



Olympiades nationales de mathématiques



Académie de Versailles

Mercredi 15 mars 2017

La partie proprement académique de l'épreuve débute une dizaine de minutes après la fin de la première partie (exercices nationaux). Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur. Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Exercices académiques

Les candidats traitent **deux exercices**. Ceux de la série S traitent les exercices numéros 4 (*Un compte de fées*) et 5 (*Triangle débordant*), les autres traitent les exercices numéros 4 (*Un compte de fées*) et 6 (*Les randonneurs*).



EYROLLES



Exercice académique numéro 4 (à traiter par tous les candidats)

Un compte de fées

La princesse Clara veut épouser le fils du roi Pierre le Magnifique. Le roi s'oppose au mariage. Il enferme son fils dans une chambre de son château et propose à la princesse le marché suivant :

« Tu n'entreras pas dans le château mais, à partir du premier jour du mois, chaque jour tu pourras faire ouvrir les fenêtres d'une chambre de ton choix. Si le prince mon fils est dans cette chambre, vous vous marierez. Sinon, les fenêtres se refermeront, et tu devras attendre le lendemain pour recommencer. Entretemps, j'aurai fait déplacer mon fils **dans une chambre voisine**. Si, à la fin du mois, tu ne l'as pas trouvé, tu devras partir immédiatement sans te retourner ».

1. Si le château ne possède que trois chambres disposées selon le schéma ci-contre, prouver que la princesse peut trouver le prince en deux jours au plus.

1	2	3
---	---	---

2. Le château possède en réalité 17 chambres disposées selon le schéma

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----	----	----	----	----	----

a. Dans cette question uniquement, on suppose que Clara sait que le prince est initialement dans une chambre de numéro pair. Donner une liste de 15 essais qui permettront à Clara d'atteindre son objectif quels que soient les déplacements ordonnés par le roi.

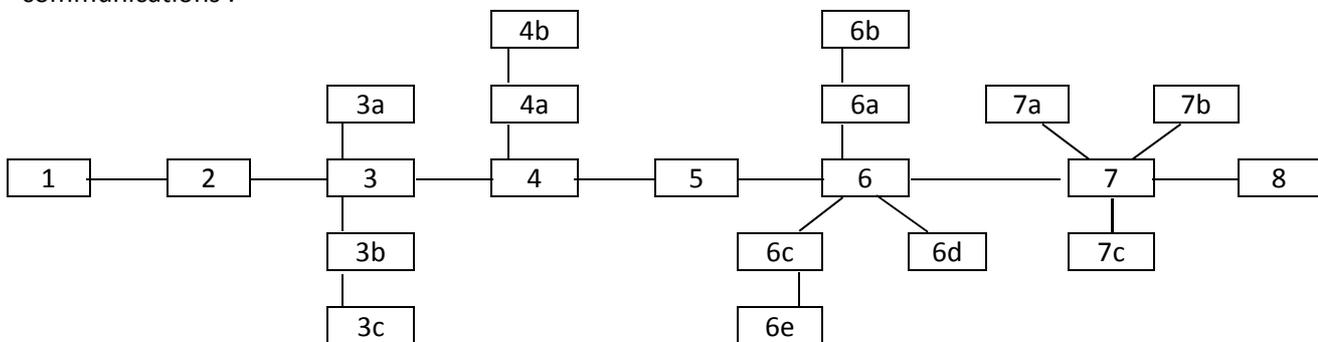
b. Prouver que si la princesse a tout le mois de juin pour trouver le prince, ils se marieront.

3. Dans la même configuration (17 chambres), Clara a décidé à l'avance d'une suite de choix de chambres. Les espions du roi ont connaissance de cette suite, et en informent le roi.

a. Prouver que si, malgré tout, Clara trouve le prince, elle aura fait ouvrir au moins deux fois les fenêtres de chaque chambre autre que les extrêmes 1 et 17.

b. Prouver que le roi peut empêcher le mariage si l'épreuve débute le 1^{er} février.

4. N'ayant pas pensé à la solution précédente, le roi imagine d'enfermer son fils dans un château plus vaste, et dont le plan est plus compliqué. En voici le plan, où figurent les 21 chambres et les couloirs permettant les communications :



Y a-t-il une stratégie permettant à Clara de trouver son prince, malgré les espions du roi et quel que soit le mois qu'il aura choisi ?

Exercice académique numéro 5 (à traiter par les candidats de la série S)

Triangle débordant

On considère un rectangle ABCD. On appelle I le milieu du côté [BC] et J le troisième sommet du triangle équilatéral de côté [AI], I et J étant situés de part et d'autre de la droite (CD).

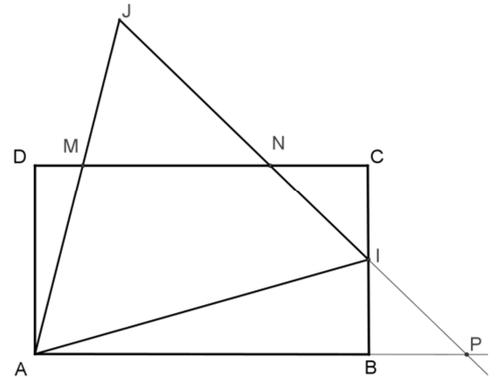
La droite (IJ) coupe la droite (CD) en N et la droite (AB) en P. La droite (AJ) coupe la droite (CD) en M.

On fait l'hypothèse que M est le milieu du segment [AJ].

La figure donnée ci-contre n'est donc pas juste.

1. Quelle fraction de l'aire totale du triangle AIJ représente l'aire de la partie MAIN située à l'intérieur du rectangle ABCD ?

2. Quel est le rapport $\frac{AB}{AD}$ des côtés du rectangle ABCD ?



Exercice académique numéro 6 (à traiter par les candidats des séries autres que S)

Les randonneurs

Didon et son ami Énée participent à une randonnée. Arrêts déduits, le groupe a marché 4,5 heures et parcouru 28 km.

1. Quelle est la moyenne horaire réalisée pendant cette randonnée ?

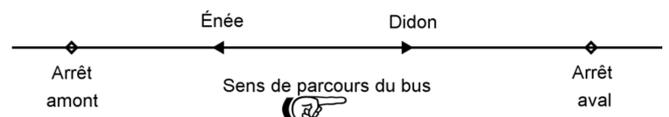
Didon a observé que, pendant chaque heure de marche continue, le groupe a parcouru 6 km.

2. Comment est-ce possible ?

On pourra utiliser un graphique.

À l'issue de la randonnée, Énée et son amie Didon se retrouvent au bord d'une route empruntée par une ligne de bus. « On rentre en bus », dit Énée. Mais quel est l'arrêt le plus proche ? Les deux amis se séparent.

Énée choisit l'arrêt situé en amont, et marche à la vitesse de 6 km/h. Didon marche vers l'arrêt aval, à la vitesse de 4 km/h. Le bus effectue le parcours à la vitesse moyenne de 60 km/h. Les deux amis arrivent chacun à son arrêt exactement en même temps que le bus.



3. Qui avait raison ?