

# Étude du billard

Laboratoire de mathématiques

30 mai 2019

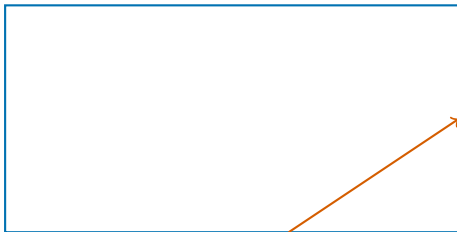
# Introduction

Une bille lancée dans un billard modélisé par un rectangle.



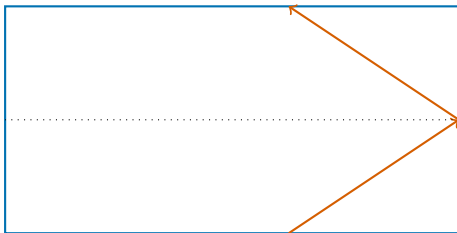
# Introduction

Une bille lancée dans un billard modélisé par un rectangle.



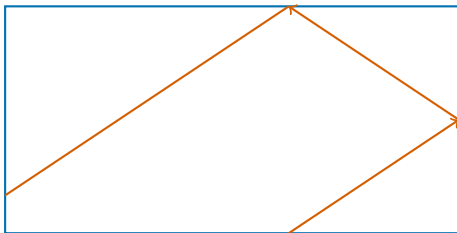
# Introduction

Une bille lancée dans un billard modélisé par un rectangle.



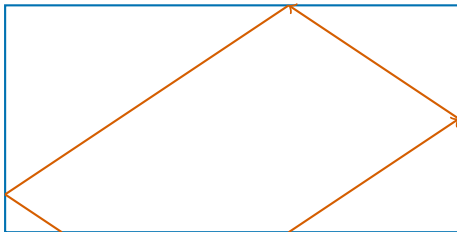
# Introduction

Une bille lancée dans un billard modélisé par un rectangle.



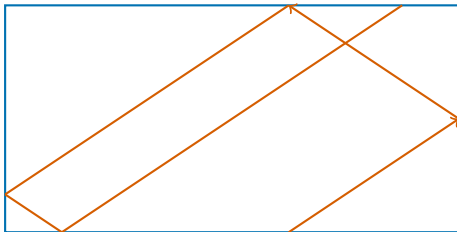
# Introduction

Une bille lancée dans un billard modélisé par un rectangle.



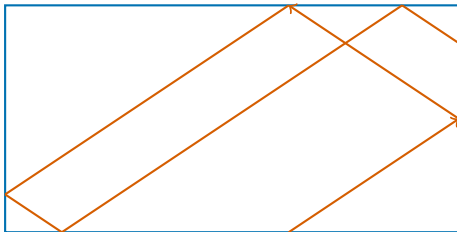
# Introduction

Une bille lancée dans un billard modélisé par un rectangle.



# Introduction

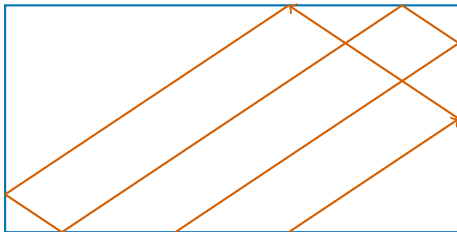
Une bille lancée dans un billard modélisé par un rectangle.





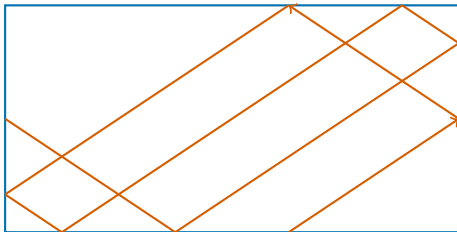
# Introduction

Une bille lancée dans un billard modélisé par un rectangle.



