ACADÉMIE
DE VERSAILLES
Liberté
Égalité
Fraternité

Versailles
Lycée Marie Curie

Pontoise
Lycée Camille Pissarro

Terence TAO (né en 1975), le plus grand mathématicien du monde ?

De nombreuses vidéos célèbrent Terence TAO, mathématicien australien d'origine Chinoise, à présent professeur à l'université de Los Angeles (UCLA). « Plus grand mathématicien du monde, homme doté du plus grand QI qui soit au monde, … » les superlatifs ne manquent pas pour le qualifier.

À huit ans, il atteint un score presque maximal au test d'entrée à l'université ; présenté à l'Olympiade internationale de mathématiques, il obtient une médaille de bronze, puis une médaille d'argent puis une médaille d'or à treize ans. Sa réputation est déjà bien établie (sur la photo, on le voit conversant avec Paul Erdös, mathématicien hongrois). Il devient rapidement le plus jeune professeur nommé à UCLA (à 21 ans). Ses travaux mathématiques portent sur des sujets très divers. « On a dit de David Hilbert qu'il connaissait toutes les mathématiques, mais Tao est capable de produire des mathématiques de niveau extrêmement élevé sur des sujets qu'il vient de découvrir ».

Ses travaux ont été couronnés au niveau international, par exemple par la médaille Fields, mais son rayonnement dépasse le public des congrès de mathématiciens. Il assume cette réputation avec modestie, participant sur son *blog* à bien des débats, donnant son avis sur l'enseignement des mathématiques ou les directions prises par la recherche. Il s'est exprimé sur les mesures budgétaires prises récemment par l'administration des États-Unis : « Mais il est également important d'avoir une discussion plus ouverte sur le rôle et la valeur de la science dans le monde d'aujourd'hui, et de ne pas permettre à ceux qui s'opposent à ces rôles de dominer le récit et de normaliser leurs actions extraordinaires et sans précédent. Dans le passé plus tranquille, je me contentais moi-même de me concentrer en grande partie sur les aspects techniques ou personnels de mes propres recherches, de mon enseignement et de mon mentorat, et de laisser le débat politique et l'activisme plus larges à d'autres ; mais dans notre environnement actuel, où même les activités les plus bénignes sont sujettes à des perturbations capricieuses et à des ingérences politiques, le luxe du désengagement n'est plus une option viable ».

Stage ouvert aux lycéennes et lycéens de terminale candidat(e)s au Concours général , les 23 et 24 février 2026

La Pépinière académique de mathématique organise, bénévolement, des regroupements d'élèves désignés par leurs établissements. Quatre niveaux sont habituellement concernés : les collégiens de troisième en octobre, les lycéens de première en décembre, les lycéens de terminale présentés au concours général en février et les lycéens de seconde en avril.
La Pépinière s'est assurée du concours de partenaires qui hébergent ou ont hébergé nos stages : l'INRIA, l'université de Versailles Saint Quentin en Yvelines, le lycée Camille Pissarro de Pontoise, le collège Paul Fort de Montlhéry, le collège François Furet à Antony, le lycée Vallée de Chevreuse à Gif sur Yvette, le lycée La Bruyère, le lycée Marie Curie et le lycée Hoche de Versailles. Elle a reçu le soutien de l'Institut de hautes études scientifiques de Bures-sur-Yvette.
Les élèves sont désignés et recensés par leurs établissements, parce que l'éducation nationale est responsable des élèves qui lui sont confiés, et donc des projets et des actions auxquels ils sont invités à participer. Une appétence et un répondant minimum sont attendus des élèves.

Le secrétariat opérationnel : Frédérique CHAUVIN, rectorat de Versailles

Les inspectrices et inspecteurs : Luca AGOSTINO, Karim AKEB**,** Nicolas FIXOT, Xavier GABILLY, Catherine GUFFLET, Catherine HUET, Éric LARZILLIÈRE, , Nicolas RAMBEAUD, Jean-François REMETTER, Charles SEVA, Christine WEILL et les retraités Anne ALLARD, Pierre MICHALAK, Évelyne ROUDNEFF

Les intervenants professeurs : Jeanne BESSON (lycée Alexandre Dumas, SAINT CLOUD), Christophe DEGUIL (Lycée Notre Dame, SAINT GERMAIN EN LAYE), Manon DELOISON (lycée Edmond Michelet, ARPAJON), Jérôme FRECKHAUS (lycée Les Sept Mares, MAUREPAS), Chloé MAROTEAUX (lycée Jules-Hardouin Mansart, SAINT CYR L'ECOLE), Pierre MONTPERRUS (Lycée Jeanne d'Albret, SAINT GERMAIN EN LAYE), Sébastien MOULIN (Lycée Jules Ferry, VERSAILLES), Julien PROUVEZE (lycée La Trinité, NEUILLY SUR SEINE), François REGUS (Lycée Viollet-le-Duc, VILLIERS SAINT FREDERIC), Anthony SAINT-CRIQ (lycée Geoffroy Saint Hilaire, ETAMPES)

Professeurs accompagnants : David CORLIN MARCHAND (lycée Émilie de Breteuil, MARLY LE ROI), Sacha DHENIN (lycée Franco-allemand, BUC)

Emploi du temps

Lundi 23 février 2026

	Groupe 1	Groupe 2	Groupe 3
10 heures	Accueil		
10 h 10	Arithmétique SM + JF	Suites MD + CM	Géométrie PM
12 h 10	Repas		
13 heures	Fonctions CD	Arithmétique SM + JF	Suites MD + CM
15 h 15	Film / Exposé		

Mardi 24 février 2026

	Groupe 1	Groupe 2	Groupe 3
10 heures	Suites JB + ASC	Fonctions CD	Probabilités FR + JP
12 heures	Repas		
12 h 50	Probabilités FR + JP	Géométrie PM	Fonctions CD
15 heures	Géométrie PM	Probabilités FR + JP	Arithmétique JF + JB

Arithmétique - Nombres

Exercice 1

1. Montrer qu'on ne peut pas trouver deux entiers naturels a et b tels que $3a^2 - b^2 = 10$.

2. **a.** Démontrer que le carré d'un entier est congru à 0, 1 ou 4 modulo 8.

b. Démontrer que si les longueurs des côtés et de la diagonale d'un rectangle sont des entiers alors l'aire du rectangle est divisible par 12.

1. Dans la division euclidienne de b par 3, il existe deux entiers k et r tels que $b = 3k + r$ et $0 \leq r < 3$.
Si $r = 0$, alors b est un multiple de 3, il en est de même du membre de gauche de l'égalité qui ne peut donc être vérifiée puisque 10 n'est pas un multiple de 3.
Si $r = 1$, alors $b^2 = 9k^2 + 6k + 1$. Le membre de gauche est donc congru à -1 modulo 3, ce qui n'est pas le cas de 10.
Si $r = 2$, alors $b^2 = 9k^2 + 12k + 4$. Le membre de gauche est donc encore congru à -1 modulo 3, ce qui n'est pas le cas de 10.
On ne peut donc trouver deux entiers naturels a et b tels que $3a^2 - b^2 = 10$.

2. **a.** Pour tout entier n il existe deux entiers k et r tels que $n = 8k + r$ et $0 \leq r \leq 7$.
Alors $n^2 = 64k^2 + 16k + r^2$ et $n^2 \equiv r^2$ modulo 8.
Or, modulo 8 :
$0^2 = 0 \equiv 0, 1^2 = 1 \equiv 1, 2^2 = 4 \equiv 4, 3^2 = 9 \equiv 1, 4^2 = 16 \equiv 0, 5^2 = 25 \equiv 1, 6^2 = 36 \equiv 4, 7^2 = 49 \equiv 1.$
Plus précisément, si n est impair alors $n^2 \equiv 1$ modulo 8.

b. Soit x, y les longueurs des côtés et z la longueur de la diagonale. On sait donc que $x^2 + y^2 = z^2$.
On a vu dans la question 1. que le carré de tout entier est soit multiple de 3 soit congru à 1 modulo 3. Si aucun des entiers x, y n'est multiple de 3 alors $x^2 + y^2$est congru à 2 et ne peut donc être le carré d'un entier. Donc l'un au moins des nombres x, y est multiple de 3 et le produit xy est déjà multiple de 3.
Si x et y sont pairs ou si x ou y est multiple de 4 alors xy est multiple de 4.
Sinon, comme le problème est symétrique par rapport à x et y, supposons que x est impair et y n'est pas multiple de 4. Alors il existe un entier k et un entier r tel que $y = 4k + r$ et $1 \leq r \leq 3$.
Si $r = 1$ ou $r = 3$ alors x et y sont impairs et, modulo 8, $x^2 + y^2 \equiv 1 + 1 = 2$ alors que z^2 est congru à 0, 1 ou 4 modulo 8. Ce cas est donc impossible.
Si $r = 2$ alors, modulo 8, $x^2 + y^2 = x^2 + 16k^2 + 16k + 4 \equiv 1 + 4 = 5$ alors que z^2 est congru à 0, 1 ou 4 modulo 8. Ce cas est donc impossible.
On en déduit que x et y sont pairs ou x ou y est multiple de 4 et donc xy est multiple de 4.
Comme 3 et 4 sont premiers entre eux, l'aire du rectangle est bien un multiple de 12.

Exercice 2

Déterminer trois nombres premiers p, q, r tels que $pq + 4 = r^4$.

On cherche donc trois nombres premiers p, q, r tels que $pq = (r^2 - 2)(r^2 + 2)$ ce qui signifie, puisque p et q sont des nombres premiers que $r^2 - 2$ vaut 1 ou pq ou p ou q.
$r^2 - 2 = 1$ signifie $r^2 = 3$ ce qui ne convient pas.
$r^2 - 2 = pq$ signifie que $r^2 + 2 = 1$ ce qui est impossible.
Sans nuire à la généralité de la solution, on peut supposer que $p \leq q$.
On a donc à résoudre le système $\begin{cases} r^2 - 2 = p \\ r^2 + 2 = q \end{cases}$. Ce système implique $q - p = 4$.

<u>1ère méthode :</u>
Si $p = 2$ alors $q = 6$ qui n'est pas un nombre premier et si $p = 3$ alors $r^2 = 5$ ce qui n'est pas un carré parfait donc $p > 3$. Alors p est impair non multiple de 3 donc il existe un entier k tel que $p = 6k \pm 1$.
Si $p = 6k - 1$ alors $q = 6k + 3$ qui est un multiple de 3 donc n'est premier que si $k = 0$ ce qui est impossible car $q \geq p > 3$. Donc $p = 6k + 1$ alors $q = 6k + 5$ et $2r^2 = p + q = 6(2k + 1)$ d'où r^2 est un multiple de 3 ce qui n'est possible puisque r est un nombre premier, que si $r = 3$. On a alors $p = 7$ et $q = 11$.
On vérifie que dans ce cas $pq + 4 = 7 \times 11 + 4 = 81 = 3^4$.

Au final, le problème a deux solutions (7,11,3) et (11,7,3).

2e méthode :

On va raisonner sur q modulo 3. Comme un carré ne peut valoir que 0 ou 1 modulo 3 (vu dans l'exercice 1), si $r \neq 3$, comme r est premier, il n'est pas congru à 0 mod 3, et son carré non plus, de sorte que $r^2 \equiv 1$ mod 3.

Alors $q = r^2 + 2$ est divisible par 3, et premier, donc égal à 3, ce qui est absurde, car on aurait alors $r = 1$, qui n'est pas premier. Cela prouve que $r = 3$, et on obtient $p = 7$ et $q = 11$.

Exercice 3

Déterminer toutes les paires (a, b) d'entiers strictement positifs tels que a^3 est un multiple de b^2 et $b - 1$ est un multiple de $a - 1$.

- Si $b < a$, alors la seule possibilité pour que $b - 1$ soit un multiple de $a - 1$ est que $b - 1 = 0$ soit $b = 1$. Alors tout entier strictement positif a conviendra.
- Si $b \geq a$, alors comme a^3 est un multiple de b^2, il existe un entier k tel que $a^3 = kb^2$.
  On va raisonner modulo $a - 1$. On a alors $a \equiv 1$ et $b \equiv 1$ puisque $b - 1$ est un multiple de $a - 1$.
  Donc, toujours modulo $a - 1$, $1 \equiv a^3 = kb^2 \equiv k$.
  - si $k < a$, à nouveau, la seule possibilité est $k = 1$ d'où $a^3 = b^2$ ce qui n'est possible que s'il existe un entier c tel que $a = c^2$ et $b = c^3$. $b - 1$ multiple de $a - 1$ se traduit alors par $c^3 - 1$ multiple de $c^2 - 1$ soit $(c-1)(c^2 + c + 1)$ multiple de $(c-1)(c+1)$ soit $c^2 + c + 1$ multiple de $c + 1$. Or ceci est impossible car $c^2 + c + 1 = c(c+1) + 1$.
  - si $k \geq a$, alors $kb^2 \geq ab^2 \geq a^3$. Or $a^3 = kb^2$ donc les inégalités sont en fait des égalités et $k = a = b$. Les couples (a, a) sont évidemment bien solutions.

Conclusion : les couples solutions du problème sont les couples $(a, 1)$ et (a, a) où a est un entier strictement positif quelconque.

Exercice 4

Peut-on trouver des entiers premiers p et q et un entier naturel non nul m tels que : $2^m p^2 + 1 = q^7$?

Comme $2^m p^2 + 1 = q^7$, on peut affirmer q est un nombre premier impair.

De plus l'égalité donnée s'écrit $2^m p^2 = q^7 - 1$ soit $2^m p^2 = (q-1)(q^6 + q^5 + q^4 + q^3 + q^2 + q + 1)$.

On déduit de ces deux remarques que $q^6 + q^5 + q^4 + q^3 + q^2 + q + 1$ est un nombre impair qui ne peut donc être divisible par 2.

Donc $(q-1)$ est un multiple de 2^m. Il existe donc un enter k tel que $q - 1 = 2^m k$.

Alors $p^2 = k(q^6 + q^5 + q^4 + q^3 + q^2 + q + 1)$. Le nombre p^2 ne peut être que le produit de p par p ou le produit de lui-même par 1.

Or $k \leq q - 1 < q + 1 < q^6 + q^5 + q^4 + q^3 + q^2 + q + 1$ donc $k = 1$

d'où $q = 2^m + 1$ et $p^2 = q^6 + q^5 + q^4 + q^3 + q^2 + q + 1$.

1ère méthode :

De plus $p^2 = \frac{q^7-1}{q-1} = \frac{(2^m+1)^7 - 1}{2^m} = \frac{1}{2^m}\left(\sum_{k=0}^{k=7}\binom{7}{k}2^{km} - 1\right) = \frac{1}{2^m}\left(2^{7m} + 7 \times 2^{6m} + \cdots + \binom{7}{5}2^{2m} + 7 \times 2^m + 1 - 1\right)$

soit $p^2 = 2^{6m} + 7 \times 2^{5m} + \cdots \binom{7}{5}2^m + 7$. Il existe donc un entier h tel que $p^2 = 2^m h$+ 7 soit $p^2 - 7 = 2^m h$ Si $m \geq 2$, alors 4 divise $p^2 - 7$. Or soit $p = 2$ et alors $p^2 - 7 = -3$ qui n'est pas divisible par 4, soit p est impair et il existe k tel que $p = 2k + 1$ mais alors $p^2 - 7 = 4(k^2 + k) - 6$ qui n'est pas divisible par 4.

La seule valeur possible pour m est donc 1 mais alors $q = 3$ et $p^2 = 1\,093$ alors que 1 093 n'est pas un carré parfait

Il n'y a donc pas de solution.

2e méthode :

Si $m = 1$ alors $q = 3$ et $p^2 = 1\,093$ alors que 1 093 n'est pas un carré parfait. Donc $m \geq 2$.

Dans ce cas, comme $q = 2^m + 1$, $q \equiv 1$ mod 4. De même pour ses puissances. Donc $q^6 + q^5 + q^4 + q^3 + q^2 + q + 1 \equiv 7$ mod 4, soit $p^2 \equiv 3$ mod 4. Or ceci est impossible car on vérifie facilement qu'un carré est congru à 0 ou à 1 modulo 4. Il n'y a donc pas de solution.

Exercice 5

Maxime a choisi quatre chiffres deux à deux distincts a, b, c, d parmi l'ensemble des chiffres de 1 à 9 et écrit les six entiers de deux chiffres $\overline{ac}, \overline{ba}, \overline{cd}, \overline{da}, \overline{db}, \overline{dc}$. Leur somme est égale à l'entier $\overline{cab}$ et le produit de deux d'entre eux est égal à l'entier $\overline{abcd}$. Quels sont les quatre chiffres choisis par Maxime ?

