National 1 (toutes séries)
Sommes de carrés en abyme : une rédaction possible

1. ***a.*** On a successivement : $f(1) = 1, f(11) = 2, f(111) = 3$ et, pour tout entier naturel n supérieur à 2 $f(10^{n-1} + 10^{n-2} + \cdots + 10 + 1) = n$
b. $f(23) = f(32) = f(320) = 13$
c. Dans l'écriture de tout antécédent de n par f (on sait qu'il en existe), on peut intercaler des 0, ce qui fournit autant d'antécédents supplémentaires que de 0 intercalés.

2. Ces trois suites sont constantes à partir d'un certain rang, tous les termes étant égaux à 1.

301	10	1	1	1	1
23	13	10	1	1	1
1030	10	1	1	1	1

3. Les images successives de 4 sont 16, 37, 58, 89, 145, 42, 20, 4 ; les mêmes termes se succèdent *ad libitum* dans la suite.

4. ***a.*** L'algorithme affiche 20 puis 4.
b. Remarquons d'abord que s'il existe un entier naturel N, tel que $u_n = 1$, alors pour tout $n \geq 1, u_n = 1$.
De même, s'il existe un entier naturel M tel que $u_M = 4$, alors à partir du rang M, les termes de la suite se répètent, c'est-à-dire qu'elle est périodique de période 8.
Ainsi pour montrer que la propriété est vérifiée, il suffit de montrer qu'il existe un terme de la suite qui vaut 1 ou 4. L'algorithme proposé calcule les termes successifs de la liste tant que ceux-ci sont différents de 1 et de 4 ; il affiche « propriété vérifiée » quand la boucle **tant que** s'arrête donc dès que u prend la valeur 1 ou la valeur 4. À partir de là, soit la suite est constante, soit elle est périodique.
c. Si la propriété n'est pas vérifiée alors la suite ne prend jamais les valeurs 1 et 4. Ainsi la condition $u \neq 1 \; et \; u \neq 4$ est toujours vérifiée et la boucle est infinie.
d. On exécute l'algorithme avec comme valeur d'entrée pour u successivement tous les entiers de 1 à 99.

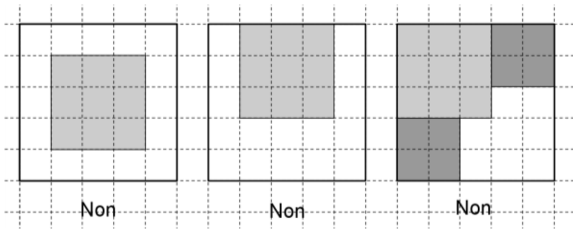
5. ***a.*** Soit $x = 100a + 10b + c$ un nombre s'écrivant avec trois chiffres (entiers naturels inférieurs ou égaux à 9, et $a \neq 0$). On a :
$$\boldsymbol{x} - f(x) = 100a + 10b + c - a^2 - b^2 - c^2 = a(100 - a) + b(10 - b) + c(1 - c)$$
Le terme $a(100 - a)$est minimum pour $a = 1$ et son minimum est 99.
Le terme $b(10 - b)$ est positif.
Donc $x - f(x) \geq 99 + c(1 - c)$
On en déduit que $x - f(x) > 0$ et donc que $x - f(x) \geq 1$, car ce nombre est entier.
b. La suite d'entiers partant de l'entier u_0 s'écrivant avec trois chiffres contient des nombres inférieurs à 99 (on est ramené au problème précédent) et des nombres de trois chiffres formant une suite décroissante… Il est certain qu'au-delà d'un certain rang, tous ses termes sont inférieurs à 99.
La propriété $\mathcal{P}$ est satisfaite par les entiers s'écrivant avec trois chiffres.