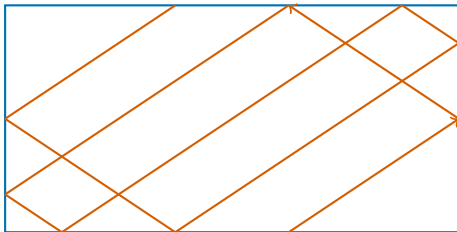
# Introduction

Une bille lancée dans un billard modélisé par un rectangle.



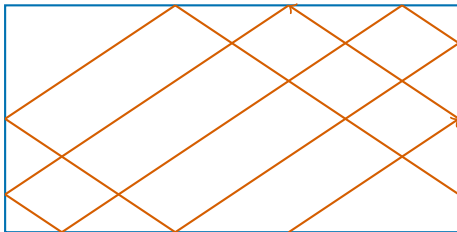
# Introduction

Une bille lancée dans un billard modélisé par un rectangle.



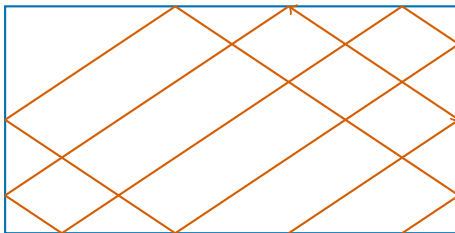
# Introduction

Une bille lancée dans un billard modélisé par un rectangle.



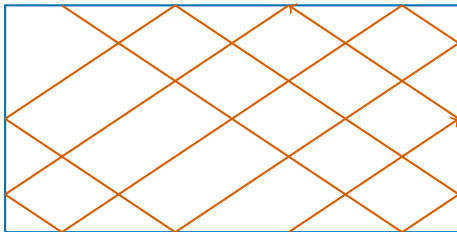
# Introduction

Une bille lancée dans un billard modélisé par un rectangle.



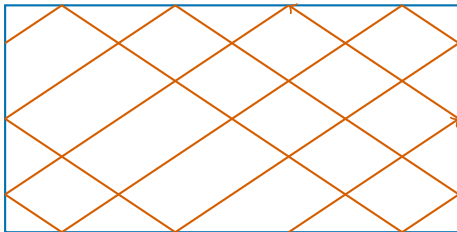
# Introduction

Une bille lancée dans un billard modélisé par un rectangle.



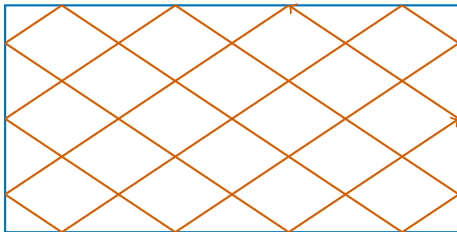
# Introduction

Une bille lancée dans un billard modélisé par un rectangle.



# Introduction

Une bille lancée dans un billard modélisé par un rectangle.





- 1 Introduction
- 2 Activités possibles
  - Règles et rapporteurs
  - GeoGebra
  - Calcul des rebonds
  - Programme Python
  - Synthèse
- 3 Le billard dans l'histoire
- 4 Conclusion



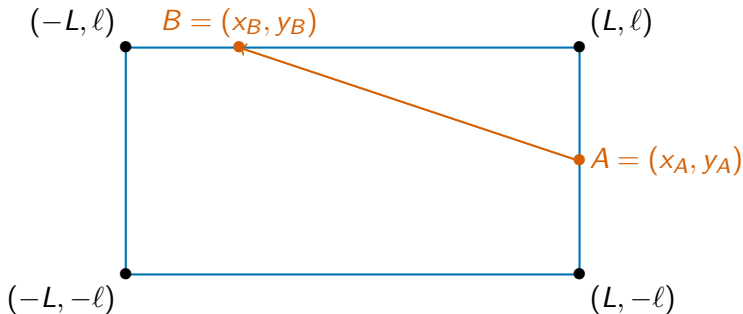
- Établissement de la construction et animation.
- On peut faire varier l'angle de départ de façon interactive.

