

Rédaction possible pour « Le mandala de Maryam »

1. Un triangle équilatéral dont les trois côtés sont tangents au cercle a son centre de gravité au centre du cercle, sa hauteur h est donc égale à trois fois le rayon r . Si on appelle a le côté du triangle, $h = a \frac{\sqrt{3}}{2}$, donc $a = \frac{6r}{\sqrt{3}}$.

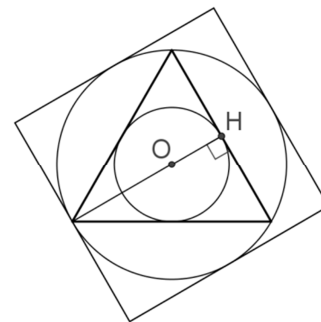
L'aire du triangle équilatéral est $\mathcal{A} = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2} \times \frac{6r}{\sqrt{3}} \times 3r = 3\sqrt{3}r^2$.

Ici, $r = 2$, donc $\mathcal{A} = 12\sqrt{3} \text{ cm}^2$

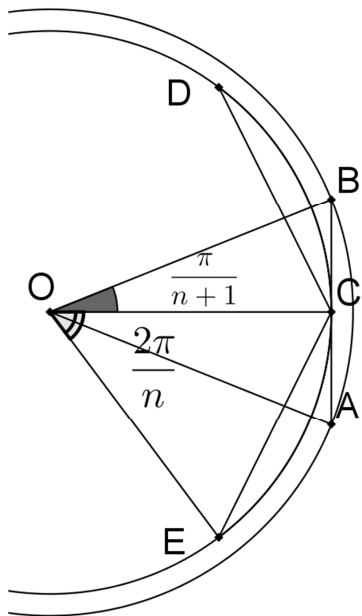
2. Le cercle circonscrit au triangle équilatéral a pour rayon les deux tiers de la hauteur du triangle, c'est-à-dire $\frac{2}{3}h$. Le carré dont les côtés sont tangents au cercle a pour côté de diamètre du cercle, et son aire est le carré de son côté. L'aire du carré est donc :

$$\mathcal{A} = \frac{16}{9}h^2 = 16r^2.$$

Ici, $r = 2$, donc $\mathcal{A} = 64 \text{ cm}^2$



3. a. Dans la figure ci-dessous, le segment [EC] est le côté d'un polygone régulier à n côtés. Il est intercepté par un angle au centre de mesure $\frac{2\pi}{n}$. Le côté [AB] du polygone régulier à $n+1$ côtés défini par le processus suivi est tangent au cercle précédent en C, et est intercepté par un angle au centre de mesure $\frac{2\pi}{n+1}$. Si on appelle R_n le rayon du cercle circonscrit au polygone régulier à n côtés défini par le processus, on a, dans le triangle rectangle OCB, rectangle en C : $R_n = R_{n+1} \times \cos \frac{\pi}{n+1}$, soit $R_{n+1} = R_n \times \frac{1}{\cos \frac{\pi}{n+1}}$



b. L'algorithme est écrit ci-contre. On connaît $R_3 = 4$, et pour afficher R_n , on arrête le compteur à $n-1$ (à l'étape k , c'est R_{k+1} qui est calculé. Pour le cercle circonscrit au polygone régulier à n côtés, la calculatrice affiche une valeur supérieure à 12 (en estimant correct l'arrondi au centième 12,65). Cela fait un diamètre supérieur à 21 cm, on sort de la feuille.

c. On peut modifier l'algorithme précédent en remplaçant la boucle For par une boucle Tant Que. Le neuvième cercle a pour rayon 10,32 cm et le onzième 10,85 cm.

```
R ← 4
Pour k variant de 3 à n - 1, Faire
  R ← R / cos (π / (k+1))
  k ← k+1
Afficher R
```

```
R ← 4
k ← 3
Tant Que R < 10,5 Faire
  R ← R / cos (π / (k+1))
  k ← k+1
Afficher R
```

4. On peut reprendre le premier algorithme pour savoir ce que seraient les rayons du 100^{ème}, du 200^{ème} cercles. Le résultat : le rayon dépasse pour la première fois 16 cm au 59^{ème} cercle, et il n'atteint toujours pas 17 au 200^{ème} (il l'atteint, apparemment, au 212^{ème}, mais on a peut-être un problème de précision). Avec une largeur supérieure à 2 fois 21 cm, le seul problème pour tracer les cercles est de savoir si on saura les distinguer les uns des autres. Les tableaux ci-dessous ont été réalisés avec un tableur.

k	π/k	$\cos (\pi/k)$	Rayon
96	0,0327249	0,99946459	16,5325553
97	0,03238753	0,99947557	16,54123
98	0,03205704	0,99948622	16,5497329
99	0,03173323	0,99949654	16,5580692
100	0,0314159	0,99950656	16,5662436
101	0,03110485	0,99951628	16,5742609
102	0,0307999	0,99952572	16,5821255
103	0,03050087	0,99953488	16,5898416
104	0,0302076	0,99954379	16,5974136
105	0,0299199	0,99955243	16,6048454
106	0,02963764	0,99956084	16,6121408

k	π/k	$\cos (\pi/k)$	Rayon
195	0,01611072	0,99987023	16,9663094
196	0,01602852	0,99987155	16,9684891
197	0,01594716	0,99987285	16,9706469
198	0,01586662	0,99987413	16,9727833
199	0,01578688	0,99987539	16,9748986
200	0,01570795	0,99987663	16,976993
201	0,0156298	0,99987786	16,9790669
202	0,01555243	0,99987906	16,9811205
203	0,01547581	0,99988025	16,9831542
204	0,01539995	0,99988142	16,9851682
205	0,01532483	0,99988258	16,9871629