La phrase « leur somme est égale à l'entier $\overline{cab}$ » se traduit par l'égalité :
$(10a + c) + (10b + a) + (10c + d) + (10d + a) + (10d + b) + (10d + c) = 100c + 10a + b$
soit $2a + 10b - 88c + 31d = 0$. Comme $2a + 10b - 88c$ est un entier pair, on en déduit que d est un nombre pair.
Comme il est de plus compris entre 1 et 9, les valeurs qu'il peut prendre sont 2, 4, 6 et 8.
Alors $2a + 10b + 31d \leq 2a + 10b + 248$. Or $2a + 10b \leq 2 \times 9 + 10 \times 9$ soit $2a + 10b < 108$. donc affirmer que $2a + 10b + 31d < 356$.
Comme $2a + 10b + 31d = 88c$, on en déduit que $88c < 356$ d'où c ne peut prendre que les valeurs 1, 2, 3 ou 4.

- Si $c = 4$ alors $2a + 10b + 31d = 352$.
  Or, comme $d \leq 8$, $2a + 10b + 31d \leq 2a + 10b + 248$ soit $352 \leq 2a + 10b + 248$ d'où $2a + 10b \geq 104$ et la seule solution est $a = 7$ et $b = 9$. L'entier $\overline{abcd}$ est alors 7 948.
- Si $c = 3$ alors $2a + 10b + 31d = 264$.
  - pour $d = 8$, on obtient $2a + 10b = 16$ et la seule possibilité est $b = 1$ *et* $a = 3 = c$, ce qui ne convient pas.
  - pour $d = 6$, on obtient $2a + 10b = 78$ et les seules possibilités sont $b = 6 = d, a = 9$, ce qui ne convient pas ou $b = 7, a = 4$. L'entier $\overline{abcd}$ est alors 4 736.
  - pour $d \leq 4$, on obtient $2a + 10b \geq 140$ ce qui est impossible puisque a et b sont strictement inférieurs à 10.
- Si $c = 2$ alors $2a + 10b + 31d = 176$
  - pour $d = 8$ ou $d = 6$, $31d > 176$ donc c'est impossible
  - pour $d = 4$, on obtient $2a + 10b = 52$ et les seules possibilités sont $b = 4 = d, a = 6$, ce qui ne convient pas ou $b = 5, a = 1$. Le nombre obtenu est 1 524.
  - pour $d = 2$, on obtient $2a + 10b = 114$ ce qui est impossible car $2a + 10b < 108$.
- Si $c = 1$ alors $2a + 10b + 31d = 88$
  - pour $d > 2$, $2a + 10b \leq 88 - 3 \times 31$ ce qui est impossible car $88 - 3 \times 31 < 0$
  - pour $d = 2$, on obtient $2a + 10b = 26$ et les seules possibilités sont $b = 1 = c, a = 8$, ce qui ne convient pas ou $b = 2 = d, a = 3$ ce qui ne convient pas non plus.

Les seuls entiers vérifiant la condition « leur somme est égale à l'entier $\overline{cab}$ » sont donc les entiers 1 524, 7 948 et 4 736.
On s'intéresse maintenant à la condition « le produit de deux d'entre eux est égal à l'entier $\overline{abcd}$ ».
$1\,524 = 2^2 \times 3 \times 127$. Or 127 est un nombre premier. Donc 1 524 ne convient pas.
$7\,948 = 4 \times 1\,987$. Or 1 987 est un nombre premier. Donc 7 948 ne convient pas.
$4\,736 = 2^7 \times 37$ donc le seul produit de deux facteurs de deux chiffres donnant 4 736 est $64 \times 74 = \overline{da} \times \overline{ba}$
Les chiffres choisis par Maxime sont donc 4, 7, 3, 6.

Exercice 6

Soit p, q, r, s quatre nombres premiers tels que $5 < p < q < r < s < p + 10$.
Démontrer que la somme de ces quatre nombres premiers est divisible par 60.

Comme le nombre premier p est strictement supérieur à 5, il ne peut être multiple de 3 donc il existe un entier k tel que $p = 3k + 1$ ou $p = 3k + 2$.

- Si $p = 3k + 1$ alors $3k$ est pair donc parmi les entiers (compris strictement entre p et $p + 10$), $3k + 2, 3k + 3, 3k + 4, 3k + 5, 3k + 6, 3k + 7, 3k + 8, 3k + 9, 3k + 10$ seuls $3k + 5, 3k + 7$ peuvent être premiers. On ne peut donc pas trouver trois nombres entiers q, r, s solutions du problème.
- Si $p = 3k + 2$ alors $3k$ est impair donc parmi les entiers $3k + 3, 3k + 4, 3k + 5, 3k + 6, 3k + 7, 3k + 8, 3k + 9, 3k + 10, 3k + 11$, seuls $3k + 4, 3k + 8, 3k + 10$ (les autres sont pairs ou multiples de 3).

La seule possibilité est donc $p = 3k + 2, q = 3k + 4 = p + 2, r = 3k + 8 = p + 6, s = 3k + 10 = p + 8$.
Alors $p + q + r + s = 12k + 24 = 12(k + 2)$. La somme $p + q + r + s$ doit donc être un multiple de 12.
Comme $60 = 5 \times 12$ et 5 et 12 sont premiers entre eux, on étudie donc maintenant la divisibilité par 5.

1ère méthode :

La division euclidienne de p par 5 permet d'écrire qu'il existe deux entiers m et r tels que $p = 5m + u$ et $0 \leq u < 5$ et alors $q = p + 2 = 5m + u + 2, r = p + 6 = 5m + u + 6, s = p + 8 = 5m + u + 8$ d'où $p + q + r + s = 20m + 4u + 16$.

- si $u = 0$, alors p n'est pas premier. C'est donc impossible ;
- si $u = 1$, alors $p + q + r + s = 20m + 20$ qui est bien un multiple de 5 ;
- si $u = 2$, alors $s = 5m + 10$ qui n'est pas un nombre premier ;
- si $u = 3$, alors $q = 5m + 5$ qui n'est pas un nombre premier ;
- si $u = 4$, alors $r = 5m + 10$ qui n'est pas un nombre premier.

2e méthode :

Dans l'écriture décimale des nombres premiers p, q, r, s, le chiffre des unités ne peut être que 1, 3, 7 ou 9 (nombres impairs non multiples de 5). Comme $p < q < r < s < p + 10$, la somme de ces chiffres des unités est donc $1 + 3 + 7 + 9 = 20$. le chiffre des unités de la somme $p + q + r + s$ est donc 0, ce qui implique que cette somme est divisible par 5.

Conclusion : la seule possibilité est pour $u = 1$ et dans ce cas on a bien $p + q + r + s$ multiple à la fois de 12 et de 5 et donc de 60.

Exercice 7

Déterminer le minimum de la somme $m + n$ où m et n sont deux entiers naturels non nuls tels que 2 022 divise $m + 2\,026n$ et 2 026 divise $m + 2\,022n$.

2 022 divise $m + 2\,026n$ et 2 026 divise $m + 2\,022n$ signifie qu'il existe deux entiers k et k' tels que :
$\begin{cases} m + 2026n = 2022k \\ m + 2022n = 2026k' \end{cases}$ soit $\begin{cases} m + 4n = 2022(k - n) \\ m - 4n = 2026(k' - n) \end{cases}$

Cela revient à dire qu'il existe deux entiers a et b tels que : $\begin{cases} m + 4n = 2022a \\ m - 4n = 2026b \end{cases}$

Par combinaison, on obtient : $4n = 1011a - 1013b$ (E)

Modulo 4, $1011 \equiv -1$ et $1013 \equiv 1$ et l'équation (E) est équivalente à : $-a - b \equiv 0$, soit $a + b \equiv 0$

Par ailleurs, on a : $\begin{cases} 4n = 1011a - 1013b \\ m = 1011a + 1013b \end{cases}$ D'où $m + n = 1011a + 1013b + \frac{1011a - 1013}{4}$

Il nous reste à chercher les plus petites valeurs de a et de b qui fonctionnent sachant que $a + b$ est un multiple de 4 et $a + b \geq 0$ (car $a + b = m(\frac{1}{2022} + \frac{1}{2026}) + 4n(\frac{1}{2022} - \frac{1}{2026})$).

1er cas : $a + b = 0$

L'équation (E) s'écrit alors : $4n = 1011a + 1013a = 2024a$

Par suite, $n = 506a$ et $m = -2a$

C'est impossible puisque m est un entier naturel, cela imposerait $a \leq 0$ puis $n \leq 0$, ce qui contredit à la nature de n sauf à choisir $n = 0$

2ème cas : $a + b = 4$

- $a = 1$ et $b = 3$: dans ce cas, $4n = 1011 - 3039$. C'est impossible puisque $n \geq 0$.
- $a = 2$ et $b = 2$: dans ce cas, $4n = 2022 - 2026$. C'est impossible puisque $n \geq 0$.
- $a = 3$ et $b = 1$: dans ce cas, $4n = 3033 - 1013 = 2020$, i. e. $n = 505$ et $m = 3033 + 1013 = 4046$

Le minimum de la somme $m + n$ est obtenu avec les plus petites valeurs possibles de a et b. Il est inutile de pousser le raisonnement au cas $a + b = 8$.

La somme minimale $n + m$ est donc égale à 4 551.

Fonctions – Équations – Inéquations

Exercice 1

Soit f une fonction de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}^+$tel que $f(1) = 1$ et, pour tous réels x et y de $[0,1]$ tels que $x + y \in [0,1]$,

$$f(x + y) \geq f(x) + f(y)$$

Montrer que, pour tout réel x de $[0,1]$, $f(x) \leq 2x$.

Comme pour tous réels x et y de $[0,1]$ tels que $x + y \in [0,1]$, $f(x + y) \geq f(x) + f(y)$ on peut affirmer que la fonction f est croissante sur $[0,1]$ car si a et b sont dans $[0,1]$ et $a \leq b$ alors, comme $f(b) = f\big(a + (b - a)\big)$ et $f\big(a + (b - a)\big) \geq f(a) + f(b - a)$, on obtient $f(b) \geq f(a) + f(b - a)$.

soit $f(b) \geq \ f(a) + f(b - a)$. Comme f est à valeurs dans $\mathbf{R}^+$, on en déduit que $f(b) \geq \ f(a)$.

Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel k, $f\left(\frac{1}{2^k}\right) \leq \frac{1}{2^k}$.

<u>Initialisation :</u> pour $k = 0$, $\frac{1}{2^k} = 1$ et on a bien $f(1) \leq 1$ puisque $f(1) = 1$.

<u>Hérédité :</u> si pour un entier k, $f\left(\frac{1}{2^k}\right) \leq \frac{1}{2^k}$ alors $f\left(\frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+1}}\right) \geq 2f\left(\frac{1}{2^{k+1}}\right)$ soit $f\left(\frac{1}{2^k}\right) \geq 2f\left(\frac{1}{2^{k+1}}\right)$

d'où $f\left(\frac{1}{2^{k+1}}\right) \leq \frac{1}{2}\ f\left(\frac{1}{2^k}\right) \leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^k}$ et donc $f\left(\frac{1}{2^{k+1}}\right) \leq \frac{1}{2^{k+1}}$.

On en déduit que, pour tout entier naturel k, $f\left(\frac{1}{2^k}\right) \leq \frac{1}{2^k}$.

Soit alors un réel $x \in]0,1]$. Il existe un entier k tel que $\frac{1}{2^k} \leq x \leq \frac{1}{2^{k-1}}$. Comme f est croissante sur $[0,1]$ on en déduit que $f\left(\frac{1}{2^k}\right) \leq f(x) \leq f\left(\frac{1}{2^{k-1}}\right) \leq \frac{1}{2^{k-1}} \leq 2x$ car $\frac{1}{2^{k-1}} = 2\frac{1}{2^k}$. En particulier $f(x) \leq 2x$.

Si $x = 0$, alors, comme $f(1 + 0) \geq f(1) + f(0)$ soit $f(1) \geq f(1) + f(0)$ on obtient $f(0) \leq 0$.

L'inégalité $f(x) \leq 2x$ est donc encore vraie si $x = 0$. En fait, comme de plus, f est à valeurs dans $\mathbf{R}^+$, $f(0) = 0$.

Exercice 2

Déterminer toutes les fonctions $f: \mathbf{R} \longmapsto \mathbf{R}$ telles que :

pour tous réels x et y, $f(x^2 - y^2) = (x - y)(f(x) + f(y))$. (*)

Si on choisit x et y tels que $x = y$, alors, d'après (*), $f(0) = 0$.

Si on choisit $y = 0$ alors, d'après (*), pour tout réel x, $f(x^2) = xf(x)$. En particulier, $f((-1)^2) = -f(-1)$ soit $f(-1) = -f(1)$.

Si on choisit $y = 1$ alors, d'après (*), pour tout réel x, $f(x^2 - 1) = (x - 1)(f(x) + f(1))$.

Si on choisit $y = -1$ alors, d'après (*), pour tout réel x, $f(x^2 - 1) = (x + 1)(f(x) - f(1))$ puisque $f(-1) = -f(1)$.

On en déduit que, pour tout réel x, $(x - 1)(f(x) + f(1)) = (x + 1)(f(x) - f(1))$

soit $xf(x) + xf(1) - f(x) - f(1) = xf(x) - xf(1) + f(x) - f(1)$

soit $2xf(1) = 2f(x)$

soit $f(x) = f(1)x$ et on en déduit que la fonction f est une fonction linéaire.

Réciproquement, soit a un nombre réel et f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = ax$. Pour tous réels x et y :

$(x - y)\big(f(x) + f(y)\big) = (x - y)(ax - ay) = a(x^2 - y^2) = \ f(x^2 - y^2)$.

Conclusion : les fonctions vérifiant (*) sont les fonctions linéaires.

Exercice 3

Démontrer que pour tout entier naturel non nul n, l'inégalité (*)

$$\frac{1}{n+1} - \frac{2}{n+2} + \frac{3}{n+3} - \frac{4}{n+4} + \cdots + \frac{2n-1}{3n-1} > \frac{1}{3}.$$

Pour tout entier $n \geq 1$ et pour tout entier p tel que $1 \leq p \leq 2n - 1$, $\frac{p}{n+p} = 1 - \frac{n}{n+p}$.

L'inégalité (*) équivaut donc à

$$\left(1 - \frac{n}{n+1}\right) - \left(1 - \frac{n}{n+2}\right) + \left(1 - \frac{n}{n+3}\right) - \left(1 - \frac{n}{n+4}\right) + \cdots + \left(1 - \frac{n}{3n-1}\right) > \frac{1}{3}$$

soit $\underbrace{(1-1+1-1+\cdots+1)}_{2n-1\ termes}-\left(\frac{n}{n+1}-\frac{n}{n+2}+\frac{n}{n+3}-\frac{n}{n+4}+\cdots+\frac{n}{3n-1}\right)>\frac{1}{3}$
soit $1-\left(\frac{n}{n+1}-\frac{n}{n+2}+\frac{n}{n+3}-\frac{n}{n+4}+\cdots+\frac{n}{3n-1}\right)>\frac{1}{3}$
soit, en divisant par n, $\frac{1}{n}-\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+4}+\cdots+\frac{1}{3n-1}\right)>\frac{1}{3n}$
soit $\frac{1}{n}-\frac{1}{3n}>\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+4}+\cdots+\frac{1}{3n-1}$
soit $\frac{1}{n}-\frac{1}{3n}-\frac{1}{3n}>\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+4}+\cdots+\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{3n}$
c'est-à-dire $\frac{1}{3n}>\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+4}+\cdots+\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{3n}$.
Or $\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}=\frac{1}{(n+1)(n+2)}, \frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+4}=\frac{1}{(n+3)(n+4)}, \dots, \frac{1}{3n-1}-\frac{1}{3n}=\frac{1}{(3n-1)3n}$.
et $\frac{1}{(n+1)(n+2)}\leq\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right), \frac{1}{(n+3)(n+4)}\leq\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(n+2)(n+3)}+\frac{1}{(n+3)(n+4)}\right), \frac{1}{(3n-1)3n}\leq\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(3n-2)(3n-1)}+\frac{1}{(3n-1)3n}\right)$.
Comme pour tout entier $n\geq 1$ et pour tout entier naturel p, $\frac{1}{p(p+1)}=\frac{1}{p}-\frac{1}{p+1}$, on en déduit que
$\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+4}+\cdots+\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{3n}\leq\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{3n}\right)$
soit $\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+4}+\cdots+\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{3n}\leq\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{3n}\right)$
soit $\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+4}+\cdots+\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{3n}\leq\frac{1}{3n}$.
L'inégalité (*) est donc bien vérifiée.