# Problématique

Comment calculer les coordonnées d'un rebond ?

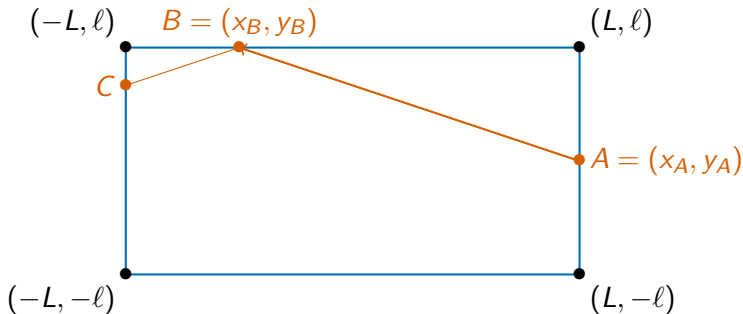
# Problématique

Comment calculer les coordonnées d'un rebond ?



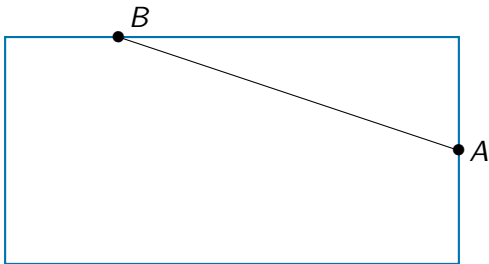
# Problématique

Comment calculer les coordonnées d'un rebond ?

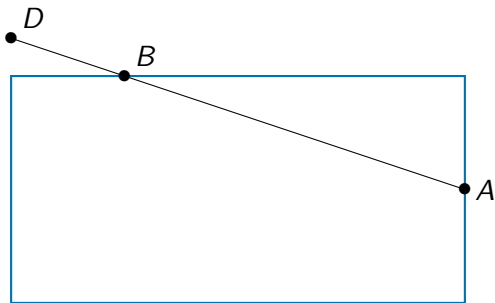


Coordonnées de  $C$  ?

## Méthode 1 : avec le théorème de Thalès

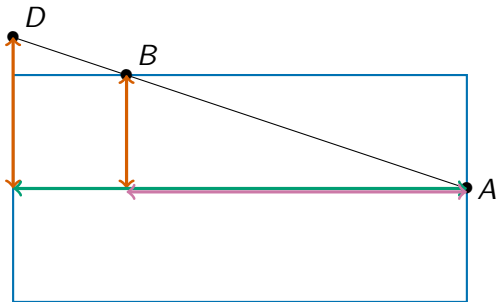


## Méthode 1 : avec le théorème de Thalès

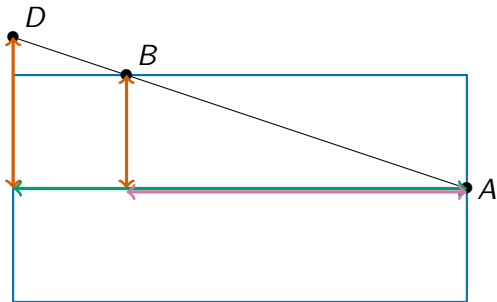




## Méthode 1 : avec le théorème de Thalès

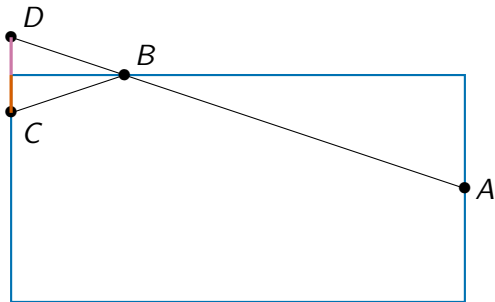


## Méthode 1 : avec le théorème de Thalès



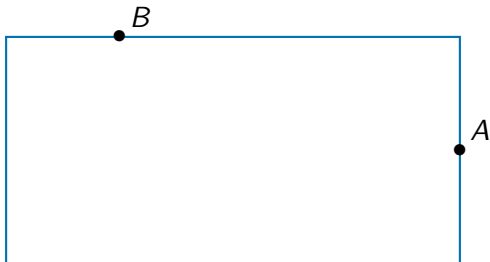
$$\frac{y_D - y_A}{y_B - y_A} = \frac{x_A - x_D}{x_A - x_B}$$

