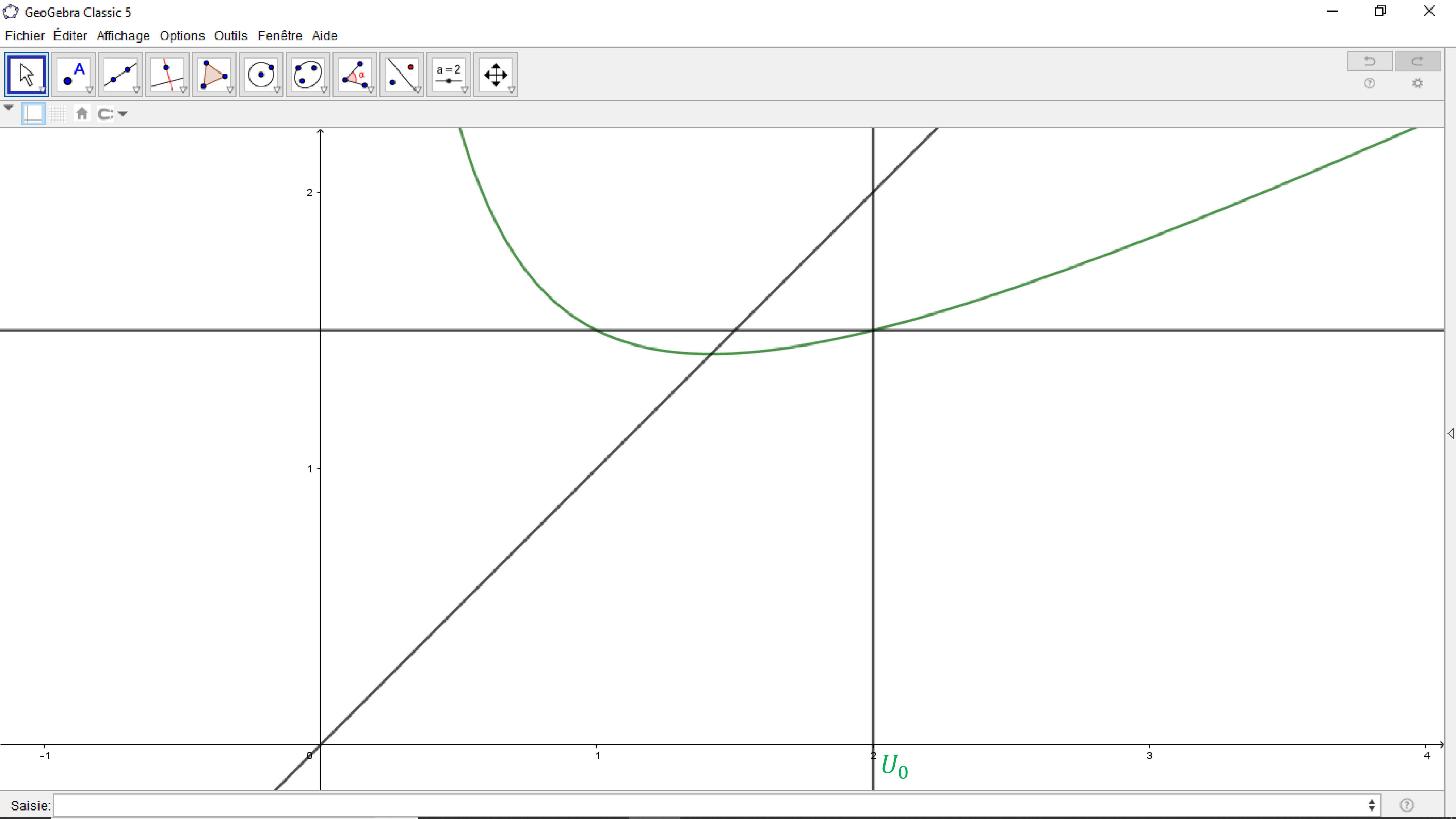
« Comme 720 n'a pas son côté rationnel, nous pouvons obtenir son côté avec une très petite différence comme il suit. Le carré immédiatement supérieur est 729 qui a 27 pour côté. Divisons 720 par 27. Cela donne 26 2/3 . Ajoutons 27 faisant 53 2/3 dont nous prenons la moitié ou 26 1/2 1/3 . Le côté de 720 est donc très approximativement 26 1/2 1/3 .
En effet si nous multiplions 26 1/2 1/3 par lui-même, le produit est 720 1/36 , si bien que la différence est 1/36 .
Si nous voulons avoir une différence plus petite que 1/36 , nous prendrons 720 1/36 au lieu de 720, et en procédant de même nous trouverons que la différence est beaucoup plus petite que 1/36 . »