Exercice 4
Soit a, b, c les longueurs des trois côtés d'un triangle non aplati. On suppose que $a+b+c=1$.
Soit n un entier tel que $n\geq 2$.
Montrer que $\sqrt[n]{a^n+b^n}+\sqrt[n]{b^n+c^n}+\sqrt[n]{c^n+a^n}<1+\frac{\sqrt[n]{2}}{2}$.

Sans perte de généralité, on peut supposer que $0<a\leq b\leq c$. Comme c est la longueur du plus grand côté et comme le triangle est non aplati, $a+b>c$. On a donc
$\frac{\sqrt[n]{2}}{2}=\frac{\sqrt[n]{2}}{2}(a+b+c)$ d'où $\frac{\sqrt[n]{2}}{2}>\frac{\sqrt[n]{2}}{2}(c+c)$ soit $\frac{\sqrt[n]{2}}{2}>\sqrt[n]{2}\times c$ soit $\frac{\sqrt[n]{2}}{2}>\sqrt[n]{2c^n}\geq\sqrt[n]{b^n+c^n}$.
D'autre part, comme $a\leq c$ et $n\geq 2$,

$$(c^n+a^n)-\left(c+\frac{a}{2}\right)^n=a^n-\sum_{k=1}^{k=n}\binom{n}{k}c^{n-k}\left(\frac{a}{2}\right)^k$$

Or $c^{n-k}\geq a^{n-k}$ donc $c^{n-k}\left(\frac{a}{2}\right)^k\geq a^{n-k}\left(\frac{a}{2}\right)^k$ soit $c^{n-k}\left(\frac{a}{2}\right)^k\geq\left(\frac{1}{2}\right)^k a^n$ d'où
$(c^n+a^n)-\left(c+\frac{a}{2}\right)^n\leq a^n-\sum_{k=1}^{k=n}a^n\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k$ soit $(c^n+a^n)-\left(c+\frac{a}{2}\right)^n\leq a^n\left(1-\sum_{k=1}^{k=n}a^n\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\right)$.
Or $1-\sum_{k=1}^{a^n k=n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k=\left(1-\frac{n}{2}\right)-\sum_{k=2}^{a^n k=n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k$ d'où, comme $n\geq 2$, $1-\sum_{k=1}^{a^n k=n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k<0$.
On en déduit que $(c^n+a^n)-\left(c+\frac{a}{2}\right)^n<0$ donc $\sqrt[n]{c^n+a^n}<c+\frac{a}{2}$.
De même, puisque $b^{n-k}\geq a^{n-k}$, $\sqrt[n]{b^n+a^n}<b+\frac{a}{2}$.
Au final, $\sqrt[n]{a^n+b^n}+\sqrt[n]{b^n+c^n}+\sqrt[n]{c^n+a^n}<b+\frac{a}{2}+\frac{\sqrt[n]{2}}{2}+c+\frac{a}{2}$.
Comme $b+\frac{a}{2}+\frac{\sqrt[n]{2}}{2}+c+\frac{a}{2}=\frac{\sqrt[n]{2}}{2}+a+b+c=\frac{\sqrt[n]{2}}{2}+1$
on peut écrire $\sqrt[n]{a^n+b^n}+\sqrt[n]{b^n+c^n}+\sqrt[n]{c^n+a^n}<\frac{\sqrt[n]{2}}{2}+1$.

Exercice 5
Démontrer que pour tous réels strictement positifs a, b, c, $(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)\geq 9(ab+bc+ca)$.

Une méthode classique dans ce genre d'exercice consiste à changer de variables en posant :
$p=a+b+c$, $q=ab+bc+ca$ et $r=abc$.

L'inégalité à démontrer s'écrit, en développant le produit de gauche :
$a^2b^2c^2 + 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + 4(a^2 + b^2 + c^2) + 8 - 9(ab + bc + ca) \geq 0$
Or $a^2b^2c^2 = r^2$,
$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = (ab + bc + ca)^2 - 2(acb^2 + bca^2 + bac^2) = q^2 - 2abc(a + b + c) = q^2 - 2pr$,
$a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca) = p^2 - 2q$.
On veut donc prouver que $r^2 + 2(q^2 - 2pr) + 4(p^2 - 2q) - 9q + 8 \geq 0$
soit $r^2 + 2q^2 + 4p^2 - 4pr - 17q + 8 \geq 0$. (*)
Or, $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0$ et $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 2(p^2 - 3q)$
et $(ab - bc)^2 + (bc - ca)^2 + (ca - ab)^2 \geq 0$ et $(ab - bc)^2 + (bc - ca)^2 + (ca - ab)^2 = q^2 - 3pr$.
Enfin, si $a = b = c = 1$, l'inégalité large est en fait une égalité et on a alors $p = 3r$.
On transforme donc le membre de gauche de (*) pour faire apparaitre ces expressions :

$$E = r^2 + 2q^2 + 4p^2 - 4pr - 17q + 8 = \left(r - \frac{p}{3}\right)^2 + \frac{2}{3}pr - \frac{1}{9}p^2 + 2q^2 + 4p^2 - 4pr - 17q + 8$$
$$E = \left(r - \frac{p}{3}\right)^2 + \frac{35}{9}p^2 - \frac{10}{3}pr + 2q^2 - 17q + 8$$
$$E = \left(r - \frac{p}{3}\right)^2 + \frac{10}{9}(q^2 - 3pr) + \frac{35}{9}(p^2 - 3q) + \frac{8}{9}q^2 + \left(\frac{35}{3} - 17\right)q + 8$$
$$E = \left(r - \frac{p}{3}\right)^2 + \frac{10}{9}(q^2 - 3pr) + \frac{35}{9}(p^2 - 3q) + \frac{8}{9}q^2 - \frac{16}{3}q + 8$$
$$E = \left(r - \frac{p}{3}\right)^2 + \frac{10}{9}(q^2 - 3pr) + \frac{35}{9}(p^2 - 3q) + \frac{8}{9}(q^2 - 6q + 9)$$
$$E = \left(r - \frac{p}{3}\right)^2 + \frac{10}{9}(q^2 - 3pr) + \frac{35}{9}(p^2 - 3q) + \frac{8}{9}(q - 3)^2$$

Comme somme de nombres positifs ou nuls, $E \geq 0$.
On a donc bien $(a^2 + 2)(b^2 + 2)(c^2 + 2) \geq 9(ab + bc + ca)$.

Exercice 6 – Extrait CG 2025

On dit qu'une fonction f vérifie la propriété $\mathcal{E}$ si, pour tout réel x, $f(x + 1) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f(x)^2}$.

1. Proposer une fonction continue qui vérifie la propriété $\mathcal{E}$.
2. On rappelle qu'une fonction g définie sur $\mathbf{R}$ est périodique s'il existe un réel $T > 0$ tel que :
   pour tout réel x, $g(x + T) = g(x)$.
   Soit f une fonction vérifiant $\mathcal{E}$. Montrer que f est périodique.
3. Proposer une infinité des fonctions continues f vérifiant $\mathcal{E}$ et $f(0) = \frac{1}{2}$.

Quelques remarques préliminaires sur toute fonction f vérifiant $\mathcal{E}$:

- Comme une racine carrée est positive ou nulle, pour tout réel x, $f(x) \geq \frac{1}{2}$.
- Comme une racinée n'est définie que pour un nombre positif ou nul, pour tout réel x, $f(x) - f(x)^2 \geq 0$.
  Or $X - X^2 = X(1 - X)$. Le trinôme $X - X^2$est donc positif ou nul à l'intérieur de ses racines (coefficient de X^2 négatif) soit sur l'intervalle $[0,1]$. On en déduit que, pour tout réel x, $f(x) \in [0,1]$.
  Au final, si f vérifie $\mathcal{E}$ alors $f(x) \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

1. On cherche déjà si une fonction constante peut convenir c'est-à-dire s'il existe un réel $k \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ tel que, pour tout réel x, $k = \frac{1}{2} + \sqrt{k - k^2}$.
   soit $k - \frac{1}{2} = \sqrt{k - k^2}$, ce qui implique $\left(k - \frac{1}{2}\right)^2 = k - k^2$ soit $2k^2 - 2k + \frac{1}{4} = 0$. Cette équation a pour discriminant $\Delta = 4 - 4 \times 2 \times \frac{1}{4} = 2$ et pour solutions $k_1 = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$ et $k_2 = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$.
   On constate que $k_1 < \frac{1}{2}$ et donc ne convient pas. En revanche, comme $0 < \sqrt{2} < 2$, $k_2 \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. On vérifie (implication dans le raisonnement) que $k_2 - k_2^2 = \frac{2+\sqrt{2}}{4} - \left(\frac{2+\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{4(2+\sqrt{2})-(4+2+4\sqrt{2})}{16} = \frac{2}{16}$
   d'où $\sqrt{k_2 - k_2^2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$ et $\frac{1}{2} + \sqrt{k_2 - k_2^2} = \frac{2+\sqrt{2}}{4} = k_2$
   La fonction constante égale à $\frac{2+\sqrt{2}}{4}$ est donc bien une fonction continue vérifiant $\mathcal{E}$.
2. Soit f une fonction vérifiant $\mathcal{E}$. On va montrer que f est périodique de période 2. Pour tout réel x,

$f(x+2)=f\big((x+1)+1\big)=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x+1)-f(x+1)^2}=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x+1)\big(1-f(x+1)\big)}$

soit $f(x+2)=\frac{1}{2}+\sqrt{\left(\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-f(x)^2}\right)\left(1-\left(\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-f(x)^2}\right)\right)}$

soit $f(x+2)=\frac{1}{2}+\sqrt{\left(\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-f(x)^2}\right)\left(\frac{1}{2}-\sqrt{f(x)-f(x)^2}\right)}$

soit $f(x+2)=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-\left(f(x)-f(x)^2\right)}=\frac{1}{2}+\sqrt{\left(f(x)-\frac{1}{2}\right)^2}$.

Or, d'après la question 1., pour tout réel x, $f(x)\in\left[\frac{1}{2},1\right]$, donc $\sqrt{\left(f(x)-\frac{1}{2}\right)^2}=f(x)-\frac{1}{2}$.

On en déduit que pour tout réel x, $f(x+2)=\frac{1}{2}+\ f(x)-\frac{1}{2}=f(x)$.

La fonction f est donc bien périodique de période 2.

3. On cherche une fonction f périodique, de période 2, et vérifiant $f(0)=\frac{1}{2}$.

On commence par remarquer que si f vérifie $\mathcal{E}$, alors, pour tout réel x,

$\left(f(x+1)-\frac{1}{2}\right)^2 = f(x)-f(x)^2$ soit $(f(x+1))^2-f(x+1)+\frac{1}{4}= f(x)-f(x)^2$

soit $(f(x+1))^2-f(x+1)+\frac{1}{8}=-\left(f(x)^2-f(x)+\frac{1}{8}\right)$.

Si on pose $g(x)=f(x)^2-f(x)+\frac{1}{8}$, on a donc, pour tout réel x, $g(x+1)=-g(x)$

d'où $g(x+2)=-g(x+1)=+g(x)$ ce qui signifie que la fonction g est périodique de période 2.

L'idée est de chercher des fonctions g et d'en déduire ensuite des fonctions f en résolvant l'équation (*) $f(x)^2-f(x)+\frac{1}{8}-g(x)=0$ d'inconnue $f(x)$. Le discriminant de cette équation est $\Delta=\frac{1}{2}+4g(x)$. Cette équation aura au moins une solution si et seulement si $g(x)\geq-\frac{1}{8}$.

On veut de plus que $f(0)=\frac{1}{2}$ d'où $g(0)=-\frac{1}{8}$.

Pour avoir une fonction 2-périodique, on pense à une fonction $s:\ x\mapsto\sin(\pi x)$ ou $c:\ x\mapsto\cos(\pi x)$.

Pour tout réel x, $c(x+1)=\cos\big((\pi+1)x\big)=-\cos(\pi x)=-c(x)$ et $c(x+2)=\cos\big((\pi+2)x\big)=\cos(\pi x)=c(x)$.

Pour garantir de plus l'égalité $g(0)=-\frac{1}{8}$, on va donc poser $g(x)=-\frac{1}{8}\cos(\pi x)$.

Alors, pour tout réel x, $-\frac{1}{8}\leq g(x)\leq\frac{1}{8}$ donc $g(x)\geq-8$ et l'équation (*) a pour solutions

$f(x)=\frac{1-\sqrt{\frac{1}{2}+4g(x)}}{2}=\frac{1-\sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos(\pi x))}}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos(\pi x))}$ et $f(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos(\pi x))}$.

Comme on veut de plus $f(x)\in\left[\frac{1}{2},1\right]$, on ne conserve que $f(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos(\pi x))}$.

Pour obtenir maintenant une infinité de fonctions solutions, on va considérer les fonctions f_k définies sur $\mathbf{R}$ par $f_k(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-(\cos(\pi x))^{2k+1}\right)}$ et vérifier qu'elles conviennent bien.

- pour tout entier k, $f_k(0)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-(\cos(0))^{2k+1}\right)}=\frac{1}{2}$ car $\cos(0)=1$
- pour tout entier k et pour tout réel x,

$f_k(x+1)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-(\cos(\pi(x+1)))^{2k+1}\right)}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-(\cos(\pi x+\pi)))^{2k+1}\right)}$

soit $f_k(x+1)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-(-\cos(\pi x)))^{2k+1}\right)}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+(\cos(\pi x)))^{2k+1}\right)}$.

Transformons d'autre part l'expression $\frac{1}{2}+\sqrt{f_k(x)-\left(f_k(x)\right)^2}$

Or, $\left(f_k(x)\right)^2=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-(\cos(\pi x))^{2k+1}\right)}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\left(1-(\cos(\pi x))^{2k+1}\right)$ d'où

$f_k(x)-\left(f_k(x)\right)^2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-(\cos(\pi x))^{2k+1}\right)}-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-(\cos(\pi x))^{2k+1}\right)}-\frac{1}{8}\left(1-(\cos(\pi x))^{2k+1}\right)$

$f_k(x)-\left(f_k(x)\right)^2=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\left(1-(\cos(\pi x))^{2k+1}\right)=\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\left(1-(\cos(\pi x))^{2k+1}\right)=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{2}(1-\cos(\pi x))^{2k+1}\right)$

$f_k(x)-\left(f_k(x)\right)^2=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(\cos(\pi x))^{2k+1}\right)$

d'où $\frac{1}{2}+\sqrt{f_k(x)-\left(f_k(x)\right)^2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(\cos(\pi x))^{2k+1}}$

et on a bien $f_k(x+1)=\frac{1}{2}+\sqrt{f_k(x)-\left(f_k(x)\right)^2}$ ce qui signifie que f_k vérifie $\mathcal{E}$.

Exercice 7 – Asian Pacific Mathématics Olympiads 2018

Soit, pour tout nombre réel x non entier et tel que $0<x<2\,018$:

$$f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-4}+\cdots+\frac{1}{x-2\,018}\text{ et }g(x)=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x-5}+\cdots+\frac{1}{x-2\,017}.$$

Montrer que pour tout nombre réel x non entier et tel que $0<x<2\,018$, $|f(x)-g(x)|>2$.

Soit x un nombre réel non entier et tel que $0<x<2\,018$. On a deux cas à étudier :

- Il existe un entier naturel non nul n tel que $2n-1<x<2n$
- Il existe un entier naturel non nul n tel que $2n<x<2n+1$.

Or, on remarque que $f(2\,018-x)=-f(x)$ et $g(2\,018-x)=-g(x)$, ce qui garantit une symétrie des courbes des fonctions par rapport au point de coordonnées $(1009{,}0)$. On peut donc se limiter au deuxième cas.

Soit $d(x)=f(x)-g(x)$. Montrons que $d(x)>2$.

$d(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-4}+\cdots+\frac{1}{x-2\,018}-\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x-5}+\cdots+\frac{1}{x-2\,017}\right)$

Soit $d(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x-5}+\cdots+\frac{1}{x-2\,018}-\frac{1}{x-2\,017}$.