## Méthode 1 : avec le théorème de Thalès

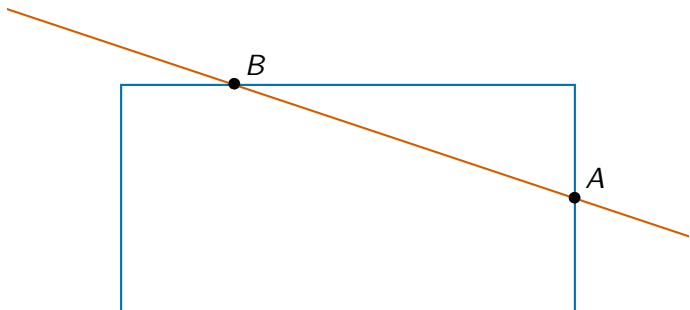


$$\frac{y_C + y_D}{2} = y_B$$

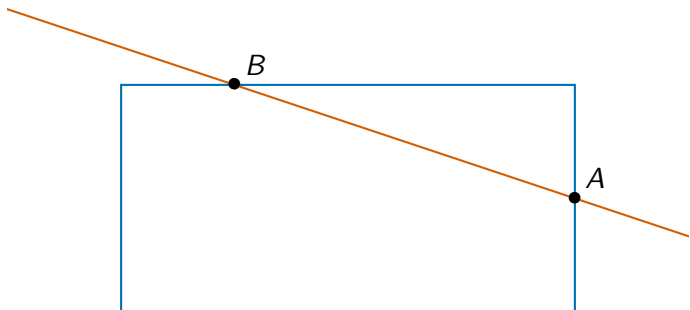
## Méthode 2 : avec les équations de droites



## Méthode 2 : avec les équations de droites

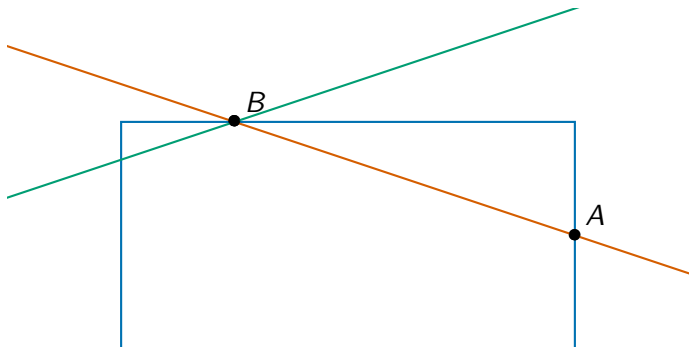


## Méthode 2 : avec les équations de droites



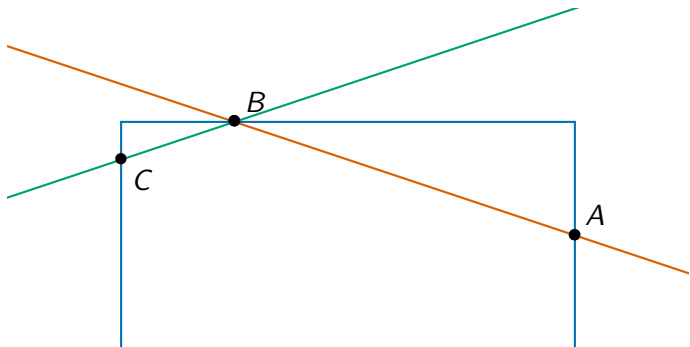
$$y = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_B) + y_B$$