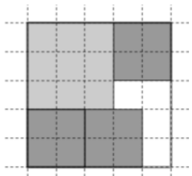
6. ***a.*** Il revient au même de montrer l'inégalité proposée que montrer que, pour tout entier $p \geq 4$, $9p \leq 10^{p-2} + 10^{p-3} + \cdots + 10^1 + 1$ (on fait apparaître $10^{p-1} - 1$)
On peut écrire $10^{p-2} + 10^{p-3} + \cdots + 10^1 + 1 = 10(10^{p-3} + 10^{p-4} + \cdots + 10^1 + 1) + 1$
Dans la parenthèse se trouvent $p - 4$ entiers supérieurs à 1, dont $p - 3$ sont supérieurs à 10. Leur somme est supérieure à $10(p - 3) + 1$. Finalement $10^{p-2} + 10^{p-3} + \cdots + 10^1 + 1 \geq 100p - 289$. Ce dernier terme est supérieur à $9p$ dès que $p > 3$.
b. Chacun des p chiffres de u_n est inférieur à 9, la somme de leurs carrés est donc inférieure à $81p$. Le successeur de u_n a donc moins de chiffres.
c. La diminution du nombre de chiffres pour les nombres en utilisant plus de trois étant acquise, il est certain que la propriété $\mathcal{P}$ est vraie.

National 2 (série S) 1, 2, 3 … dallez ! Une rédaction possible

1. *a.* Le carré K_6 peut être pavé avec 4 carrés de taille 3 (ou 9 carrés de taille 2) donc sans carré de taille 1.

b. Si on utilise un carré de taille 3, il occupe nécessairement un coin et il n'est pas possible de paver l'espace restant avec des carrés de taille 2. On ne peut pas non plus n'utiliser que des carrés de taille 2 (L'aire à paver est impaire).





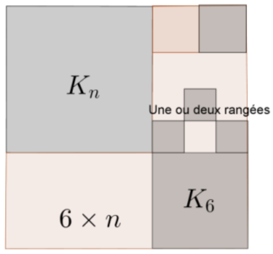
c. La figure de gauche montre un tel pavage.

2. $u(1) = 1$, $u(8) = 0$, $u(9) = 0$: il faut au moins un carré de taille 1 pour couvrir K_1 (et un seul suffit…), K_8 et K_9 peuvent être pavés par 16 carrés de taille 2 et par 9 carrés de taille 3.

3. Le carré K_{2p} peut être pavé par p^2carrés de taille 2 et K_{3p} par p^2carrés de taille 3. Le minimum du nombre de carrés de taille 1 utilisés dans l'un et l'autre cas est 0.

4. *a.* Ajoutant un nombre pair à un nombre impair, on obtient un nombre impair ; ajoutant un multiple de 3 à un non multiple de 3, on obtient un non multiple de 3.

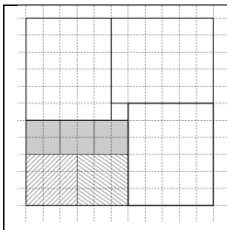
b. Tout rectangle de dimensions n et 6 peut être pavé par des carrés de taille 3 ou 2. En effet, si n est un multiple de 3, deux rangées de pavés taille 3 conviennent, si n est supérieur de 2 à multiple de 3, on complète deux rangées de carrés de taille 3 par trois carrés de taille 2 en largeur, enfin si n est supérieur de 1 à un multiple de 3 (et que n est plus grand que 4), il faudra 6 carrés de taille 2 pour compléter les carrés de taille 3. Le carré K_6 est pavé par des carrés de taille 3.



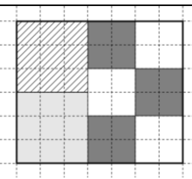
5. *a.* La figure ci-dessous montre un pavage du rectangle donné et de K_{11}. Cela montre que $u(11) \leq 1$.

b. La figure ci-dessous montre un pavage d'un rectangle de largeur 6 et de longueur 7, puis de K_{13}. Cette figure montre également que $u(13) \leq 1$.

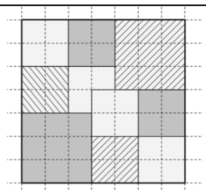
c. Tous les nombres impairs non multiples de 3 strictement supérieurs à 7 s'obtiennent en ajoutant à 11 ou 13 un multiple de 6. D'après la question **4. *b.***, le nombre de carrés de taille 1 nécessaires pour paver des carrés de côté impair non multiple de 3 diminue lorsque le côté augmente. Il reste donc inférieur à 1.