Comme $2n<x<2n+1$, pour tout entier $k\in\{1,2,\dots,n-1,n+2,\dots,1\,009\}$, $x-2k+1$ et $x-2k$ ont toujours le même signe donc

$\frac{1}{x-2k}-\frac{1}{x-2k+1}=\frac{x-2k+1-(x-2k)}{(x-2k)(x-2k+1)}=\frac{1}{(x-2k)(x-2k+1)}$ est un nombre strictement positif

Et $\frac{1}{x-2n}-\frac{1}{x-2n-1}=-\frac{1}{(x-2n)(x-2n-1)}=\frac{1}{(x-2n)(2n+1-x)}$.

Comme $2n<x<2n+1, x-2n>0$ et $2n+1-x>0$, on peut donc appliquer l'inégalité entre moyenne harmonique et moyenne géométrique :

Pour tous réels a,b strictement positifs, $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\leq\sqrt{ab}$. On obtient, en posant $a=\frac{1}{(x-2n)}$ et $b=\frac{1}{(2n+1-x)}$ et en élevant au carré :

$\frac{1}{(x-2n)(2n+1-x)}\geq\left(\frac{2}{x-2n+2n+1-x}\right)^2$ soit $\frac{1}{(x-2n)(2n+1-x)}\geq 4$.

En ajoutant membre à membre les inégalités, on en déduit que :

Si $0<x<1$, alors $f(x)-g(x)>4+\frac{1}{x-2}>3$ car $x-2<-1<0$ donc $\frac{1}{x-2}>-1$

Pour tout $n>0$, $f(x)-g(x)>\frac{1}{x}-\frac{1}{x-2n+1}+4+\frac{1}{x-2n-2}$.

Or $x<2n+1$ donc $-x>-2n-1$ d'où $2n+2-x>2n+2-2n-1>0$ donc $\frac{1}{2n+2-x}<\frac{1}{2n+2-2n-1}$ soit $-\frac{1}{2n+2-x}>-\frac{1}{2n+2-2n-1}$ c'est-à-dire $\frac{1}{x-2n-2}>-\frac{1}{2n+2-2n-1}$.

De même, on montre que $-\frac{1}{x-2n+1}>-\frac{1}{2n-2n+1}$.

Et on en déduit que $f(x)-g(x)>\frac{1}{x}-\frac{1}{2n-2n+1}+4-\frac{1}{2n+2-2n-1}$ soit $f(x)-g(x)>\frac{1}{x}-1+4-1>2$

Suites numériques

Exercice 1

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = u_1 = 1$ et, pour tout entier $n \geq 1$, $u_{n+1} = 1 + \frac{{u_1}^2}{u_0} + \frac{{u_2}^2}{u_1} + \cdots + \frac{{u_n}^2}{u_{n-1}}$.
Déterminer le terme général u_n de la suite.

Si on calcule les premiers termes de la suite, on obtient :
$u_2 = 1 + 1 = 2, u_3 = 1 + 1 + \frac{4}{1} = 6, u_4 = 1 + 1 + 4 + \frac{36}{2} = 24, u_5 = 1 + 1 + 4 + 6 + \frac{576}{6} = 120.$
On constate que $u_0 = 1!, u_1 = 1!, u_2 = 2\,!, u_3 = 3\,!, u_4 = 4\,!, u_5 = 5\,!$.
Montrons par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$, $u_n = n!$
Initialisation : faite dans les lignes précédentes.
Hérédité : si, pour un entier n, $u_n = n!$, alors $u_{n+1} = u_n + \frac{{u_n}^2}{u_{n-1}} = n! + \frac{(n!)^2}{(n-1)!} = n!\left(1 + \frac{n!}{(n-1)!}\right) = n!\,(1+n)$
soit $u_{n+1} = (n+1)!$
D'après le principe de récurrence, on a donc démontré que, pour tout entier $n \geq 1$, $u_n = n!$.

Exercice 2

Soit (u_n) la suite définie par $u_1 = 2, u_{10} = 30$ et, pour tout entier $n \geq 2$, $u_{n+1} = \frac{u_1+u_2+u_3+\cdots+u_{n-1}+u_n}{n}$.
Déterminer la valeur de u_2.

Pour tout entier $n \geq 3$, $u_{n+1} = \frac{u_1+u_2+u_3+\cdots+u_{n-1}+u_n}{n}$ et $u_n = \frac{u_1+u_2+u_3+\cdots+u_{n-2}+u_{n-1}}{n-1}$, ce qui implique
$(n-1)u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{n-1}$ et donc $nu_{n+1} = (n-1)u_n + u_n = nu_n$ soit $u_{n+1} = u_n$.
On a donc, pour tout entier $n \geq 3$, $u_n = 30$. En particulier, $u_3 = 30$.
On en déduit que $30 = \frac{u_1+u_2}{2}$ soit $u_2 = 60 - u_1$ c'est-à-dire $u_2 = 58$.

Exercice 3

Soit (u_n) définie par, pour tout entier naturel non nul n, $u_n = \frac{1}{n+n^2}$. On suppose qu'il existe deux entiers naturels non nuls n et m tels que $m < n$ et $u_m + u_{m+1} + \cdots + u_n = \frac{1}{13}$.
Déterminer la valeur de $n - m$.

Pour tout entier naturel non nul n, $\frac{1}{n+n^2} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$
donc $u_m + u_{m+1} + \cdots + u_n = \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}\right) + \left(\frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{m} - \frac{1}{n+1}$.
On a donc $\frac{1}{m} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{13}$ soit $13(n+1-m) = m(n+1)$ soit $13m = 13(n+1) - m(n+1)$ soit $13m = (n+1)(13-m)$. (*)
13 divise le produit $(n+1)(13-m)$ et $13 > 13 - m$ donc, comme 13 est un nombre premier, 13 divise $n+1$. Il existe donc un entier naturel non nul k tel que $n + 1 = 13k$.
L'égalité (*) s'écrit alors $13m = 13k(13-m)$ soit $m = k(13-m)$.
Cette égalité ne peut être vérifiée que si $m \geq 13 - m > 0$ soit, puisque m est un entier $7 \leq m \leq 12$. On vérifie que parmi les entiers 7, 8, 9, 10, 11, 12 seul l'entier $m = 12$ est tel que m est un multiple de $13 - m$.
La seule solution est donc pour $m = 12$, ce qui donne $13 - m = 1$, $k = 12$ et $n + 1 = 13 \times 12 = 156$.
Donc $n - m = 155 - 12 = 143$.

Exercice 4

Étudier la convergence de la suite (u_n) définie par son premier terme u_0, réel positif, et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n} + \frac{1}{n+1}.$$

La suite (u_n) est bien définie et ses termes sont tous positifs. Observons que, si cette suite a une limite l, celle-ci ne peut être que 1 ou 0 (car $l = \sqrt{l}$ conduit à $l = 0$ ou $l = 1$).

On a, pour tout entier n, $u_{n+2}-u_{n+1}=\sqrt{u_{n+1}}-\sqrt{u_n}-\frac{1}{(n+2)(n+1)}$
Comme $\sqrt{u_{n+1}}-\sqrt{u_n}=\frac{u_{n+1}-u_n}{\sqrt{u_{n+1}}+\sqrt{u_n}}$, $\sqrt{u_{n+1}}-\sqrt{u_n}$ a le même signe que $u_{n+1}-u_n$.
On en déduit que $u_{n+2}-u_{n+1}$ est négatif dès que $u_{n+1}-u_n$ est négatif.
S'il existe un rang p tel que $u_{p+1}-u_p<0$, la suite (u_n) est décroissante à partir du rang p. La suite (u_n), décroissante à partir d'un certain rang et à termes positifs, est alors convergente.
Soit l sa limite. Comme la fonction $x\longmapsto\sqrt{x}$ est continue sur $\mathbf{R}^+$, la relation de récurrence de la suite conduit à l'équation $l=\sqrt{l}+0$ soit $l=1$ ou $l=0$. Mais si l'on suppose par l'absurde que $l=0$, alors on obtient $u_{n+1}-u_n=\sqrt{u_n}+\frac{1}{n+1}-u_n>\sqrt{u_n}-u_n\geq 0$ pour n suffisamment grand, car $\sqrt{x}-x\geq 0$ pour $x\in[0,1]$, ce qui contredit l'hypothèse « (u_n) est décroissante à partir du rang p ». Donc $l=1$.
S'il n'existe aucun entier p pour lequel $u_{p+1}-u_p<0$, alors toutes ces différences sont positives, et la suite est croissante. Si la suite admet une limite, cette limite ne peut être que 0 ou 1, or $u_1=\sqrt{u_0}+1$, terme supérieur à 1 (si $u_0=0$, c'est u_2 qui est strictement supérieur à 1) et donc on aboutit à une contradiction : la suite (u_n), si elle est croissante, tend vers $+\infty$. Or, dans l'égalité, valable pour tout n : $u_{n+1}-u_n=\sqrt{u_n}\left(1-\sqrt{u_n}\right)+\frac{1}{n+1}$ pour n assez grand le membre de gauche est positif et celui de droite est négatif. Donc la supposition selon laquelle il n'y a aucun entier p pour lequel $u_{p+1}-u_p<0$ est fausse. Il y en a donc un, et c'est le raisonnement qui suit cette supposition-là qu'il faut suivre.
La suite admet pour limite 1.

Exercice 5 – Extrait CG 2025

Soit (u_n) une suite réelle. On pose $v_0=0$ et, pour tout entier $n\geq 1$, $v_n=\sum_{k=0}^{k=n-1}|u_{k+1}-u_k|$.
On suppose que la suite (v_n) est majorée et on souhaite démontrer que la suite (u_n) converge.

1. Démontrer que la suite (v_n) converge.
2. Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a $0\leq u_{n+1}-u_n+|u_{n+1}-u_n|\leq 2|u_{n+1}-u_n|$.
3. En déduire que la suite (u_n+v_n) converge.
4. Conclure.

1. La suite (v_n) est majorée. Pour démontrer qu'elle converge, il suffit donc de démontrer qu'elle est croissante.
   Or, pour tout entier $n\geq 1$:
   $v_{n+1}-v_n=\sum_{k=0}^{k=n}|u_{k+1}-u_k|-\sum_{k=0}^{k=n-1}|u_{k+1}-u_k|=|u_{n+1}-u_n|$
   Donc, pour tout entier $n\geq 1$, $v_{n+1}-v_n\geq 0$. La suite (v_n) est croissante et majorée donc convergente.
2. Pour tout entier naturel n, $-|u_{n+1}-u_n|\leq u_{n+1}-u_n\leq|u_{n+1}-u_n|$. Il suffit alors d'ajouter $|u_{n+1}-u_n|$ aux trois membres de l'encadrement pour obtenir l'encadrement $0\leq u_{n+1}-u_n+|u_{n+1}-u_n|\leq 2|u_{n+1}-u_n|$.
3. Pour tout entier naturel $n\geq 1$,
   $(u_{n+1}+v_{n+1})-(u_n+v_n)=u_{n+1}-u_n-(v_{n+1}-v_n)=u_{n+1}-u_n+|u_{n+1}-u_n|$
   et d'après la question 2., $u_{n+1}-u_n+|u_{n+1}-u_n|\geq 0$. On en déduit que la suite (u_n+v_n) est croissante.
   Montrons qu'elle est majorée. Toujours d'après la question 2., pour tout entier $k\geq 1$:
   $0\leq u_{k+1}-u_k+|u_{k+1}-u_k|\leq 2|u_{k+1}-u_k|$
   d'où $0\leq\sum_{k=0}^{k=n-1}(u_{k+1}-u_k+|u_{k+1}-u_k|)\leq 2\sum_{k=0}^{k=n-1}|u_{k+1}-u_k|$
   soit $0\leq\sum_{k=0}^{k=n-1}(u_{k+1}-u_k)+\sum_{k=0}^{k=n-1}|u_{k+1}-u_k|\leq 2\sum_{k=0}^{k=n-1}|u_{k+1}-u_k|$
   soit $0\leq\sum_{k=0}^{k=n-1}(u_{k+1}-u_k)+v_n\leq 2v_n$
   soit $0\leq u_n-u_0+v_n\leq 2v_n$
   soit $u_0\leq u_n+v_n\leq 2v_n+u_0$.
   Or on a vu que la suite (v_n) est majorée donc la suite $(2v_n+u_0)$ est majorée. On en déduit que la suite (u_n+v_n) est aussi majorée.
   La suite (u_n+v_n) est donc croissante et majorée. On peut donc affirmer qu'elle est convergente.
4. Les suites (u_n+v_n) et (v_n) sont convergentes et, pour tout entier naturel $n\geq 1$, $u_n=u_n+v_n-v_n$ donc, par différence, la suite (u_n) converge.

Exercice 6 – Extrait CG 2025

Pour tout réel α, on appelle suite associée à α la suite (u_n) définie par $u_0=u_1=1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+2}=u_{n+1}^2-\alpha u_n^4$.

On dit que α vérifie la propriété $\mathcal{P}$ si tous les termes de la suite (u_n) associée à α sont strictement positifs.

1. Quels sont les réels α qui vérifient la propriété $\mathcal{P}$ et qui appartiennent à :

a. l'intervalle $[1, +\infty[$? **b.** l'intervalle $]-\infty, 0]$?

2. Soit α un réel appartenant à l'intervalle $]0,1[$ et (u_n) la suite qui lui est associée. On suppose, dans cette question que α vérifie la propriété $\mathcal{P}$.

a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $0 < u_{n+1} \leq u_n \leq 1$.

b. Quelle est la limite de la suite (u_n).

c. Pour tout entier naturel n, on pose $x_n = \frac{u_{n+1}}{u_n^2}$. Exprimer x_{n+1} en fonction de α et de x_n.

d. Démontrer que la suite (x_n) admet une limite finie que l'on notera x_∞ et exprimer $x_\infty^2(1 - x_\infty)$ en fonction de α.

e. En déduire que $\alpha \leq \frac{4}{27}$.

3. Quels sont les réels α qui vérifient la propriété $\mathcal{P}$?

1. a. Si $\alpha \geq 1$, comme $u_0 = u_1 = 1$, $u_2 = 1^2 - \alpha 1^4 = 1 - \alpha$ donc $u_2 \leq 0$ et α ne vérifie pas $\mathcal{P}$. Il n'y a donc aucun réel α vérifiant $\mathcal{P}$ dans l'intervalle $[1, +\infty[$.

b. Si $\alpha \leq 0$, montrons par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $u_n > 0$ et $u_{n+1} > 0$.

Initialisation : $u_0 = 1$ donc $u_0 > 0$ et $u_1 = 1$ donc $u_1 > 0$

Hérédité : si pour un entier $n \geq 1$, $u_{n-1} > 0$ et $u_n > 0$ alors $u_{n+1} = u_n^2 - \alpha u_{n-1}^4$. Or $\alpha \leq 0$ donc $-\alpha u_{n-1}^4 \geq 0$ et $u_{n+1} \geq u_n^2 > 0$ car $u_n > 0$. On a donc $u_n > 0$ et $u_{n+1} > 0$.

Conclusion, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $u_n > 0$ et $u_{n+1} > 0$.

On en conclut que tout réel α de l'intervalle $]-\infty, 0]$ vérifie $\mathcal{P}$.

2. On suppose maintenant que $0 < \alpha < 1$ et que pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.

a. Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 < u_{n+1} \leq u_n \leq 1$.

Initialisation : $u_0 = u_1 = 1$ donc l'affirmation est vraie au rang 0.

Hérédité : si, pour un entier n, $u_{n+1} \leq u_n \leq 1$ alors comme $0 < u_{n+1} \leq 1$, $0 < u_{n+1}^2 \leq 1$ et $u_{n+1}^2 \leq u_{n+1}$.

De plus, $0 < \alpha$ et donc $0 < \alpha u_n^4$ donc $-\alpha u_n^4 < 0$.

On en déduit que $u_{n+1}^2 - \alpha u_n^4 < u_{n+1}^2$ soit $u_{n+2} < u_{n+1}^2 \leq u_{n+1} \leq 1$.

Comme on sait de plus que pour tout entier naturel n, $u_n > 0$, (car α vérifie la propriété $\mathcal{P}$) on a $0 < u_{n+2}$.

Au final, on a bien $0 < u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq 1$ et l'affirmation est encore vraie au rang $n+1$.

Conclusion : pour tout entier naturel n, $0 < u_{n+1} \leq u_n \leq 1$.

b. D'après le a., la suite (u_n) est décroissante et minorée donc elle converge. Soit l sa limite, $0 \leq l \leq 1$.