## Méthode 2 : avec les équations de droites



$$y = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_B) + y_B$$
$$y = -\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_B) + y_B$$

## Méthode 2 : avec les équations de droites

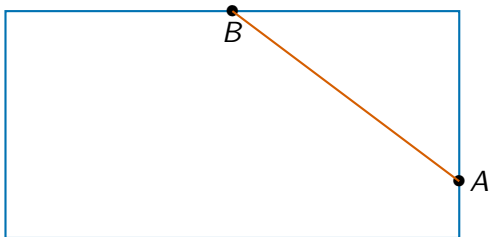


$$y = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_B) + y_B$$

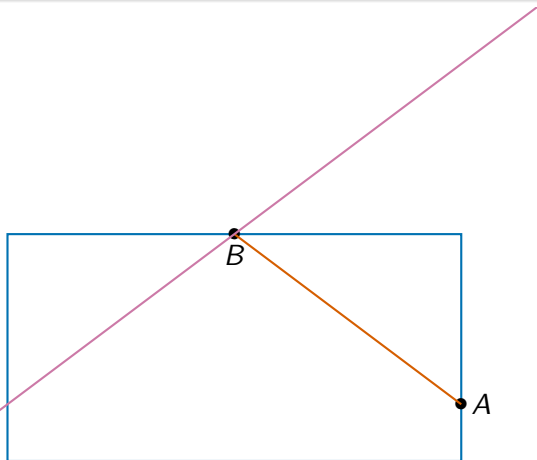
$$y = -\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_B) + y_B$$



