# *Enchères*

Régis Renault
CY Cergy Paris Université

February 5, 2020

# Applications

- Bons du trésor.
- Marchés publics.
- Salles des ventes.
- Enchères du spectre pour la téléphonie mobile (aujourd'hui 5g).
- Champs pétroliers.
- Enchères en ligne.
- Allocation des espaces publicitaires sur internet.

Nombreuses études statistiques sur les enchères.

# Cadre simple: valeurs privées

- Un objet.
- $n$ acheteurs: chacun a une valeur pour l'objet $v_i$ pour l'acheteur $i$.
- Si $i$ achète au prix $p$ son gain est $v_i - p$, sinon son gain est 0.
- Les valeurs $v_i$ sont statistiquement indépendantes: on parle de valeurs privées.

# Enchère sous pli au deuxième prix ou enchère de Vickrey

- Les acheteurs soumettent chacun une *enchère* sous pli simultanément: $b_i$ pour l'acheteur $i$.
- Objet attribué à celui qui a enchéri le plus mais il ne paye que la 2ème plus haute enchère.
- Donc si $i$ gagne, elle obtient $v_i - \max_{j \neq i} b_j$.

# Stratégie dominante

- Quelque soient les enchères concurrentes, $b_i = v_i$ maximise le gain de $i$.
- Deux cas:
  1. si $v_i \geq \max_{j \neq i} b_j$, $i$ a un gain $v_i - \max_{j \neq i} b_j \geq 0$ ce qui est le mieux qu'il puisse obtenir en choisissant $b_i < v_i$.
  2. si $v_i < \max_{j \neq 9} b_j$, alors $i$ n'obtient pas l'objet et a un gain nul; mais pour obtenir l'objet, il devrait miser au moins $b_i = \max_{j \neq i} b_j$ et payer $\max_{j \neq i} b_j$ pour un gain $< 0$
- On dit que $b_i = v_i$ est une stratégie faiblement dominante.

# Enchère anglaise

- On obtiendrait le même résultat dans une enchère classique ascendante dite *enchère anglaise*:
  - dans ces enchères, chaque acheteur décide du prix auquel il abandonne: aucune raison d'abandonner tant que le prix est $< v_i$ et celui avec la plus grande valeur achète en payant la 2ème plus grand valeur.

# Enchère sous pli au premier prix

- Revenons maintenant à l'enchère sous pli en supposant que le gagnant paye sa propre enchère.
- Plus de stratégie dominante: en particulier, $b_i = v_i$ (stratégie *faiblement dominée*) donne un gain de zéro et il vaut mieux tenter d'enchérir moins dans l'espoir de réaliser un gain $> 0$.
- Pour résoudre le modèle il faut *une structure d'information* et *un concept d'équilibre*.
- On utilise *l'équilibre de Nash*: l'enchère de $i$ $b_i^*$ maximise *l'espérance de gain* de $i$, étant donné qu'il anticipe correctement les enchères des autres joueurs $b_j^*$.
- Si $i$ connait les valeurs des autres joueurs $v_j$, $j \neq i$, l'équilibre de Nash donne le même résultat que pour les 2 autres formats d'enchère (c'est vrai si on introduit une notion d'équilibre de Nash "raisonnable").

**Structure d'information**

- Tous ont l'a priori que les valeurs sont des réalisations de variables aléatoires indépendantes et avec une distribution identique.
- L'indépendance reflète les valeurs privées tandis que les distributions identiques reflètent la symétrie *ex ante* des acheteurs.
- Chaque acheteur observe la réalisation de sa propre valeur, $v_i$ et choisit une enchère $b_i$ en fonction de $v_i$.

On cherche un équilibre symmétrique où $b_i = \beta(v_i)$ pour tout $i$ ($\beta$ est commune à tous les joueurs).
Tout est comme si on cherchait un équilibre de Nash dans un jeu avec un continu de joueurs.

- On cherche $\beta$ strictement croissante et dérivable.
- Soit $Y = \max_{j \neq 1} v_j$: c'est une VA dont on note $G$ la fonction de répartition et $g$ la densité.
- Le surplus de 1 s'il a une valeur $v_1$ et choisit une enchère $b_1$ est

$$\begin{aligned} & Pr\{\beta(Y) \leq b_1\}(v_1 - b_1) && (1) \\ & = G(\beta^{-1}(b_1))(v_1 - b_1). && (2) \end{aligned}$$

- La condition nécessaire pour un max. est que la dérivée par rapport à $b_1$ soit nulle:

$$\beta^{-1'}(b_1)g(\beta^{-1}(b_1))(v_1 - b_1) = G(\beta^{-1}(b_1)). \tag{3}$$

- Dans un équilibre symétrique $b_1 = \beta(v_1)$ et on a une équation différentielle d'ordre 1 pour $\beta$

$$\frac{g(v)}{\beta'(v)}(v - \beta(v)) = G(v). \tag{4}$$

- On obtient

$$\beta(v) = \frac{1}{G(v)} \int_0^v g(x)xdx = E(Y|Y \leq v), \tag{5}$$

- Exemple: avec 2 acheteurs, si les valeurs sont uniformes sur $[0,1]$, i enchérit la moitié de sa valeur.

# Principe de la recette équivalente

- Dans l'enchère au premier prix (cas bayésien), un acheteur avec valeur $v_i$ paye son enchère s'il gagne mais mise moins que sa valeur.
- On peut montrer que l'espérance de la recette générée est la même pour les 3 formats d'enchère.
- En fait, avec des valeurs privées, l'espérance de la recette est la même pour tous les formats d'enchère qui attribuent l'objet à celui qui offre le plus.

# Valeur commune et la malédiction du vainqueur

- Supposons que tous les acheteurs ont la même valeur $v_i = v$.
- Mais ils n'observent qu'un signal $x_i = v + \epsilon_i$ ($E\epsilon_i = 0$).
- $x_i$ est un *estimateur non biaisé* de $v$.
- Mais conditionellement au fait que $x_i = \max_j x_j$, $x_i$ surévalue $v$.
- En gagnant l'acheteur apprend une mauvaise nouvelle.

- La malédiction du vainqueur survient dès qu'il y a une corrélation positive entre les valeurs.
- Elle conduit les acheteurs à faire des enchères plus basses.
- Dans ce cas, l'enchère anglaise peut permettre d'obtenir une espérance de recette plus élevée que l'enchère sous pli.
  - au fur à mesure que l'enchère se prolonge, les acheteurs révisent favorablement leurs anticipations sur la valeur qu'ils attachent à l'objet.