De plus, comme pour tout n, $u_{n+2} = u_{n+1}^2 - \alpha u_n^4$ et u_{n+2}, u_{n+1}, u_n ont pour limite l, l est solution de l'équation $l = l^2 - \alpha l^4$. Si $l \neq 0$, alors comme $-\alpha l^4 < 0$, $l < l^2$ d'où l ne peut être situé dans l'intervalle $[0,1]$.

Conclusion : $l = 0$.

c. Pour tout entier naturel n, $x_{n+1} = \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}^2} = \frac{u_{n+1}^2 - \alpha u_n^4}{u_{n+1}^2} = 1 - \alpha\left(\frac{u_n^2}{u_{n+1}}\right)^2 = 1 - \alpha\left(\frac{1}{x_n}\right)^2 = 1 - \frac{\alpha}{x_n^2}$.

d. Montrons par récurrence que la suite (x_n), qui est positive par définition de son terme général, est décroissante.

Initialisation : $x_0 = \frac{u_1}{u_0^2} = 1$ et $x_1 = 1 - \frac{\alpha}{x_0^2} = 1 - \alpha$.

Hérédité : si, pour un entier n, $0 < x_{n+1} \leq x_n$ alors $0 < x_{n+1}^2 \leq x_n^2$ donc $0 < \frac{1}{x_n^2} \leq \frac{1}{x_{n+1}^2}$ et comme $\alpha > 0$,

$0 < \frac{\alpha}{x_n^2} \leq \frac{\alpha}{x_{n+1}^2}$ d'où $-\frac{\alpha}{x_{n+1}^2} \leq -\frac{\alpha}{x_n^2}$ et $1 - \frac{\alpha}{x_{n+1}^2} \leq 1 - \frac{\alpha}{x_n^2}$ soit $x_{n+2} \leq x_{n+1}$.

On en déduit que, pour tout entier n, $0 < x_{n+1} \leq x_n$.

La suite (x_n) est donc décroissante et minorée par 0 donc convergente.

De plus, comme pour tout entier n, , $x_{n+1} = 1 - \frac{\alpha}{x_n^2}$ soit $x_{n+1}x_n^2 = x_n^2 - \alpha$, la limite x_∞ de la suite est solution de l'équation $x_\infty x_\infty^2 = x_\infty^2 - \alpha$ soit $x_\infty^2(1 - x_\infty) = \alpha$.

e. Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}^+$ par $f(x) = x^2(1-x) - \alpha$. La limite x_∞ est solution de l'équation $f(x) = 0$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbf{R}^+$ et pour tout réel positif, $f'(x) = 2x(1-x) - x^2 = x(2-3x)$.

On en déduit que la fonction f est croissante sur $\left[0, \frac{2}{3}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{2}{3}, +\infty\right[$ et la fonction f admet un maximum en $\frac{2}{3}$ qui vaut $\left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(1 - \frac{2}{3}\right) - \alpha = \frac{4}{27} - \alpha$. Comme on sait que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins la solution x_∞, on en déduit que $\frac{4}{27} - \alpha \geq 0$ soit $\alpha \leq \frac{4}{27}$.

3. On a vu précédemment que si α vérifie la propriété $\mathcal{P}$ alors $0 \leq \alpha \leq \frac{4}{27}$. Réciproquement soit $0 \leq \alpha \leq \frac{4}{27}$.
Montrons que la suite (u_n) définie par $u_0 = u_1 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+2} = u_{n+1}^2 - \alpha u_n^4$ est à termes strictement positifs.
Pour cela, montrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, $\frac{2}{3} \leq x_n \leq 1$.
Initialisation : $x_0 = \frac{1}{1} = 1$ donc , $\frac{2}{3} \leq x_0 \leq 1$.
Hérédité : si, pour un entier n, $\frac{2}{3} \leq x_n \leq 1$, alors montrons que , $\frac{2}{3} \leq x_{n+1} \leq 1$.
Pour cela, comme pour tout entier naturel n, , $x_{n+1} = 1 - \frac{\alpha}{x_n^2}$, considérons la fonction φ définie sur $]0, +\infty[$ par $\varphi(\mathrm{x}) = 1 - \frac{\alpha}{x^2}$. La fonction φ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et, pour tout réel x strictement positif, $\varphi'(\mathrm{x}) = \frac{2\alpha}{x^3}$.
Comme $0 \leq \alpha \leq \frac{4}{27}$, on en déduit que la fonction φ est croissante sur $]0, +\infty[$ d'où $\varphi\left(\frac{2}{3}\right) \leq \varphi(x_n) \leq \varphi(1)$ c'est-à-dire $1 - \frac{9}{4}\alpha \leq x_{n+1} \leq 1 - \alpha$. On a déjà $1 - \alpha < 1$. Montrons que $\frac{2}{3} \leq \ \varphi\left(\frac{2}{3}\right)$.
On sait que $0 \leq \alpha \leq \frac{4}{27}$ donc $\frac{9}{4}\alpha \leq \frac{9}{27}$ soit $-\frac{9}{4}\alpha \geq -\frac{1}{3}$ soit $1 - \frac{9}{4}\alpha \geq \frac{2}{3}$.
On a donc bien $\frac{2}{3} \leq \ \varphi\left(\frac{2}{3}\right) x_{n+1} \leq 1 - \alpha < 1$.
On peut donc affirmer que, pour tout entier naturel n, $\frac{2}{3} \leq x_n \leq 1$ soit $\frac{2}{3} \leq \frac{u_{n+1}}{u_n^2} \leq 1$
Cela entraine que, pour tout entier naturel n, $0 < \frac{2}{3} \leq \frac{u_{n+1}}{u_n^2}$. Donc, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} > 0$. Comme de plus $u_0 > 0$, on a bien, pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.
Cela signifie que α vérifie la propriété $\mathcal{P}$. Donc les réels α qui vérifient la propriété $\mathcal{P}$ sont tous les réels de l'intervalle $\left[0, \frac{4}{27}\right]$.

.

Exercice 7

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbf{N}^*$ par $u_1 = 1$ et, pour tout entier naturel non nul n, $u_{2n} = 1 + u_n$ et $u_{2n+1} = \frac{1}{u_{2n}}$.

Démontrer que pour tout nombre rationnel $r > 0$, il existe un unique entier n tel que $u_n = r$.

Montrons d'abord l'existence en démontrant par récurrence que pour tout entier $k \geq 2$, l'affirmation $P(k)$ « pour tout quotient $\frac{a}{b}$ d'entiers naturels non nuls a et b tels que $pgcd\ (a, b) = 1$ et $a + b \leq k$, il existe un entier naturel non nul n tel que $u_n = \frac{a}{b}$ » est vraie.

Initialisation : pour $k = 2$, les deux conditions $pgcd\ (a, b) = 1$ et $a + b \leq k$ conduisent à $a = b = 1$ et $u_1 = \frac{a}{b}$.

Hérédité : si, pour un entier $k \geq 2$, l'affirmation $P(k)$ est vraie. Alors soit $\frac{a}{b}$ un quotient d'entiers naturels non nul a et b tels que $pgcd\ (a, b) = 1$ et $a + b \leq k + 1$.

- Si $a < b$, alors $pgcd\ (b - a, a) = pgcd\ (b, a) = 1$ et $b - a + a = b$. Comme $a \geq 1$ et $a + b \leq k + 1, b \leq k$ donc il existe un entier naturel non nul n tel que $u_n = \frac{b-a}{a}$.
  Mais alors $u_{2n+1} = \frac{1}{u_{2n}} = \frac{1}{1+u_n} = \frac{1}{1+\frac{b-a}{a}} = \frac{a}{a+b-a} = \frac{a}{b}$.
- Si $a > b$, alors $pgcd\ (a - b, b) = pgcd(a, b) = 1$ et $a - b + b = a$. Comme $b \geq 1$ et $a + b \leq k + 1, a \leq k$ donc il existe un entier naturel non nul n tel que $u_n = \frac{a-b}{b}$.
  Mais alors $u_{2n} = 1 + u_n = 1 + \frac{a-b}{b} = \frac{b+a-b}{b} = \frac{a}{b}$.

L'affirmation $P(k+1)$ est donc encore vraie.
Conclusion, pour tout nombre rationnel r, il existe un n tel que $u_n = r$.
Montrons maintenant l'unicité en raisonnant par l'absurde. Supposons donc qu'il existe deux entiers naturels non nuls distincts n et m tels que
$u_n = u_m = r$. Pour cela, on peut démontrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul n, $u_{2n} > 1$ et , $u_{2n+1} < 1$.

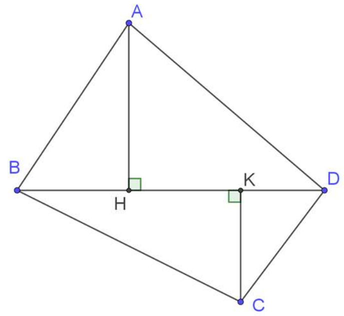
- Si $r < 1$ alors il existe deux entiers n' et m' tels que $n = 2n' + 1$ et $m = 2m' + 1$.
  L'égalité $u_n = u_m$ s'écrit $\frac{1}{u_{2n'}} = \frac{1}{u_{2m'}}$ qui implique alors $u_{2n'} = u_{2m'}$ qui elle-même implique $u_{n'} = u_{m'}$.
- Si $r > 1$ alors il existe deux entiers n' et m' tels que $n = 2n'$ et $m = 2m'$.
  L'égalité $u_n = u_m$ implique $u_{n'} = u_{m'}$.

Dans les deux cas $u_n = u_m$ implique $u_{n'} = u_{m'}$ où $n' < n$ et $m' < n$. On peut alors réitérer le processus mais la « suite des n » et la suite des m » sont des suites strictement décroissantes d'entiers naturels positifs. Cela signifie qu'on finira par trouver un n et un m tels que $u_n = u_1 = 1$ ou $u_m = u_1 = 1$ ce qui contredit le fait que les u_n soient soit strictement supérieurs à 1 soit strictement inférieurs à 1.

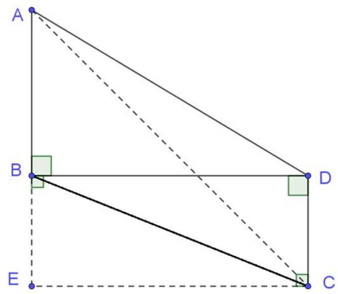
Géométrie – Nombres complexes

Exercice 1

Dans un quadrilatère convexe d'aire 32 cm², la somme des longueurs d'une diagonale et de deux côtés opposés est de 16 cm.
Déterminer toutes les valeurs possibles de la longueur de l'autre diagonale.



Soit ABCD un tel quadrilatère. On note $\mathrm{BD} = l, \mathrm{AH} = d, \mathrm{CK} = d'$ et on cherche to
valeurs possibles de AC.
On sait que :
$32 = \frac{l \times d}{2} + \frac{l \times d'}{2} = \frac{l(d+d')}{2}$ soit $l(d+d') = 64$ et $\mathrm{AB} + l + \mathrm{DC} = 16$.
Or, pour tout réels positifs a, b, $\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 = a + b - 2\sqrt{ab}$. Comme un carré est positif ou nul, on en déduit que $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.
Ici $\sqrt{l(d+d')} \leq \frac{l+d+d'}{2} \leq \frac{l+\mathrm{AB}+\mathrm{DC}}{2}$.
Comme $\sqrt{l(d+d')} = 8 = \frac{l+\mathrm{AB}}{2}$, la seule possibilité est d'avoir une égalité dans toutes les inégalités ci-dessus soit $d = \mathrm{AB}$ et $d' = \mathrm{DC}$ et $l = d + d' = 8$.
Les triangles ABD et DBC sont alors rectangles respectivement en D.
Dans le triangle AEC rectangle en E, d'après le théorème de Pythagore :
$AC^2 = AE^2 + EC^2 = (d+d')^2 + l^2 = 64 + 64$
D'où $\mathrm{AC} = 8\sqrt{2}$.



Exercice 2

1. Soit u et v deux nombres complexes. Montrer que $|u| + |v| \leq |u+v| + |u-v|$.
2. Soit u_1, u_2, u_3, u_4 quatre nombres complexes. Montrer que :
$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + |u_4| \leq |u_1+u_2| + |u_1+u_3| + |u_1+u_4| + |u_2+u_3| + |u_2+u_4| + |u_3+u_4|$$

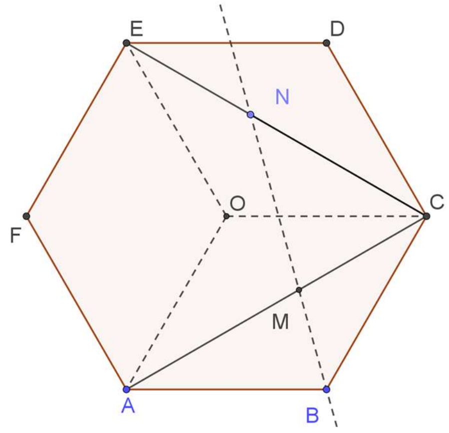
1. On part des égalités $\frac{u+v}{2} + \frac{u-v}{2} = u$ et $\frac{u+v}{2} - \frac{u-v}{2} = v$ et, en appliquant l'inégalité triangulaire, on obtient :
$|u| + |v| \leq \left|\frac{u+v}{2}\right| + \left|\frac{u-v}{2}\right| + \left|\frac{u+v}{2}\right| + \left|\frac{u-v}{2}\right|$. Comme $\left|\frac{u+v}{2}\right| = \frac{1}{2}|u+v|$ et $\left|\frac{u-v}{2}\right| = \frac{1}{2}|u-v|$, on en déduit que
$|u| + |v| \leq |u+v| + |u-v|$.
2. D'après la question précédente, $|u_1| + |u_2| + |u_3| + |u_4| \leq |u_1+u_2| + |u_1-u_2| + |u_3+u_4| + |u_3-u_4|$
et $|u_1-u_2| + |u_3-u_4| \leq |(u_1-u_2) + (u_3-u_4)| + |(u_1-u_2) - (u_3-u_4)|$
soit $|u_1-u_2| + |u_3-u_4| \leq |(u_1+u_3) - (u_2+u_4)| + |(u_1+u_4) - (u_2+u_3)|$
d'où $|u_1-u_2| + |u_3-u_4| \leq |u_1+u_3| + |u_2+u_4| + |u_1+u_4| + |u_2+u_3|$
Au final, on a bien (en ajoutant $|u_1+u_2| + |u_3+u_4|$) :
$|u_1| + |u_2| + |u_3| + |u_4| \leq |u_1+u_2| + |u_1+u_3| + |u_1+u_4| + |u_2+u_3| + |u_2+u_4| + |u_3+u_4|$

Exercice 3

Soit ABCDEF un hexagone régulier. On considère des points M et N situés respectivement sur [AC] et [CE] de telle sorte que $\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AC}} = \frac{\mathrm{CN}}{\mathrm{CE}} = a$.
Déterminer le réel a tel que les points B, M et N soient alignés

Les données du problème se traduisent par $\overrightarrow{AM} = a\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CN} = a\overrightarrow{CE}$?
Alors $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AB} + a\overrightarrow{AC}$
Et $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} + a\overrightarrow{CE}$.
Or l'hexagone étant régulier :
$\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} = -3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$
Donc $\overrightarrow{BN} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + a\left(-3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) = (-1 - 3a)\overrightarrow{AB} + (1 + a)\overrightarrow{AC}$.
Si on se place dans le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$, on a $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}-1\\ a\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BN}\begin{pmatrix}-1-3a\\ 1+a\end{pmatrix}$.
Les points B, M et N sont donc alignés si et seulement si
$(-1)(1 + a) - (a)(-1 - 3a) = 0$
Soit $-1 - a + a + 3a^2 = 0$ soit $3a^2 = 1$.

soit, puisque comme quotient de distances $a \geq 0$, $a = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

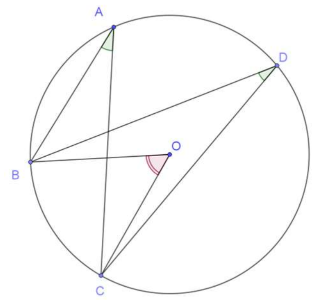


Exercice 4

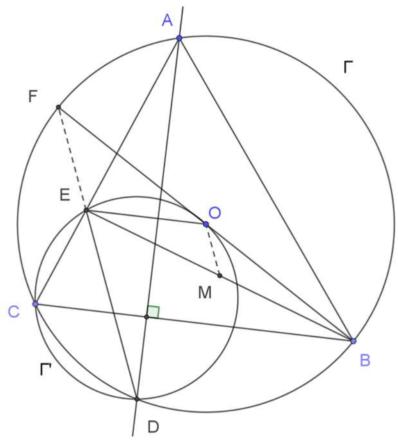
Soient ABC un triangle dont tous les angles sont aigus, Γ son cercle circonscrit, et O le centre de Γ. La hauteur de ABC issue de A recoupe Γ en un point D distinct de A, et le segment $[AC]$ recoupe le cercle Γ' circonscrit à OCD en un point E distinct de C. Enfin, on note M le milieu du segment $[BE]$.
Démontrer que (DE) est parallèle à (OM).