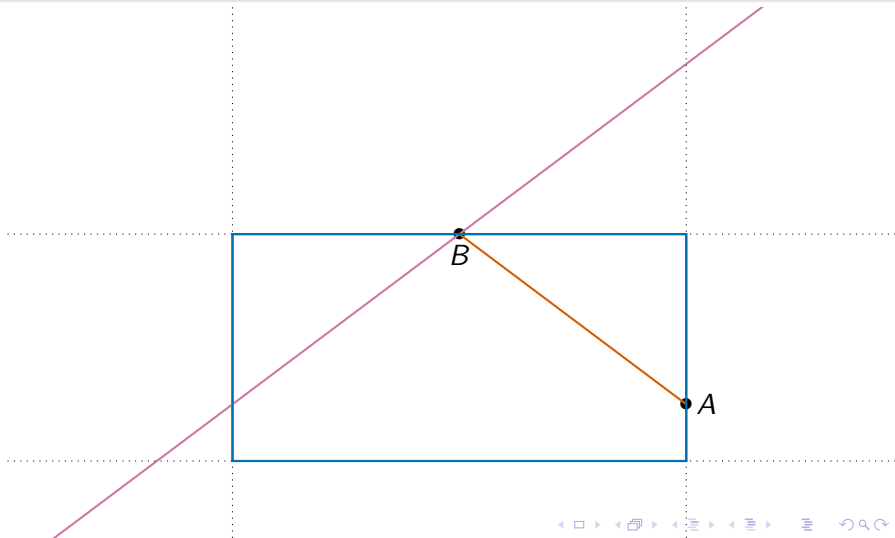
# Principe de programmation



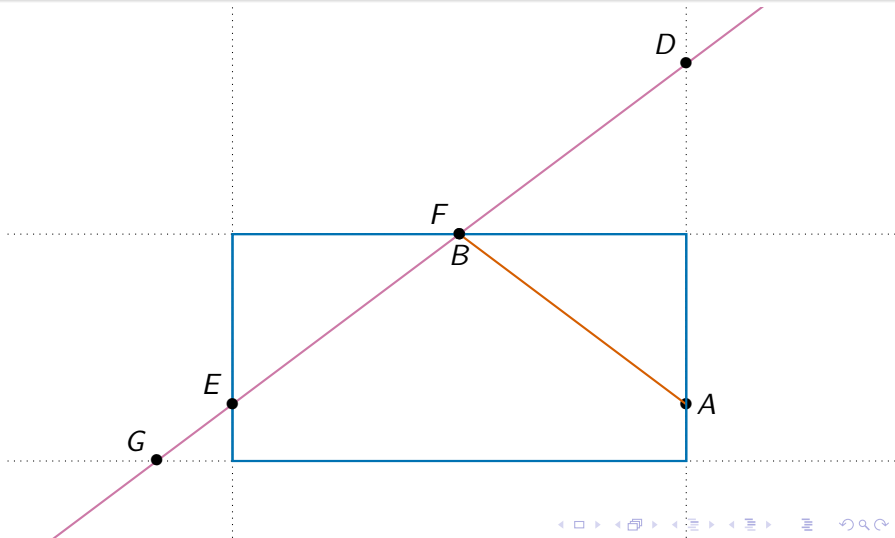
# Principe de programmation



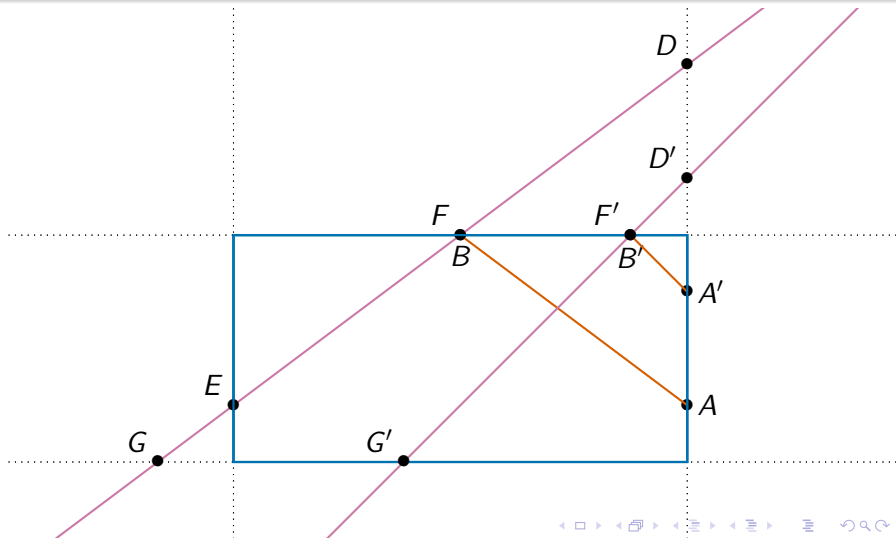
# Principe de programmation



# Principe de programmation



# Principe de programmation



```
from matplotlib.pyplot import *#Paquet qui gère affichage

L=2          #demi-longueur du côté horizontal
l=1          #demi-longueur du côté vertical
A=[0,-1]    #Premier point
B=[L,0.3]   #Deuxième point
N=100       #Nombre de rebonds
plot([L,L,-L,-L,L],[1,-1,-1,1,1], 'b')#Affiche le billard
axis('equal')#Les échelles en x et y sont les mêmes
pause(0.5)
```

```

for k in range(N-1):#À chaque k: calcul du rebond suivant
    plot([A[0],B[0]], [A[1],B[1]], 'r')#Affiche [A,B]
    pause(0.1) # Pause pour voir la trajectoire défiler

D=[L,B[1]-(B[1]-A[1])/(B[0]-A[0])*(L-B[0])]
E=[-L,B[1]-(B[1]-A[1])/(B[0]-A[0])*(-L-B[0])]
F=[B[0]-(B[0]-A[0])/(B[1]-A[1])*(1-B[1]),1]
G=[B[0]-(B[0]-A[0])/(B[1]-A[1])*(-1-B[1]),-1]

A=B    #Avant dernier point de la trajectoire
if D!=A and abs(D[1])<1:#Test si D est dans le segment
    B=D    #B est alors le point du rebond suivant
if E!=A and abs(E[1])<1:#Test si E est dans le segment
    B=E    #B est alors le point du rebond suivant
if F!=A and abs(F[0])<L:#Test si F est dans le segment
    B=F    #B est alors le point du rebond suivant
if G!=A and abs(G[0])<L:#Test si G est dans le segment
    B=G    #B est alors le point du rebond suivant

