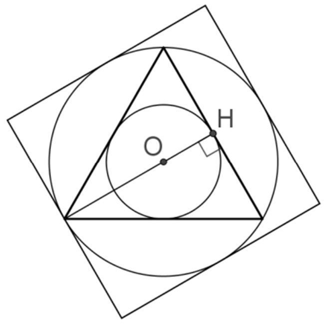
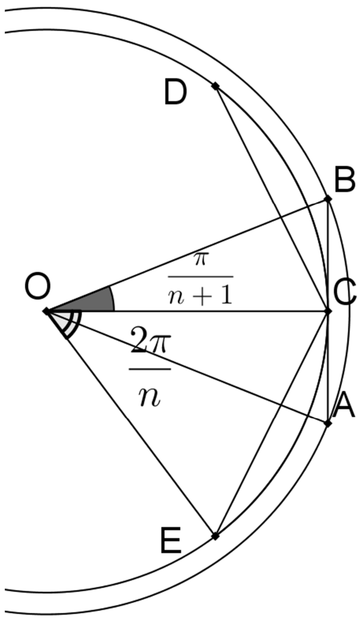
# *Rédaction possible pour « Le mandala de Maryam »*




**1.** Un triangle équilatéral dont les trois côtés sont tangents au cercle a son centre de gravité au centre du cercle, sa hauteur $h$ est donc égale à trois fois le rayon $r$. Si on appelle $a$ le côté du triangle, $h = a\frac{\sqrt{3}}{2}$, donc $a = \frac{6r}{\sqrt{3}}$.
L'aire du triangle équilatéral est $\mathcal{A} = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2} \times \frac{6r}{\sqrt{3}} \times 3r = 3\sqrt{3}r^2$.
Ici, $r = 2$, donc $\mathcal{A} = 12\sqrt{3}$ cm²

**2.** Le cercle circonscrit au triangle équilatéral a pour rayon les deux tiers de la hauteur du triangle, c'est-à-dire $\frac{2}{3}h$. Le carré dont les côtés sont tangents au cercle a pour côté de diamètre du cercle, et son aire est le carré de son côté. L'aire du carré est donc :
$\mathcal{A} = \frac{16}{9}h^2 = 16r^2$.
Ici, $r = 2$, donc $\mathcal{A} = 64$ cm²

**3.** ***a.*** Dans la figure ci-dessous, le segment [EC] est le côté d'un polygone régulier à $n$ côtés. Il est intercepté par un angle au centre de mesure $\frac{2\pi}{n}$. Le côté [AB] du polygone régulier à $n+1$ côtés défini par le processus suivi est tangent au cercle précédent en C, et est intercepté par un angle au centre de mesure $\frac{2\pi}{n+1}$. Si on appelle $R_n$ le rayon du cercle circonscrit au polygone régulier à $n$ côtés défini par le processus, on a, dans le triangle rectangle OCB, rectangle en C : $R_n = R_{n+1} \times \cos\frac{\pi}{n+1}$ , soit $R_{n+1} = R_n \times \frac{1}{\cos\frac{\pi}{n+1}}$




***b.*** L'algorithme est écrit ci-contre. On connaît $R_3 = 4$, et pour afficher $R_n$, on arrête le compteur à $n-1$ (à l'étape k, c'est $R_{k+1}$ qui est calculé. Pour le cercle circonscrit au polygone régulier à $n$ côtés, la calculatrice affiche une valeur supérieure à 12 (en estimant correct l'arrondi au centième 12,65). Cela fait un diamètre supérieur à 21 cm, on sort de la feuille.

```
R ← 4
Pour k variant de 3 à n − 1, Faire
   R ← R / cos π/(k+1)
   k ← k+1
Afficher R
```

***c.*** On peut modifier l'algorithme précédent en remplaçant la boucle For par une boucle Tant Que. Le neuvième cercle a pour rayon 10,32 cm et le onzième 10, 85 cm.

```
R ← 4
k ← 3
Tant Que R < 10,5 Faire
   R ← R / cos π/(k+1)
   k ← k+1
Afficher R
```

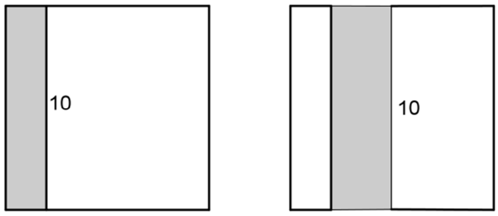
**4.** On peut reprendre le premier algorithme pour savoir ce que seraient les rayons du 100$^{\text{ème}}$, du 200$^{\text{ème}}$ cercles. Le résultat : le rayon dépasse pour la première fois 16 cm au 59$^{\text{ème}}$ cercle, et il n'atteint toujours pas 17 au 200$^{\text{ème}}$ (il l'atteint, apparemment, au 212$^{\text{ème}}$, mais on a peut-être un problème de précision). Avec une largeur supérieure à 2 fois 21 cm, le seul problème pour tracer les cercles est de savoir si on saura les distinguer les uns des autres. Les tableaux ci-dessous ont été réalisés avec un tableur.