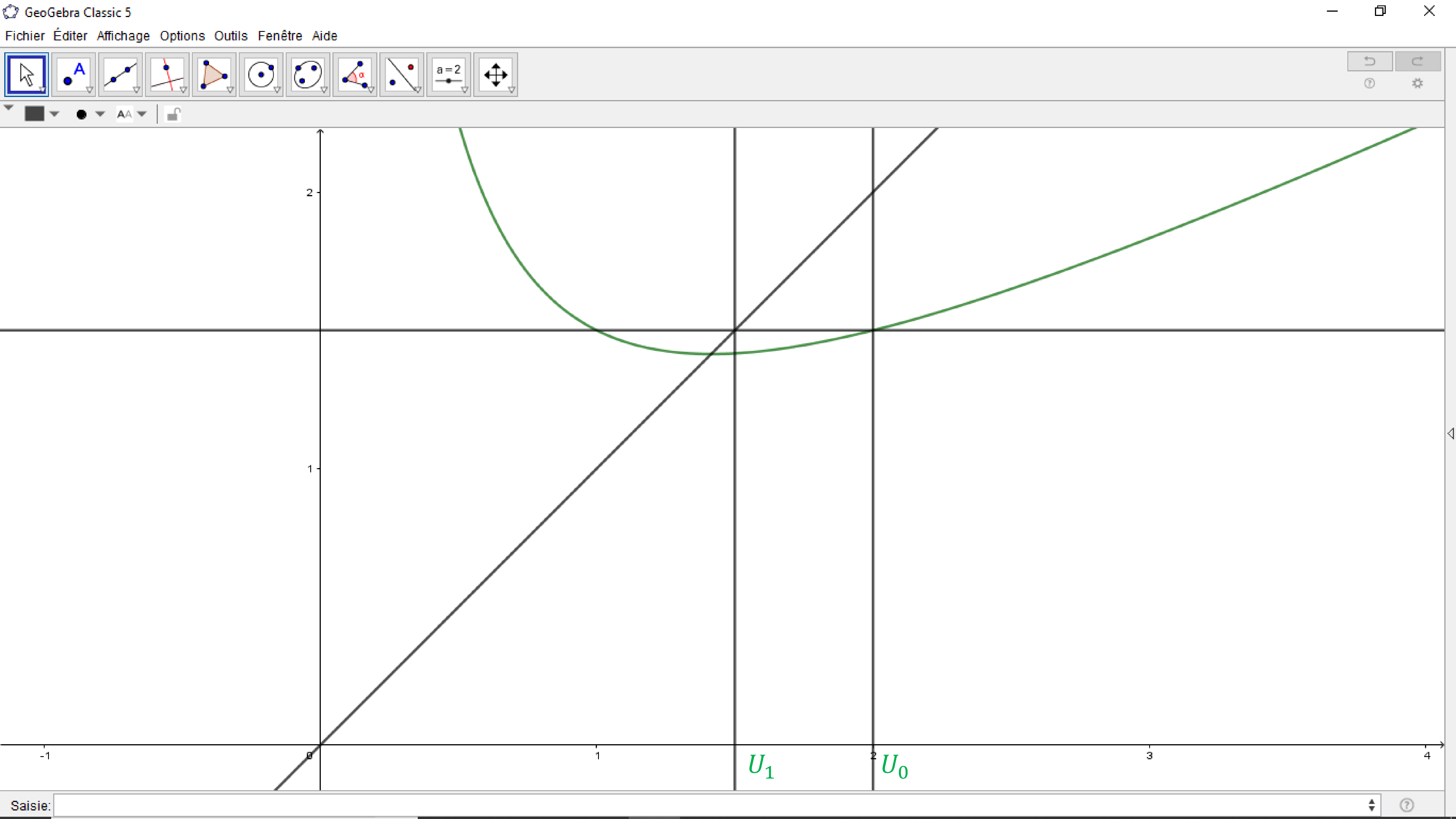
Construction des termes de la suite