```

## Quelles activités pour quels niveaux ?

- Billard au rapporteur : collègue



## Quelles activités pour quels niveaux ?

- Billard au rapporteur : collègue
- Utilisation d'un gabarit : école primaire

## Quelles activités pour quels niveaux ?

- Billard au rapporteur : collège
- Utilisation d'un gabarit : école primaire
- Construction de la figure avec GeoGebra : collège/lycée

## Quelles activités pour quels niveaux ?

- Billard au rapporteur : collège
- Utilisation d'un gabarit : école primaire
- Construction de la figure avec GeoGebra : collège/lycée
- Programmation : collège (Scratch), lycée (Python)

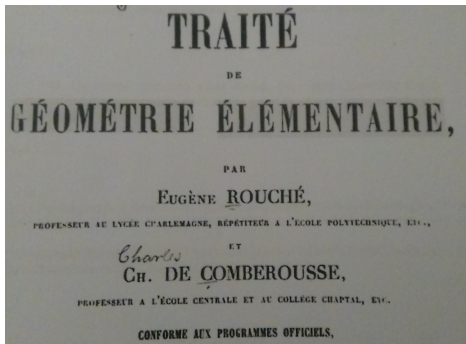
## Quelles activités pour quels niveaux ?

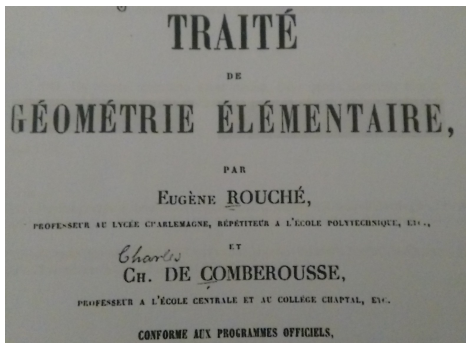
- Billard au rapporteur : collègue
- Utilisation d'un gabarit : école primaire
- Construction de la figure avec GeoGebra : collègue/lycée
- Programmation : collègue (Scratch), lycée (Python)
- Détermination des coordonnées des rebonds : seconde ? première ?

## Quelles activités pour quels niveaux ?

- Billard au rapporteur : collègue
- Utilisation d'un gabarit : école primaire
- Construction de la figure avec GeoGebra : collègue/lycée
- Programmation : collègue (Scratch), lycée (Python)
- Détermination des coordonnées des rebonds : seconde ? première ?
- Exercices théoriques sur le billard : supérieur

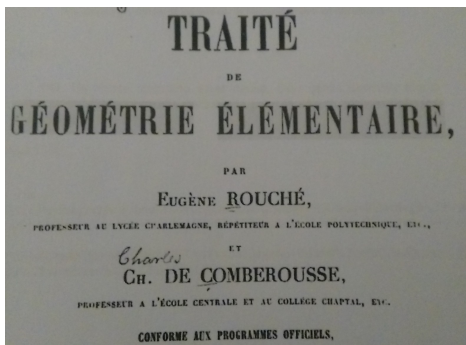
Thème donné en concours et examens depuis le 18<sup>ième</sup> siècle.