Pavage d'un rectangle 5 × 6 et, par extension, de K_{11}

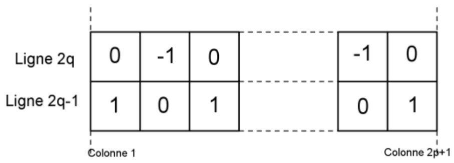


Pavage d'un rectangle 6 × 7 (utilisable pour paver K_{13})



Pavage de K_7 utilisant 3 carrés de taille 1 (la question n'était pas posée)

6. *a.* Posons $n = 2p + 1$. Le schéma ci-dessous montre que dans K_{2p+1} chaque ligne de rang pair compte $p + 1$ « 0 » et p « -1 » tandis que chaque ligne de rang impair compte $p + 1$ « 1 » et p « 0 ». La somme des coefficients des deux lignes consécutives est donc 1. Il y a p paires de lignes de la sorte plus la première ligne qui est de rang impair (1). Le total est donc $2p + 1$.



b. La façon dont les coefficients des cases d'un tel carré de taille 3 peuvent se répartir peut être étudiée en observant les quatre positions possibles d'un carré de taille 3 dans un carré de taille 4. Les sommes possibles sont -3, 0 et 3.

c. La même figure sert à étudier ce qu'il advient d'un carré de taille 2 utilisé dans les mêmes conditions (il suffit cette fois de considérer les quatre positions possibles d'un carré de taille 2 dans un carré de taille 3). Cette fois la somme des coefficients est constante égale à 0.

d. La somme des coefficients d'un carré pavé par des carrés de taille 2 ou 3 est donc un multiple de 3.

e. On conclut que $u(n)$ n'est nul que pour les carrés de taille paire ou multiple de 3 et égal à 1, au-delà de 11, que pour les carrés de taille impaire et non multiple de 3.

f. $2\,017 = 1 + 4 \times 21 \times 24$. Ce qui montre que 2 017 est impair et non multiple de 3, et qui indique comment, à l'image de K_{11} et K_{13} , on peut réaliser un pavage de $K_{2\,017}$ ne contenant qu'un pavé de taille 1.

National 3 (Non S) Boîtes de canelés bordelais : Rédaction possible

1. On ne peut pas acheter 10 canelés conditionnés, car 9 + 6 > 10 et 6 +6 > 10. On ne peut pas non plus en obtenir 20, car 16 + 6 > 20, 12 + 9 > 20, 12 + 2 × 6 > 20, 4 × 6 > 20. En revanche, 12 + 2 × 9 = 30.

2. ***a.*** Liste des quantités qu'on ne peut pas conditionner dans ces boîtes :

1	2	3	4	5	7	8	10	11	13	14	17	19	20	23	26	29

b. En ajoutant 6 à chacun des nombres de cette liste, on obtient les six nombres suivants, et ainsi de suite, tous les entiers supérieurs.

c. On vérifie que les nombres 36, 37, 38, 39, 40 et 41 sont « atteignables », donc tous leurs successeurs aussi, mais que 35 ne l'est pas.

3. ***a.*** Les nombres proposés sont tous des multiples de 3. Toute somme réalisée avec ces nombres l'est aussi, ce qui n'est pas le cas de 50.

b. Seuls les multiples de 3 sont susceptibles d'être atteints.

4. ***a.*** On utilise trois boîtes de 16 et une boîte de 12.

b. On remplit 4 boîtes de 16, il reste 11, puis une boîte de 9 et il reste 2 qu'on ne sait placer.

c. Si on n'applique pas la méthode gloutonne, on prend 5 boîtes de 12, une boîte de 9 et une boîte de 6.

5. ***a.*** On utilise 3 boîtes de 12 et 5 boîtes de 1.

b. Avec 5 boîtes de 8 et une boîte de 1 on parvient aussi à 41. Donc 6 boîtes au lieu de 8.

6. On peut réaliser tout total de 1 à 31 (penser au système binaire).