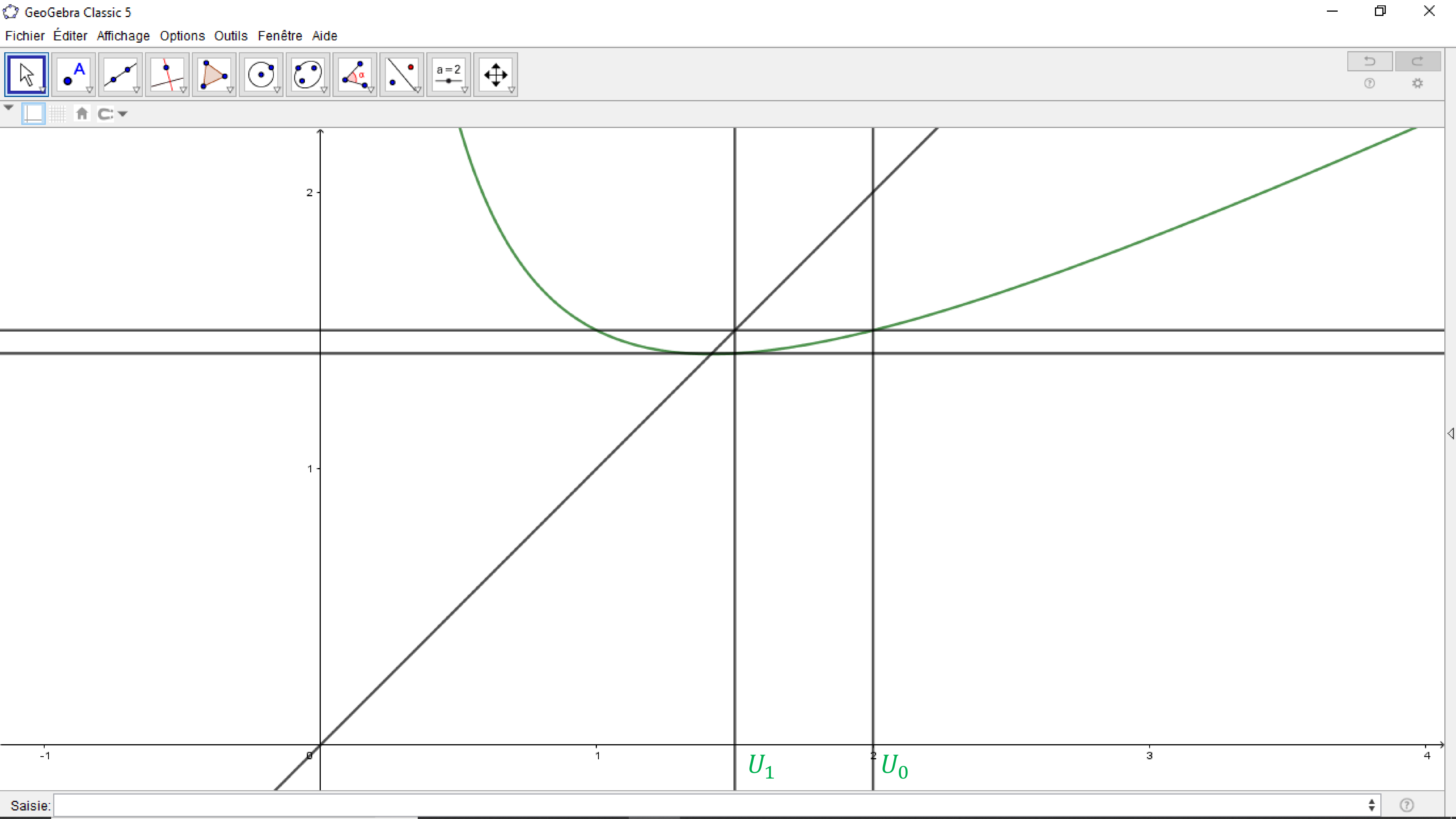
Suite définie par : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