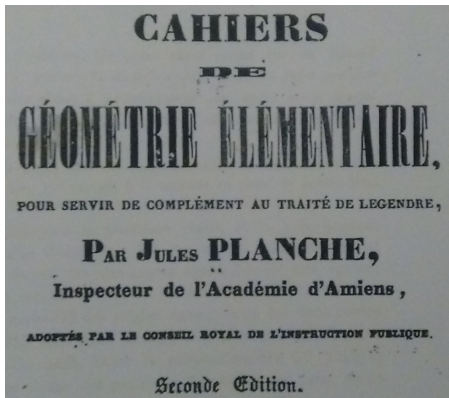


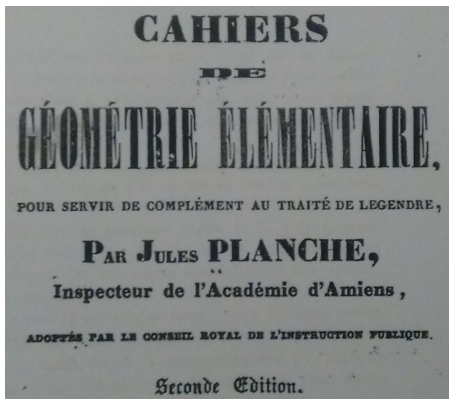
«Sur un billard rectangulaire, dans quelle direction faut-il lancer la bille pour qu'elle revienne au point de départ après avoir frappé successivement les quatre côtés ? Quelle est la longueur du chemin parcouru alors par la bille ?»



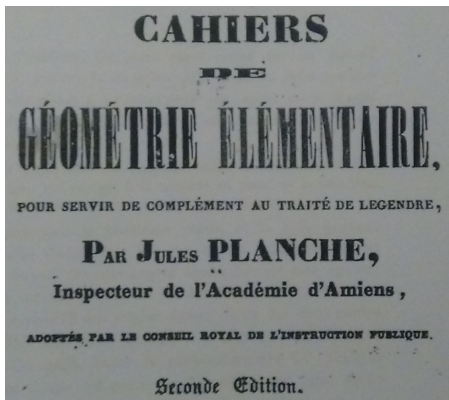


«Un billard circulaire étant donné, dans quelle direction faut-il lancer la bille pour qu'elle revienne au point de départ, après avoir frappé deux fois la bande ?»





*«Un point étant donné sur un billard circulaire, trouver la direction qu'il faudrait faire prendre à une bille placée à ce point pour que, après avoir frappé deux fois à la bande circulaire, elle vienne repasser par le même point.»*



Une solution est même proposée. Malheureusement, le temps nous a manqué pour la comprendre.

## Une continuité ?

- Donc : présence dans les manuels d'enseignement au 18<sup>ième</sup> siècle.
- Oraux de concours au début du 19<sup>ième</sup> siècle.

## Une continuité ?

- Donc : présence dans les manuels d'enseignement au 18<sup>ième</sup> siècle.
- Oraux de concours au début du 19<sup>ième</sup> siècle.
- Manuels actuels, exemple : livre de 6<sup>ième</sup>.
- Oraux de concours de recrutement d'enseignement actuels.

- Déclinable à plusieurs niveaux.

- Déclinable à plusieurs niveaux.
- Utilisation de l'outil informatique (GeoGebra/Scratch/Python)



- Déclinable à plusieurs niveaux.
- Utilisation de l'outil informatique (GeoGebra/Scratch/Python)
- Codes informatiques et présentation en ligne sur le blog du labo de maths.

<http://blog.ac-versailles.fr/labomathsessouriau/>

- Déclinable à plusieurs niveaux.
- Utilisation de l'outil informatique (GeoGebra/Scratch/Python)
- Codes informatiques et présentation en ligne sur le blog du labo de maths.  
<http://blog.ac-versailles.fr/labomathsessouriau/>
- Lien avec l'histoire des maths et l'histoire de l'enseignement des maths au travers d'exercices donnés en examens.

- Déclinable à plusieurs niveaux.
- Utilisation de l'outil informatique (GeoGebra/Scratch/Python)
- Codes informatiques et présentation en ligne sur le blog du labo de maths.  
<http://blog.ac-versailles.fr/labomathsessouriau/>
- Lien avec l'histoire des maths et l'histoire de l'enseignement des maths au travers d'exercices donnés en examens.
- Lien avec la recherche actuel : système dynamique.