Une propriété à connaitre :
Si quatre points sont situés sur un même cercle (c'est-à-dire cocycliques) comme sur la figure ci-contre alors :
Les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{BDC}$ sont appelés angles inscrits interceptant l'arc BC avec pour angle au centre correspondant $\widehat{BOC}$ et

$$\widehat{BOC} = 2\widehat{BAC} = 2\widehat{BDC}$$

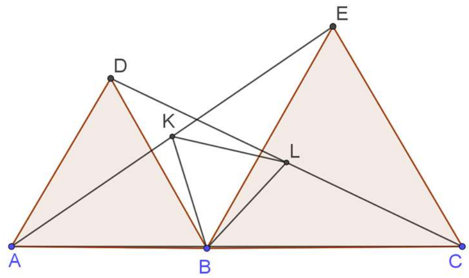


Soit F le symétrique de B par rapport au point O. Comme O et M sont les milieux respectifs de $[BF]$ et $[BE]$, les droites (OM) et (FE) sont parallèles.
Montrons alors que les points D, E et F sont alignés.
Sur le cercle Γ, les angles $\widehat{CAF}$ et $\widehat{CDF}$ interceptent le même arc CF donc $\widehat{CDF} = \widehat{CAF} = \widehat{BAF} - \widehat{BAC}$.
Comme F le symétrique de B par rapport au point O, centre du cercle, $[BF]$ est un diamètre du cercle donc $\widehat{BAF} = 90°$.
On en déduit que $\widehat{CAF} = 90° - \widehat{BAC}$.
D'autre part, en considérant les angles du triangle CDE,
$\widehat{CDE} = 180° - \widehat{DEC} - \widehat{ECD}$ car E appartient à $[AC]$
Or, en se plaçant sur le cercle Γ', $\widehat{DEC} = \widehat{DOC}$ donc
$\widehat{CDE} = 180° - \widehat{DOC} - \left(\widehat{ACB} + \widehat{BCD}\right)$
Sur le cercle Γ, $\widehat{DOC} = 2\widehat{DAC}$ (angle au centre et angle inscrit interceptant le même arc) et $\widehat{BCD} = \widehat{BAD}$ (angles inscrits interceptant le même arc).
Donc $\widehat{CDE} = 180° - 2\widehat{DAC} - \widehat{ACB} - \widehat{BAD}$.
Or, comme (AD) est perpendiculaire à (BC), $\widehat{DAC} = 180° - 90° - \widehat{ACB}$ et $\widehat{BAD} = 180° - 90° - \widehat{ABC}$.
On en déduit que $\widehat{CDE} = 180° - 2\left(180° - 90° - \widehat{ACB}\right) - \widehat{ACB} - \left(180° - 90° - \widehat{ABC}.\right)$
soit $\widehat{CDE} = \widehat{ACB} + \widehat{ABC} - 90° = 180° - \widehat{BAC} - 90° = 90° - \widehat{BAC}$
On constate donc que $\widehat{CDF} = \widehat{CDE}$ et donc que les points D, E, F sont alignés. Comme les droites (OM) et (FE) sont parallèles, on peut affirmer que les droites (OM) et (DE) sont parallèles.



Exercice 5

1. Soit $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ trois points alignés dans cet ordre. Du même côté de la droite (AC), on construit les points D et E tels que les triangles ABD et BCE sont équilatéraux. On note K et L les milieux respectifs des segments $[\mathrm{AE}]$ et $[\mathrm{CD}]$. Montrer que le triangle BKL est équilatéral.
2. Soit ABCD un quadrilatère convexe. On note K et L les milieux respectifs des segments $[\mathrm{AC}]$ et $[\mathrm{BD}]$. Montrer que si $\mathrm{AD}^2+\mathrm{BC}^2=2\mathrm{KL}^2$ alors le quadrilatère est un parallélogramme.



1. Sans réduire la généralité, on construit dans le plan orienté les points D et E tels que les triangles ABD et BCE sont équilatéraux directs.
Si on note les affixes des points par les lettres minuscules associées aux lettres majuscules de ces points, cela se traduit par les égalités :
$d-a=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(b-a)$ et $e-b=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(c-b)$.
Soit $d=a+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(b-a)$ et $e=b+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(c-b)$.
D'autre part, comme K et L les milieux respectifs des segments $[\mathrm{AE}]$ et $[\mathrm{CD}]$, $k=\frac{a+e}{2}$ et $l=\frac{c+d}{2}$.
On en déduit que $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(l-b)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\left(\frac{c+d}{2}-b\right)=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}{2}\left(c+a+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(b-a)-2b\right)$
soit $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(l-b)=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}{2}(c-b)+\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}{2}(a-b)+\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}}{2}(b-a)=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}{2}(c-b)+\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}{2}(a-b)+\frac{\left(-1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right)}{2}(b-a)$.
En effet $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}=-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}=-1+\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}=-1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.
Donc $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(l-b)=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}{2}(c-b)+\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}{2}(a-b)-\frac{b-a}{2}+\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}{2}(b-a)=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}{2}(c-b)-\frac{b-a}{2}$
soit $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(l-b)=\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(c-b)+a-b\right)=\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(c-b)+a+b-2b\right)=\frac{1}{2}(a+e)-b=k-b$.
Or l'égalité $k-b=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(l-b)$ signifie que le triangle BLK est équilatéral direct.
2. On note à nouveau par une minuscule associée à une majuscule les affixes des points. L'égalité $\mathrm{AD}^2+\mathrm{BC}^2=2\mathrm{KL}^2$ s'écrit alors $(d-a)(\bar{d}-\bar{a})+(c-b)(\bar{c}-\bar{b})=2(l-k)(\bar{l}-\bar{k})$
Or $k=\frac{a+c}{2}$ et $l=\frac{b+d}{2}$ donc $2(l-k)(\bar{l}-\bar{k})=2\times\frac{1}{2}(a+c-b-d)\times\frac{1}{2}(\bar{a}+\bar{c}-\bar{b}-\bar{d})$
soit $2(l-k)(\bar{l}-\bar{k})=\frac{1}{2}((a-d)+(c-b))\left((\bar{a}-\bar{d})+(\bar{c}-\bar{b})\right)$
soit $2(l-k)(\bar{l}-\bar{k})=\frac{1}{2}\left((a-d)(\bar{a}-\bar{d})+(c-b)(\bar{c}-\bar{b})+(a-d)(\bar{c}-\bar{b})+(c-b)(\bar{a}-\bar{d})\right)$
Comme $(a-d)(\bar{a}-\bar{d})=(d-a)(\bar{d}-\bar{a})$, l'égalité $\mathrm{AD}^2+\mathrm{BC}^2=2\mathrm{KL}^2$ s'écrit
$2(a-d)(\bar{a}-\bar{d})+2(c-b)(\bar{c}-\bar{b})=(a-d)(\bar{a}-\bar{d})+(c-b)(\bar{c}-\bar{b})+(a-d)(\bar{c}-\bar{b})+(c-b)(\bar{a}-\bar{d})$
soit $(a-d)(\bar{a}-\bar{d})+(c-b)(\bar{c}-\bar{b})-(a-d)(\bar{c}-\bar{b})+(c-b)(\bar{a}-\bar{d})=0$
soit $(a-d)(\bar{a}-\bar{d}-\bar{c}+\bar{b})+(c-b)(\bar{c}-\bar{b}+\bar{a}-\bar{d})=0$
soit $(a-d-c+b)(\bar{a}-\bar{d}+\bar{c}-\bar{b})=0$
soit $a-d=b-c$ ou $\bar{a}-\bar{d}=\bar{b}-\bar{c}$ (ce qui revient au même)
soit $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ ce quin signifie que le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.

Exercice 6 – Addition sur une parabole – Extrait CG 2025

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Pour tout point M du plan, on note (x_M,y_M) ses coordonnées.
Soit $\mathcal{P}$ la parabole d'équation $y=x^2$ et Δ la droite d'équation $y=-1$.
Pour tous points A et B de $\mathcal{P}$ tels que $y_A\neq y_B$, on note $A\oplus B$ le point de $\mathcal{P}$ dont l'abscisse est celle du point d'intersection des droites (AB) et Δ.

1. Soit A et B deux points de $\mathcal{P}$ tels que $y_A\neq y_B$. Exprimer $x_{A\oplus\mathrm{B}}$ en fonction de x_A et x_B.
2. Soit A, B et C trois points de $\mathcal{P}$. On suppose que $y_A\neq y_B$, $y_{A\oplus B}\neq y_C$, $y_B\neq y_C$, $y_A\neq y_{B\oplus C}$.
Démontrer que les points $(A\oplus B)\oplus C$ et $A\oplus(B\oplus C)$ sont confondus.

Pour tout point A de $\mathcal{P}$ distinct du point O (de coordonnées $(0,0)$), on note $A\oplus A$ le point de $\mathcal{P}$ dont l'abscisse est celle du point d'intersection de la tangente à $\mathcal{P}$ en A et de Δ.

3. Soit A un point de $\mathcal{P}$ distinct du point O.
   - **a.** Exprimer $x_{A\oplus A}$ en fonction de x_A.
   - **b.** Soit B un point de $\mathcal{P}$ tel que $y_{A\oplus A} \neq y_B, y_A \neq y_B, y_A \neq y_{A\oplus B}$.
   Démontrer que les points $(A\oplus A)\oplus B$ et $A\oplus(A\oplus B)$ sont confondus.

1. Par définition, l'abscisse du point $A\oplus B$ est l'abscisse x_M du point M d'intersection des droites (AB) et Δ. On commence par chercher une équation de la droite (AB). Les points A et B sont des points de $\mathcal{P}$. Ils ont donc pour coordonnées respectives (x_A, x_A^2) et (x_B, x_B^2).

Un point $M(x_M, y_M)$ appartient à (AB)et à Δ si et seulement si $y_M = -1$ et les vecteurs $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x_M - x_A \\ y_M - x_A^2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ x_B^2 - x_A^2 \end{pmatrix}$ sont colinéaires. On en déduit l'égalité $(x_M - x_A)(x_B^2 - x_A^2) - (-1 - x_A^2)(x_B - x_A) = 0$

soit $(x_B - x_A)\left((x_M - x_A)(x_B + x_A) - (-1 - x_A^2)\right) = 0$

c'est-à-dire, puisque $y_A \neq y_B$ donc $x_A \neq x_B$, $-1 - x_A^2 = (x_M - x_A)(x_B + x_A)$

soit $-1 = (x_B + x_A)x_M + x_A^2 - x_A(x_B + x_A)$

soit $-1 = (x_B + x_A)x_M - x_A x_B$ soit $(x_B + x_A)x_M = -1 + x_A x_B$

Or $y_A \neq y_B$ donc $x_A \neq -x_B$ et on en déduit que $x_{A\oplus B} = x_M = \frac{x_A x_B - 1}{x_B + x_A}$.

2. $y_A \neq y_B, y_{A\oplus B} \neq y_C$ donc $x_A \neq \pm x_B$ et $x_{A\oplus B} \neq \pm x_C$. En appliquant le résultat précédent aux points $A\oplus B$ et C, on obtient

$$x_{(A\oplus B)\oplus C} = \frac{x_{A\oplus B} x_C - 1}{x_{A\oplus B} + x_C} = \frac{\frac{x_A x_B - 1}{x_B + x_A} x_C - 1}{\frac{x_A x_B - 1}{x_B + x_A} + x_C} = \frac{x_A x_B x_C - x_C - x_A - x_B}{x_A x_B - 1 + x_A x_C + x_B x_C}.$$

De même $y_B \neq y_C, y_A \neq y_{B\oplus C}$ donc $x_C \neq \pm x_B$ et $x_{B\oplus C} \neq \pm x_A$ d'où

$$x_{A\oplus(B\oplus C)} = \frac{x_A x_{B\oplus C} - 1}{x_A + x_{B\oplus C}} = \frac{x_A \frac{x_B x_C - 1}{x_B + x_C} - 1}{x_A + \frac{x_B x_C - 1}{x_B + x_C}} = \frac{x_A x_B x_C - x_A - x_B - x_C}{x_A x_B + x_A x_C + x_B x_C - 1}.$$

On constate que $x_{(A\oplus B)\oplus C} = x_{A\oplus(B\oplus C)}$. Comme les deux points $(A\oplus B)\oplus C$ et $A\oplus(B\oplus C)$ sont des points de $\mathcal{P}$ on peut affirmer qu'ils sont confondus.

3. a. La tangente à $\mathcal{P}$ au point A a pour équation $y = x_A^2 + 2x_A(x - x_A)$ soit $y = 2x_A x - x_A^2$. Comme l'abscisse de $A\oplus A$ est celle du point d'intersection de cette tangente et de Δ, $-1 = 2x_A x_{A\oplus A} - x_A^2$ soit $x_{A\oplus A} = \frac{x_A^2 - 1}{2x_A}$, ce qui a bien un sens car A et O sont deux points distincts de $\mathcal{P}$ donc $x_A \neq 0$.

b. $y_{A\oplus A} \neq y_B$ donc $x_{A\oplus A} \neq \pm x_B$ et $x_A \neq 0$. On peut donc écrire

$$x_{(A\oplus A)\oplus B} = \frac{x_{A\oplus A} x_B - 1}{x_{A\oplus A} + x_B} = \frac{\frac{x_A^2 - 1}{2x_A} x_B - 1}{\frac{x_A^2 - 1}{2x_A} + x_B} = \frac{(x_A^2 - 1)x_B - 2x_A}{x_A^2 - 1 + 2x_A x_B} = \frac{x_A^2 x_B - x_B - 2x_A}{x_A^2 - 1 + 2x_A x_B}$$

$y_A \neq y_B, y_A \neq y_{A\oplus B}$ donc $x_A \neq \pm x_B, x_A \neq \pm x_{A\oplus B}$. On peut donc écrire

$$x_{A\oplus(A\oplus B)} = \frac{x_A x_{A\oplus B} - 1}{x_A + x_{A\oplus B}} = \frac{x_A \frac{x_A x_B - 1}{x_B + x_A} - 1}{x_A + \frac{x_A x_B - 1}{x_B + x_A}} = \frac{x_A^2 x_B - x_A - x_B - x_A}{x_A(x_B + x_A) + x_A x_B - 1} = \frac{x_A^2 x_B - 2x_A - x_B}{x_A^2 + 2x_A x_B - 1}$$

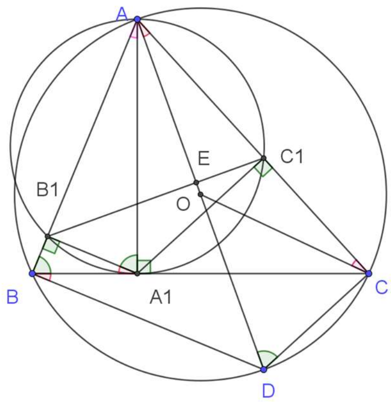
On constate que $x_{(A\oplus A)\oplus B} = x_{A\oplus(A\oplus B)}$. Comme les deux points $(A\oplus A)\oplus B$ et $A\oplus(A\oplus B)$ sont des points de $\mathcal{P}$ on peut affirmer qu'ils sont confondus.

Exercice 7

Soit ABC un triangle inscrit dans un cercle Γ. On note A_1 le projeté orthogonal de A sur (BC), B_1 le projeté orthogonal de A_1 sur (AB) et C_1 le projeté orthogonal de A_1 sur (AC).

Est-il possible de trouver un point P intérieur au cercle et tel que la quadrilatère AB_1PC_1 soit convexe et de même aire que le triangle ABC ?