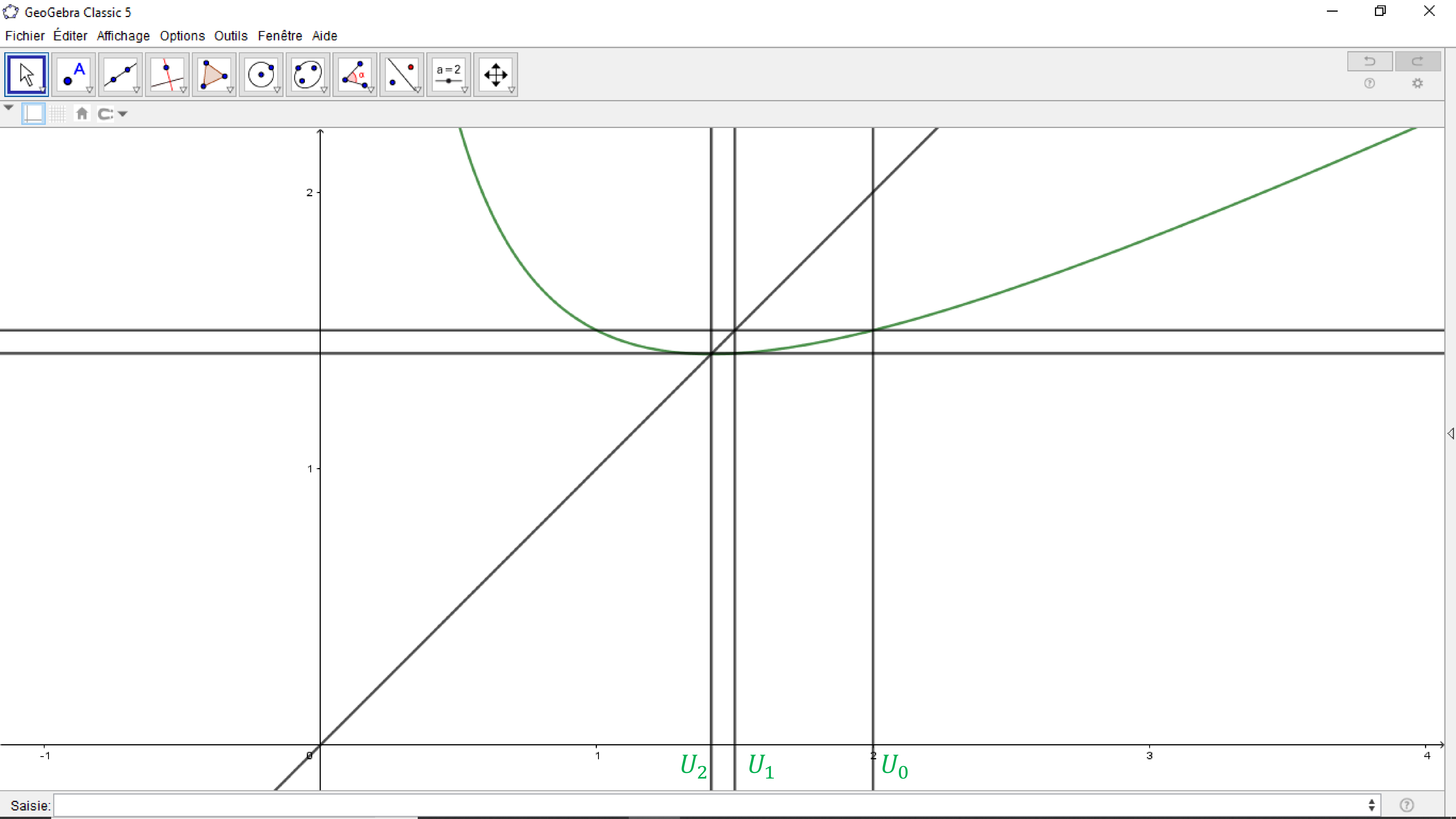
Où $f : x \longmapsto \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$


GeoGebra Classic 5
Fichier Éditer Affichage Options Outils Fenêtre Aide
a = 2
2
1
-1
0
1
2
3
4
U_0
Saisie:


GeoGebra Classic 5
Fichier Éditer Affichage Options Outils Fenêtre Aide
a = 2
2
1
-1
0
1
2
3
4
U_0
Saisie:


GeoGebra Classic 5
Fichier Éditer Affichage Options Outils Fenêtre Aide
a = 2
2
1
-1
0
1
2
3
4
U_1
U_0
Saisie:


GeoGebra Classic 5
Fichier Éditer Affichage Options Outils Fenêtre Aide
a = 2
2
1
-1
0
1
2
3
4
U_1
U_0
Saisie:


GeoGebra Classic 5
Fichier Éditer Affichage Options Outils Fenêtre Aide
a = 2
2
1
-1
0
1
2
3
4
U_2
U_1
U_0
Saisie:

D’autres méthodes d’approximation de racines carrées

Méthode de Newton

Extraction de racine enseignée en classe dans la 1ère moitié du XXème siècle

Par dichotomie

En utilisant l’écriture en séries entières

Des travaux de recherches sur le sujet

Christine Proust (Directrice de Recherche au Laboratoire SPHERE)
https://www.apmep.fr/Mathematiques-en-Mesopotamie

Bernard Vitrac (Directeur de Recherches CNRS)
https://www.youtube.com/watch?v=g6GlFS0CgZo