Rédaction possible pour « Opération triangle »

Quelques résultats

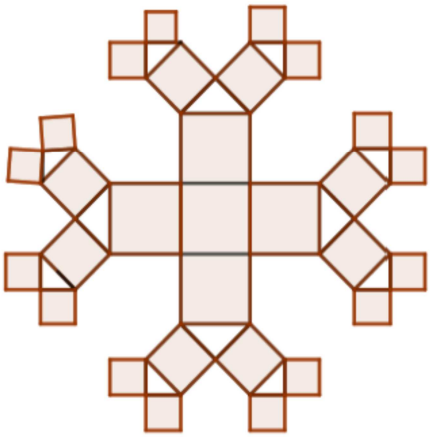
1. ***a.*** $1\Delta 0 = 0\Delta 1 = 2$ (on utilise la règle 2 puis la 1)
$1\Delta 1 = 0\Delta(1\Delta 0) = 0\Delta 2 = 3$ (on utilise la règle 3, le résultat précédent puis la règle 1)
b. $1\Delta 2 = 0\Delta(1\Delta 1) = 0\Delta 3 = 4$
c. Posons, pour tout , $u_n = 1\Delta n$. En appliquant la règle 3 :
$u_{n+1} = 1\Delta(n+1) = 0\Delta(1\Delta n) = 0\Delta u_n = u_n + 1$.
La suite des u_n débute à 0 et augmente d'une unité à chaque pas. C'est une suite arithmétique. On a, pour tout n,
$u_n = n + 2$

2.*a.* $2\Delta 0 = 1\Delta 1 = 3$ (en appliquant la règle 2 et un résultat précédent)
$2\Delta 1 = 1\Delta(2\Delta 0) = 1\Delta 3 = 5$ (en appliquant la règle 3 et le résultat de la question **1.**)
$2\Delta 2 = 1\Delta(2\Delta 1) = 1\Delta 5 = 7$
b. Posons, pour tout n, $v_n = 2\Delta n$ et calculons : $v_{n+1} = 2\Delta(n+1) = 1\Delta(2\Delta n) = 1\Delta v_n = v_n + 2$
La suite des v_n débute à 3 et augmente de deux unités à chaque pas. C'est une suite arithmétique. On a, pour tout n,
$v_n = 2n + 3$.

3.*a.* $3\Delta 0 = 2\Delta 1 = 5$
$3\Delta 1 = 2\Delta(3\Delta 0) = 2\Delta 5 = 13$
$3\Delta 2 = 2\Delta(3\Delta 1) = 2\Delta 13 = 29$
c. Posons cette fois $w_n = 3\Delta n$. On a : $w_{n+1} = 3\Delta(n+1) = 2\Delta(3\Delta n) = 2\Delta w_n = 2w_n + 3$
De $w_{n+1} = 2w_n + 3$, on déduit, pour tout n, $w_{n+1} + 3 = 2(w_n + 3)$
La suite de terme général $w_n + 3$ est une suite géométrique de raison 2. Son premier terme est 8. L'expression de ce terme général est donc : $w_n + 3 = 2^n\,(w_0 + 3)$,
Ce qui donne, pour tout n : $w_n = 8 \times 2^n - 3 = 2^{n+3} - 3$

Illustration

4. L'artiste place dans son motif $3\Delta 0$, puis $3\Delta 1$ carrés. Si on suit le mouvement, on peut placer 16 carrés nouveaux (la différence entre deux termes consécutifs de la suite des w_n est 2^{n+3}) en équilibre au bout des branches du motif. Cela donne le dessin ci-contre :



5. ***a.*** L'aire de la première figure est 5, à laquelle il convient d'ajouter 8 fois l'aire d'un petit carré pour obtenir l'aire de la seconde. Le côté de ces carrés est le côté d'un triangle rectangle isocèle d'hypoténuse 1, c'est-à-dire $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Ces carrés sont donc d'aire $\frac{1}{2}$. Il y en a 8. L'aire de la seconde figure est donc 5 + 4 = 9.
b. Chaque carré extrême donne naissance à deux carrés d'aire moitié, mais comme le nombre de carrés double, c'est cette aire (4, avons-nous dit pour la seconde figure) qui vient s'ajouter à l'aire de la figure précédente.
Conclusion : l'aire de la figure correspondant à $3\Delta n$ s'obtient en ajoutant $4(n-1)$ à l'aire initiale 5, elle est donc $5 + 4(n-1)$.