Soit D le point diamétralement opposé à A sur le cercle Γ. On va commen
montrer que le quadrilatère AB_1DC_1 a la même aire le triangle ABC.
Pour cela, on commence par montrer que (AD) est perpendiculaire à (B_1C_1).
Les triangles AA_1B_1 et BA_1B_1 sont tous les deux rectangles et ont leurs côté
deux perpendiculaires. Ils sont donc semblables et $\widehat{ABC} = \widehat{B_1A_1A}$
D'autre part, les triangles AA_1B_1 et AA_1C_1 sont rectangles de même hypoténus
donc leur cercle circonscrit est le même, celui de diamètre $[AA_1]$. Le
A, B_1, A_1, C_1 sont cocycliques d'où $\widehat{AC_1B_1} = \widehat{AA_1B_1} = \widehat{ABC}$.
On remarque alors que les triangles ABC et AB_1C_1 ont deux angles de même
et sont donc semblables.
Si on note O le centre de Γ et D le point diamétralement opposé à A sur Γ alo
le triangle AOC isocèle en O,



$\widehat{OAC} = \frac{1}{2}\left(180° - \widehat{AOC}\right) = 90° - \widehat{ABC}$ car $\widehat{AOC}$ est l'angle au centre associé à $\widehat{ABC}$.

Donc $\widehat{OAC} = 90° - \widehat{B_1A_1A}$ soit $\widehat{OAC} + \widehat{B_1A_1A} = 90°$. Si on note E le point d'intersection de (AD) et (B_1C_1), dans le triangle AEC_1, on a donc $\widehat{AEC_1} = 180° - \widehat{OAC} - \widehat{B_1A_1A} = 90°$.

Cela signifie que (AD) est perpendiculaire à (B_1C_1). L'aire du quadrilatère AB_1DC_1 est donc égale à $\frac{B_1C_1 \times AD}{2}$.

Or, si on note R le rayon de Γ, $AD = 2R$. D'autre part, les triangles ABC et AB_1C_1 étant semblables, $\frac{B_1C_1}{BC} = \frac{AC_1}{AB}$ et $\widehat{ACB} = \widehat{AB_1C_1}$ d'où $B_1C_1 = BC \times \frac{AC_1}{AB}$ et $\sin\widehat{ACB} = \sin\widehat{AB_1C_1}$.

Or d'après loi des sinus dans le triangle ABC, $\frac{BC}{\sin\widehat{BAC}} = \frac{AB}{\sin\widehat{ACB}} = 2R$ d'où $\frac{BC}{AB} = \frac{\sin\widehat{BAC}}{\sin\widehat{ACB}} = \frac{\sin\widehat{BAC}}{\sin\widehat{AB_1C_1}}$

Or, les points A, B_1, A_1, C_1 étant cocycliques $\widehat{AB_1C_1} = \widehat{AA_1C_1}$ et donc $\sin\widehat{AB_1C_1} = \sin\widehat{AA_1C_1} = \frac{AC_1}{AA_1}$

Donc $BC \times \frac{AC_1}{AB} = AC_1 \frac{\sin\widehat{BAC}}{\frac{AC_1}{AA_1}} = AA_1 \sin\widehat{BAC}$ et l'aire du quadrilatère AB_1DC_1 est donc égale à :

$\frac{2R \times AA_1 \sin\widehat{BAC}}{2} = \frac{AA_1 \times BC}{2}$ qui est l'aire du triangle ABC.

Comme les points B_1 et C_1 sont fixes, l'ensemble des points P tels que l'aire du quadrilatère convexe AB_1PC_1 soit égale à l'aire du triangle ABC est sur une droite perpendiculaire en D à la droite (AD). Comme cette droite est tangente en D au cercle Γ, le point P ne peut pas se trouver à l'intérieur de Γ.

Probabilités – dénombrement

Exercice 1

Un programme génère des nombres aléatoires entre 0 et 1. Le programme est conçu de telle sorte que pour tout réel x de 0 à 1, la probabilité qu'il génère un nombre plus petit que x est trois fois plus grande que celle qu'il génère un nombre plus petit que $\frac{x}{4}$. De plus, la probabilité qu'il génère un nombre supérieur ou égal à x est identique à la probabilité qu'il génère un nombre plus petit que $1-x$.

Calculer la probabilité que ce programme nous donne un nombre plus petit que $\frac{1}{21}$.

On note $P(x)$ la probabilité que le programme génère un nombre inférieur à x. D'après les données de l'énoncé $P(x)=3P\left(\frac{x}{4}\right)$

et la probabilité que le programme génère un nombre z supérieur ou égal à x est $1-P(x)=P(1-x)$ (événements contraires l'un de l'autre).

On a donc $P\left(\frac{1}{21}\right)=1-P\left(1-\frac{1}{21}\right)=1-P\left(\frac{20}{21}\right)=1-3P\left(\frac{1}{4}\times\frac{20}{21}\right)=1-3P\left(\frac{5}{21}\right)=1-3\left(1-P\left(1-\frac{5}{21}\right)\right)$

soit $P\left(\frac{1}{21}\right)=-2+3P\left(\frac{16}{21}\right)=-2+9P\left(\frac{1}{4}\times\frac{16}{21}\right)=-2+9P\left(\frac{4}{21}\right)=-2+27P\left(\frac{1}{21}\right)$

soit $26P\left(\frac{1}{21}\right)=2$ c'est-à-dire $P\left(\frac{1}{21}\right)=\frac{1}{13}$.

Exercice 2

On considère une grille rectangulaire de 2 rangées de 13 cases qu'on veut entièrement recouvrir de dominos de 1 case sur 2 ou de 1 case sur 3, sans chevauchement et en posant les dominos tous dans le même sens.

De combien de façons peut-on le faire ?

<u>1er cas :</u>

Si tous les dominos sont verticaux, il n'y a qu'une possibilité : 13 colonnes de dominos 1×2.

<u>2e cas :</u>

Si tous les dominos sont horizontaux, pour chaque rangée, il y a deux types de configurations : 5 dominos 1×2 et 1 domino 1×3 ou 2 dominos 1×2 et 3 dominos 1×3. En effet on doit alors décomposer 13 en une somme de multiple de 2 et de multiples de 3. Les multiples de 3 inférieurs ou égaux à 13 sont 3, 6, 9 et 12. Et parmi les nombres $13-3=10, 13-6=7, 13-9=4, 13-12=1$, seuls 10 et 4 sont des multiples de 2.

Le nombre de configurations de la répartition 3 3 3 2 2 est le nombre $\binom{5}{3}=10$.

Le nombre de configurations de la répartition 3 2 2 2 2 2 est le nombre $\binom{6}{1}=6$.

Pour chaque rangée on a donc $10+6=16$ possibilités et on peut répartir les deux rangées de façons indépendantes. Dans ce cas, on a donc $16^2 6=225$ configurations possibles.

Au total, il y a donc $1+256=257$ façons de placer les dominos.

Exercice 3

Un professeur distribue 36 crayons de plusieurs couleurs à chacun de ses 37 étudiants de telle façon que chaque paire d'étudiants reçoit exactement un crayon de la même couleur.

Déterminer le plus petit nombre de couleurs différentes permettant de réaliser cette distribution.

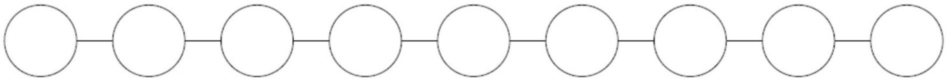
Le premier étudiant reçoit 36 crayons de plusieurs couleurs. Le deuxième étudiant reçoit aussi 36 crayons parmi lesquels un seul crayon a la même couleur qu'un stylo du premier étudiant et doit donc recevoir 35 crayons de couleurs différentes de celles du premier étudiant. En poursuivant le raisonnement, le k^e étudiant reçoit 36 crayons parmi lesquels $k-1$ crayons ont la même couleur que l'un des crayons de chaque étudiant déjà doté en crayons. Le k^e étudiant doit donc avoir $36-(k-1)$ crayons de couleurs différentes de celles des crayons reçus par la $k-1$ premiers étudiants. On doit donc avoir au minimum $36+35+34+\cdots+1=\frac{36\times 37}{2}=\binom{37}{2}$.

Réciproquement, $\binom{37}{2}$ est le nombre de paires de nombres choisis dans l'ensemble $\{1, 2, 3, \ldots, 37\}$. Donc, si on dispose de $\binom{37}{2}$ crayons et si on associe chaque couleur à une paire $\{a, b\}$ de nombres de l'ensemble $\{1, 2, 3, \ldots, 37\}$, on attribue un crayon de même couleur aux a^e et b^e étudiants et cela correspond à la répartition demandée.

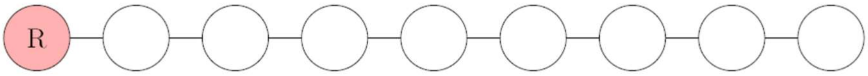
Exercice 4

Les 9 joueurs d'une équipe de baseball sont assis autour d'une table ronde. On leur apporte 9 casquettes : 3 rouges, 3 vertes et 3 bleues. On distribue les casquettes de sorte que chaque joueur ait une casquette d'une couleur différente de celle de ses deux voisins. Calculer le nombre de manières de distribuer les casquettes aux 9 joueurs.

On commence par représenter les 9 joueurs par une chaîne de cercles comme ci-dessous.



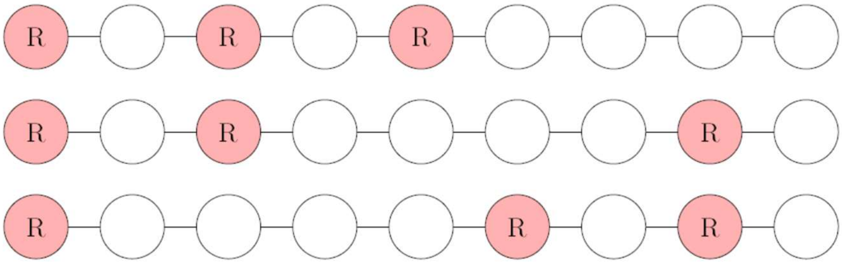
Tous les joueurs reliés par un trait sont voisins. Il en va de même pour les deux joueurs aux deux bouts de la chaîne. Sans perte de généralité, on peut fixer le premier cercle en rouge et multiplier à la fin par 3 (nombre de couleurs possibles) le résultat trouvé.



On sépare maintenant en catégories la manière de placer les deux autres casquettes rouges.

<u>Catégorie 1-1-4</u>

Dans cette catégorie, entre deux casquettes rouges, on a soit 1 ou 4 casquettes d'autres couleurs. On a 3 possibilités avant de placer les autres casquettes.

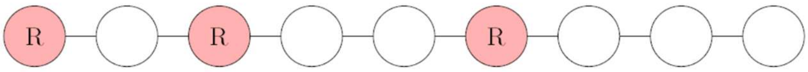


Pour chacun de ces 3 cas, on doit placer les casquettes bleues et vertes. On peut remarquer que dans le groupe de 4, on a deux possibilités. Soit Vert-Bleu-Vert-Bleu ou bien Bleu-Vert-Bleu-Vert. De même, dans les deux groupes de 1 casquettes, on peut placer Vert-Bleu ou bien Bleu-Vert. On ne peut en effet avoir Bleu-Bleu comme Vert-Vert car alors il serait impossible d'avoir des casquettes voisines de couleurs différentes dans le groupe de 4.

Cela nous fait un nombre de possibilités de $3 \times 2 \times 2 = 12$.

<u>Catégorie 1-2-3</u>

Dans cette catégorie, entre deux casquettes rouges, on a soit 1, 2 ou 3 casquettes d'autres couleurs. On a 6 possibilités de base avant de placer les autres casquettes.



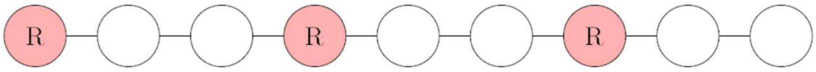
Il y a 6 possibilités, contrairement à la catégorie 1-1- 4, car ici, on peut aussi inverser la direction du placement des casquettes rouges (de droite à gauche ainsi que de gauche à droite).

Pour chacun de ces 6 cas, on doit placer les casquettes bleues et vertes. On peut remarquer que dans le groupe de 2, on a deux possibilités. Soit Vert-Bleu ou bien Bleu-Vert. De même, dans le groupe de trois casquettes, on peut placer Vert-Bleu- Vert ou bien Bleu-Vert-Bleu (le groupe d'un élément prendra la casquette restante).

Cela nous fait un nombre de possibilités de $6 \times 2 \times 2 = 24$.

<u>Catégorie 2-2-2</u>

Enfin, dans cette catégorie, entre deux casquettes rouges, on a 2 casquettes de d'autres couleurs. On a une seule possibilité de base avant de placer les autres casquettes.



On doit placer les casquettes bleues et vertes. On peut remarquer que dans chaque groupe de 2, on a deux possibilités. Soit Vert-Bleu ou bien Bleu-Vert.
Cela nous fait un nombre de possibilités de $1 \times 2 \times 2 \times 2 = 8$.
Au final, on a $3 \times (12 + 24 + 8) = 132$ façons de distribuer les 9 casquettes sur les 9 joueurs.

Exercice 5

Un cinéphile a vu 25 films en 2025, assistant à au plus une séance par jour, selon les hasards de la programmation et de ses humeurs.
Quelle est la probabilité qu'il ait vu un film au moins deux jours de suite ?

L'année 2025 comprend 365 jours. Le nombre de jours sans film est donc de 340 jours.
Notons A l'événement : le cinéphile voit un film au moins deux jours de suite et $\bar{A}$ l'événement contraire.
On peut modéliser $\bar{A}$ de la façon suivante : on dispose $N = 340$ points rouges sur une droite. Ils représentent les jours sans film. Ils déterminent $N - 1$ intervalles.
On choisit $r = 25$ de ces intervalles dans lesquels on place un seul point bleu. Ils représentent les jours avec un film.
Les $N + r = 365$ points rouges et bleus représentent les jours de l'année 2025.
Le nombre de choix de ces intervalles est $\binom{N-1}{r}$. Le nombre de choix de r jours parmi les $N + r$ de l'année est $\binom{N+r}{r}$. Le hasard assurant l'équiprobabilité, la probabilité de l'événement $\bar{A}$ est
$p(\bar{A}) = \frac{\binom{N-1}{r}}{\binom{N+r}{r}} = \frac{(N-1)!}{(N-1-r)!r!} \times \frac{(N+r-r)!r!}{(N+r)!} = \frac{(N-1)!N!}{(N-1-r)!(N+r)!}$ et donc $p(A) = 1 - p(\bar{A})$.

Exercice 6

1. Soit n, p, q trois entiers tels que $0 \leq p \leq n$ et $0 \leq q \leq p$. Exprimer, en fonction de n, la somme $\sum_{p=0}^{p=n} \sum_{q=0}^{q=p} (p+q)$.
2. Démontrer que si m, n, k sont trois entiers tels que $0 \leq k \leq \min(m, n)$ alors
$$\binom{m+n}{k} = \binom{n}{0}\binom{m}{k} + \binom{n}{1}\binom{m}{k-1} + \cdots + \binom{n}{k}\binom{m}{0}.$$

1. $S = \sum_{p=0}^{p=n} \sum_{q=0}^{q=p} (p+q)$ peut être calculé en regroupant les termes dans lesquels la somme $p+q$ a la même valeur, cette valeur allant de 1 à $2n$.
$\underline{S = \underbrace{(1+0)}_{p+q=1} + \underbrace{\big((2+0)+(1+1)\big)}_{p+q=2} + \underbrace{\big((3+0)+(2+1)\big)}_{p+q=3} + \underbrace{\big((4+0)+(3+1)+(2+2)}_{p+q=4} +}$
$\underline{\underbrace{\big((5+0)+(4+1)+(3+2)}_{p+q=5} + \cdots + \underbrace{\big((2n-2+0)+(2n-3+1)+\cdots+(n-1+n-1)\big)}_{p+q=2n-2} +}$
$\underline{\underbrace{\big((2n-1+0)+(2n-2+1)+\cdots+(n+n-1)\big)}_{p+q=2n-1} + \underbrace{\big((2n+0)+(2n-1+1)+\cdots+(n+n)\big)}_{p+q=2n}}$.
On peut regrouper ainsi les termes :
$S = 1 + 2(2+3) + 3(4+5) + \cdots + n\big((2n-2)+(2n-1)\big) + (n+1)2n$
soit $S = 1 + \sum_{k=2}^{k=n} k(4k-3) + 2n(n+1) = 1 + 4\sum_{k=2}^{k=n} k^2 - 3\sum_{k=2}^{k=n} k + 2n(n+1)$
soit $S = 1 + 4\sum_{k=1}^{k=n} k^2 - 4 - 3\sum_{k=1}^{k=n} k + 3 + 2n(n+1)$
c'est-à-dire $S = 4\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 3\frac{n(n+1)}{2} + 2n(n+1) = \frac{n(n+1)}{6}(4(2n+1) - 9 + 12)$
soit $S = \frac{n(n+1)}{6}(8n+7)$.
<u>Remarque :</u> comme S est une somme d'entiers, on en déduit que, pour tout entier naturel non nul n, $\frac{n(n+1)}{6}(8n+7)$ est un entier, ce qui peut se démontrer facilement en considérant les congruences modulo 3 de l'entier n.

2. On considère le polynôme $(1+x)^{n+m} = \sum_{k=0}^{k=n+m} \binom{m+n}{k} x^k$. Le coefficient de x^k est $\binom{m+n}{k}$.
Ce polynôme est aussi le produit $(1+x)^n(1+x)^m = \left(\sum_{i=0}^{i=n} \binom{n}{i} x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{j=m} \binom{m}{j} x^j\right)$
Le coefficient de x^kest alors obtenu en sommant les $\binom{n}{i}\binom{m}{j}$ pour tous les i et j tels que $i+j=k$, ce qui revient à $\binom{m+n}{k} = \binom{n}{0}\binom{m}{k} + \binom{n}{1}\binom{m}{k-1} + \cdots + \binom{n}{k-1}\binom{m}{1} + \binom{n}{k}\binom{m}{0}$.

Exercice 7 – tiré du CG 2010

Une sonde envoyée sur Mars par l'UE a réussi à observer des traces de vie sur la Planète Rouge. Il s'agit d'une forme primitive de vie et les êtres observés seront appelés cellules. Les scientifiques ont pu observer les faits suivants :

- il y a trois espèces de cellules qui seront désignées par les lettres A, B, C ;
- la reproduction de cellules implique la participation de trois cellules « parents » ;
- il ne peut y avoir de reproduction que lorsque les trois parents sont « compatibles », c'est-à-dire qu'au moins deux sont de la même espèce.

On nota a, b, c les proportions respectives des cellules A, B, C observées. On a donc $a+b+c=1$.

1. Déterminer la probabilité p que trois cellules prises au hasard soient compatibles.

2. Montrer que $p \geq \frac{7}{9}$. On pourra d'abord établir une inégalité à c fixé.

3. Étude d'un scénario

Les scientifiques ont établi que lorsque les trois espèces de parents sont les mêmes la descendance est de la même espèce que ses parents. En revanche, lorsque deux parents sont d'une espèce α et que le troisième parent est d'une espèce β, alors le descendant est de l'espèce majoritaire α.
On va estimer l'évolution des proportions des différentes espèces au cours du temps. On note a_0, b_0, c_0 les proportions des différentes espèces à la génération 0 et on suppose que $a_0 > b_0 > c_0$. On note ensuite a_n, b_n, c_n les proportions des différentes espèces à la génération n.
Pour déterminer $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$, on prend au hasard trois cellules suivant les proportions a_n, b_n, c_n. Alors a_{n+1} est la probabilité que la descendance soit de type A sachant que les trois parents sont compatibles. De même pour b_{n+1}, c_{n+1}.

a. Montrer que $a_{n+1} = \frac{a_n^2(3-2a_n)}{1-6a_nb_nc_n}$, $b_{n+1} = \frac{b_n^2(3-2b_n)}{1-6a_nb_nc_n}$, $c_{n+1} = \frac{c_n^2(3-2c_n)}{1-6a_nb_nc_n}$.

b. Montrer que pour tout entier naturel n, $a_n > b_n > c_n$. En déduire que $a_n > \frac{1}{3}$, $b_n < \frac{1}{2}$ et $c_n < \frac{1}{3}$.

c. Vérifier que les suites $(a_n - b_n)$ et $(a_n - c_n)$ sont croissantes.

d. Prouver que les suites $(a_n), (b_n), (c_n)$convergent et déterminer leurs limites.

1. Trois cellules prises au hasard sont compatibles lorsqu'au moins deux sont de la même espèce. On note E l'événement « les trois cellules sont compatibles ». Si A, B, C désignent respectivement les événements « prendre une cellule A », « prendre une cellule B », « prendre une cellule C », alors l'événement contraire $\bar{E}$ correspond aux issues $ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA$.
Par définition de a, b, c et puisque les cellules sont prises au hasard, $p(A) = a, p(B) = b, p(C) = c$.
De plus comme le nombre cellules est très grand, on peut considérer que les événements A, B, C sont indépendants.
On a donc, $p(\bar{E}) = 6abc$ d'où $p = 1 - 6abc$.

2. Supposons c fixé.
Si $c = 0$ alors $p = 1$ donc $p \geq \frac{7}{9}$.
Si $c > 0$ alors $p = 1 - 6abc = 1 - 6ca(1-a-c) = 6ca^2 - 6c(1-c)a + 1$. p est une fonction polynôme de degré 2 de variable a, dont le coefficient de degré 2 est positif.
Cette fonction admet donc un minimum en $\frac{6c(1-c)}{2\times 6c} = \frac{1-c}{2}$ et ce minimum est égal à
$6c\left(\frac{1-c}{2}\right)^2 - 6c(1-c)\frac{1-c}{2} + 1 = 1 + 6c\frac{(1-c)^2}{4} - 6c\frac{(1-c)^2}{2} = 1 - 6c\frac{(1-c)^2}{4} = 1 - 3c\frac{(1-c)^2}{2}$.
On remarque que cette égalité est encore valable si $c = 0$.

Soit alors f la fonction définie sur $[0,1]$ par $f(c) = 1 - 3c\frac{(1-c)^2}{2}$.

La fonction f est dérivable sur $[0,1]$ et, pour tout réel c de $[0,1]$, $f'(c) = -\frac{3}{2}((1-c)^2 - 2c(1-c))$

soit $f'(c) = -\frac{3}{2}(1-c)(1-c-2c) = \frac{3}{2}(1-c)(3c-1)$

Sur $[0,1]$, $\frac{3}{2}(1-c) \geq 0$ donc $f'(c)$ a le signe de $(3c-1)$. On en déduit que la fonction f est décroissante sur $\left[0,\frac{1}{3}\right]$ et croissante sur $\left[\frac{1}{3},1\right]$. Elle admet donc un minimum en $\frac{1}{3}$ et ce minimum est égal à

$f(c) = 1 - 3 \times \frac{1}{3}\frac{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2}{2} = 1 - \frac{1}{2} \times \frac{4}{9} = 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$.

On peut donc affirmer que $p \geq \frac{7}{9}$.

3. **a.** On travaille avec la génération n et on note DA l'événement « la descendance est de type A ». Alors $a_{n+1} = p_E(DA \cap E) = \frac{p(DA\cap E)}{p(E)}$. On a montré que $p(E) = 1 - 6a_nb_nc_n$ (qui est un nombre positif)

L'événement $DA \cap E$ correspond aux issues comportant au moins deux fois l'espèce A soit les issues : $AAA, AAB, ABA, BAA, AAC, ACA, CAA$.

Donc $p(DA \cap E) = a_n^3 + 3a_n^2b_n + 3a_n^2c_n = a_n^2(a_n + 3b_n + 3c_n) = a_n^2(a_n + 3(1-a_n)) = a_n^2(3-2a_n)$.

D'où $a_{n+1} = \frac{a_n^2(3-2a_n)}{1-6a_nb_nc_n}$.

On démontre de même, par permutation, les deux autres égalités.

b. Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, $a_n > b_n > c_n$.

Initialisation : on sait par hypothèse que $a_0 > b_0 > c_0$

Hérédité : si pour un entier n, $a_n > b_n > c_n$ alors montrons que $a_{n+1} > b_{n+1} > c_{n+1}$.

Si on considère la fonction g définie sur $[0,1]$ par $g(x) = x^2(3-2x)$, on peut écrire :

$a_{n+1} = \frac{g(a_n)}{1-6a_nb_nc_n}$, $b_{n+1} = \frac{g(b_n)}{1-6a_nb_nc_n}$ et $c_{n+1} = \frac{g(c_n)}{1-6a_nb_nc_n}$.

Or la fonction g est dérivable sur $[0,1]$ et pour tout réel x de $[0,1]$, $g'(x) = 2x(3-2x) + x^2(-2) = 6x - 6x^2$ soit $g'(x) = 6x(1-x)$. Sur l'intervalle $[0,1]$, $g'(x) \geq 0$ donc la fonction g est croissante sur $[0,1]$.

En particulier, comme $a_n > b_n > c_n$, on peut écrire $g(a_n) > g(b_n) > g(c_n)$.

En divisant chaque membre de cet encadrement par $1 - 6a_nb_nc_n$ qui est positif, on obtient $a_{n+1} > b_{n+1} > c_{n+1}$.

Donc, pour tout entier naturel n, $a_n > b_n > c_n$.

On en déduit que $a_n > b_n$ et $a_n > c_n$ d'où, en additionnant les deux inégalités membre à membre, $2a_n > b_n + c_n$ soit, puisque $a_n + b_n + c_n = 1$, $2a_n > 1 - a_n$ soit $3a_n > 1$ c'est-à-dire $a_n > \frac{1}{3}$.

De même, $a_n > c_n$ et $b_n > c_n$ donc $a_n + b_n > 2c_n$ soit $1 - c_n > 2c_n$ soit $\frac{1}{3} > c_n$.

Si $b_n \geq \frac{1}{2}$ alors, comme $a_n > b_n$, $a_n + b_n > 2b_n$ donc $a_n + b_n > 1$ ce qui contredit $a_n + b_n + c_n = 1$.

Donc $b_n < \frac{1}{2}$.

c. Pour tout entier naturel n, $a_n - b_n > 0$ donc on peut étudier le sens de variation de la suite $(a_n - b_n)$ en comparant à 1 le quotient $\frac{a_{n+1}-b_{n+1}}{a_n-b_n}$.

Or $a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{1}{1-6a_nb_nc_n}\left(a_n^2(3-2a_n) - b_n^2(3-2b_n)\right) = \frac{1}{1-6a_nb_nc_n}(3(a_n^2 - b_n^2) - 2(a_n^3 - b_n^3) -)$

$a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{a_n-b_n}{1-6a_nb_nc_n}\left(3(a_n+b_n) - 2(a_n^2 + a_nb_n + b_n^2)\right) = \frac{a_n-b_n}{1-6a_nb_nc_n}\left(3(a_n+b_n) - 2((a_n+b_n)^2 - a_nb_n)\right)$

D'où $\frac{a_{n+1}-b_{n+1}}{a_n-b_n} = \frac{a_n-b_n}{1-6a_nb_nc_n}(3(1-c_n) - 2(1-c_n)^2 + 2a_nb_n) = . = \frac{1a_n-b_n}{1-6a_nb_nc_n}(1 + c_n - 2c_n^2 + 2a_nb_n)$

soit $\frac{a_{n+1}-b_{n+1}}{a_n-b_n} = \frac{1}{1-6a_nb_nc_n}(1 + c_n(1-2c_n) + 2a_nb_n)$.

Or $0 \leq c_n < \frac{1}{3}$ donc $c_n(1-2c_n) \geq 0$, $2a_nb_n > 0$ donc $1 - c_n(1-2c_n) + 2a_nb_n > 1$

et $0 < 1 - 6a_nb_nc_n \leq 1$

d'où $\frac{a_{n+1}-b_{n+1}}{a_n-b_n} > 1$ et on en déduit que la suite $(a_n - b_n)$ est croissante.

De même, on montrerait que $\frac{a_{n+1}-c_{n+1}}{a_n-c_n} = \frac{1}{1-6a_nb_nc_n}(1 - b_n(1-2b_n) + 2a_nc_n)$ d'où, comme $0 < b_n < \frac{1}{2}$, $\frac{a_{n+1}-c_{n+1}}{a_n-c_n} > 1$ et la suite $(a_n - c_n)$ est croissante.

d. Les suites $(a_n - b_n)$ et $(a_n - c_n)$ sont croissantes et bornées car les suites $(a_n), (b_n), (c_n)$ sont bornées. Les suites $(a_n - b_n)$ et $(a_n - c_n)$ convergent donc. Leur somme converge aussi.
Comme $a_n - b_n + a_n - c_n = 2a_n - (1 - a_n) = 3a_n - 1$, on peut affirmer que la suite (a_n) converge aussi.
Comme $a_n - (a_n - b_n) = b_n$, on peut aussi affirmer que la suite (b_n) converge.
Enfin, comme $a_n - (a_n - c_n) = c_n$, on peut aussi affirmer que la suite (c_n) converge.
La fonction f étant continue sur $[0,1]$, les différentes relations obtenues pour un entier n, deviennent si on note a, b, c les limites respectives es suites $(a_n), (b_n), (c_n)$:
$a + b + c = 1, a = \frac{a^2(3-2a)}{1-6abc}, \; b = \frac{b^2(3-2b)}{1-6abc}, \; c = \frac{c^2(3-2c)}{1-6abc}$.
Comme $a = 0$ est impossible car, puisque $1 \geq a \geq b \geq c \geq 0 \;\; b = c = 0$ et $a + b + c \neq 1$,
l'égalité $a = \frac{a^2(3-2a)}{1-6ab}$ équivaut à $a(3 - 2a) = 1 - 6abc$.
Les égalités $b = \frac{b^2(3-2b)}{1-6abc}, \; c = \frac{c^2(3-2c)}{1-6abc}$ deviennent alors $b = \frac{b^2(3-2b)}{a(3-2a)}, \; c = \frac{c^2(3-2c)}{a(3-2a)}$.
$b = \frac{b^2(3-2b)}{a(3-2a)}$ équivaut à $b\left(1 - \frac{b(3-2b)}{a(3-2a)}\right) = 0$ soit $b = 0$ ou $\frac{b(3-2b)}{a(3-2a)} = 1$.

$\frac{b(3-2b)}{a(3-2a)} = 1$ équivaut à $a(3 - 2a) = \; b(3 - 2b)$ soit $(a - b)\big(3 - 2(a + b)\big) = 0$
soit $(a - b)\big(3 - 2(1 - c)\big) = 0$ soit $(a - b)(1 + 2c) = 0$ qui ne peut être vérifié que si $a = b$ car $c \geq 0$.
Donc $b = \frac{b^2(3-2b)}{a(3-2a)}$ équivaut à $b = 0$ ou $a = b$.
De même $\;\; c = \frac{c^2(3-2c)}{a(3-2a)}$ équivaut à $c = 0$ ou $a = c$.
On étudie donc plusieurs cas :

- $b = \frac{b^2(3-2b)}{a(3-2a)}$ et $c = \frac{c^2(3-2c)}{a(3-2a)}$. Alors $a = b$ et $a = c$ donc $a = b = c = \frac{1}{3}$

Or $a_n - b_n + a_n - c_n = 3a_n - 1$ s'écrit aussi $a_n = \frac{1}{3}((a_n - b_n) + (a_n - c_n) + 1)$. Comme les suites $(a_n - b_n)$ et $(a_n - c_n)$ sont croissantes, on en déduit que la suite (a_n) est aussi croissante. Comme de plus, pour tout entier naturel n, $a_n > \frac{1}{3}$, il est impossible d'avoir $a = \frac{1}{3}$.

Cela entraine que $= 0$ ou $c = 0$ et, dans les deux cas $1 - 6abc = 1$.
L'égalité $a(3 - 2a) = 1 - 6abc$ s'écrit alors $a(3 - 2a) = 1$ soit $2a^2 - 3a + 1 = 0$ soit $(2a - 1)(a - 1) = 0$ soit $a = 1$ ou $a = \frac{1}{2}$.

- $b = 0$ et $c = \frac{c^2(3-2c)}{a(3-2a)}$. Alors la deuxième égalité conduit à $a = c = \frac{1}{2}$ puisque de plus $a + b + c = 1$.

Mais ceci est impossible car on doit avoir $1 \geq a \geq b \geq c \geq 0$.

- $c = 0$ et $b = \frac{b^2(3-2b)}{a(3-2a)}$. Alors la deuxième égalité conduit à $a = b = \frac{1}{2}$. Mais comme la suite $(a_n - b_n)$ est croissante, pour tout entier naturel n, $a_n - b_n \geq a_0 - b_0 > 0$ donc $a - b \geq a_0 - b_0 > 0$.
- $b = 0$ et $c = 0$. Alors $b = c = 0$ et $a = 1$. Ceci ne conduit à aucune contradiction.

Conclusion : les suites $(b_n), (c_n)$ convergent vers 0 et la suite (a_n) converge vers 1.