| k | π/k | cos ( π/k) | Rayon |
|---|---|---|---|
| 96 | 0,0327249 | 0,99946459 | 16,5325553 |
| 97 | 0,03238753 | 0,99947557 | 16,54123 |
| 98 | 0,03205704 | 0,99948622 | 16,5497329 |
| 99 | 0,03173323 | 0,99949654 | 16,5580692 |
| 100 | 0,0314159 | 0,99950656 | 16,5662436 |
| 101 | 0,03110485 | 0,99951628 | 16,5742609 |
| 102 | 0,0307999 | 0,99952572 | 16,5821255 |
| 103 | 0,03050087 | 0,99953488 | 16,5898416 |
| 104 | 0,0302076 | 0,99954379 | 16,5974136 |
| 105 | 0,0299199 | 0,99955243 | 16,6048454 |
| 106 | 0,02963764 | 0,99956084 | 16,6121408 |

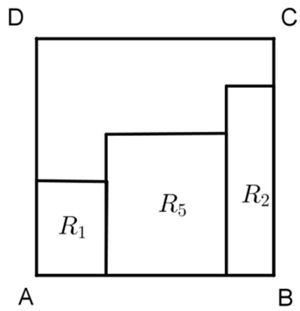
| k | π/k | cos ( π/k) | Rayon |
|---|---|---|---|
| 195 | 0,01611072 | 0,99987023 | 16,9663094 |
| 196 | 0,01602852 | 0,99987155 | 16,9684891 |
| 197 | 0,01594716 | 0,99987285 | 16,9706469 |
| 198 | 0,01586662 | 0,99987413 | 16,9727833 |
| 199 | 0,01578688 | 0,99987539 | 16,9748986 |
| 200 | 0,01570795 | 0,99987663 | 16,976993 |
| 201 | 0,0156298 | 0,99987786 | 16,9790669 |
| 202 | 0,01555243 | 0,99987906 | 16,9811205 |
| 203 | 0,01547581 | 0,99988025 | 16,9831542 |
| 204 | 0,01539995 | 0,99988142 | 16,9851682 |
| 205 | 0,01532483 | 0,99988258 | 16,9871629 |

## *Rédaction possible pour « Juxtaposition de rectangles »*

**1.** Le côté du carré est $c = t + u + y$ (largeurs de $R_4, R_5, R_2$), c'est-à-dire 11. On en déduit les dimensions inconnues : la longueur de $R_1$ est $11 - 2 = 9$, celle de $R_2$ est $11 - 3 = 8$, celle de $R_3$ est $11 - 5 = 6$, celle de $R_4$ est $11 - 1 = 10$, et enfin celle de $R_5$ est $11 - 1 - 3 = 7$.

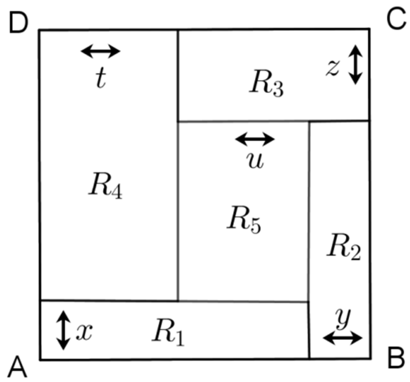


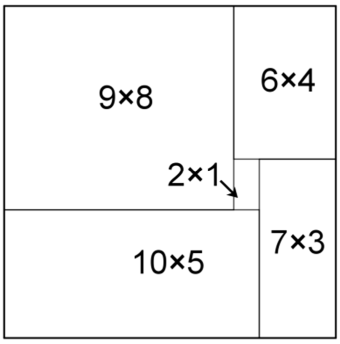

**2. *a.*** Comme une des longueurs des rectangles à assembler est 10, le carré obtenu est de côté supérieur ou égal à 10.
***b.*** Un des rectangles a pour longueur 10. Qu'il se situe sur un « bord » comme à gauche de la figure ou « au milieu » comme à droite, il reste à placer les autres rectangles : quatre (à gauche) ou deux et deux (à droite, pas trois et un, car ce dernier aurait une dimension égale à 10) pour remplir le ou les espaces rectangulaires qui restent. C'est impossible d'après le préambule. Donc $n \geq 11$.




**3. *a.*** Si des côtés de trois rectangles constituent un des côtés du carré final, il reste à remplir avec deux rectangles un polygone ayant 8 sommets. En effet, les sommets de $R_1, R_2, R_5$ qui ne sont pas sur un des bords du carré ne peuvent pas être alignés (des dimensions seraient identiques). Il faut occuper cet espace à 8 sommets par deux rectangles. Le préambule du problème a montré que c'est impossible : la juxtaposition de deux rectangles de dimensions différentes produit un polygone à 6 ou 8 sommets, et dans ce dernier cas, quatre sont alignés.
***b.*** Si un rectangle du pavage est « intérieur » au carré, deux de ses dimensions n'interviennent pas dans le calcul du périmètre du carré. Au maximum, ce périmètre est donc $3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 52$ . Il s'ensuit que $n \leq 13$, puisque $52 = 4 \times 13$.

**4. *a.*** Si $n = 12$, le même total, 12, doit être réalisé quatre fois avec des sommes d'entiers distincts compris entre 1 et 10. Ceci est réalisable avec exactement quatre combinaisons, $12 = 10 + 2 = 9 + 3 = 8 + 4 = 7 + 5$. Restent 6 et 1, qui sont donc nécessairement les dimensions du rectangle intérieur $R_5$.
***b.*** En reprenant la figure de l'énoncé et ses notations, supposons $u = 1$. Il vient alors $t + y = 11$ et $z + x = 6$.
Ou bien $x = 2$ ou bien $x = 4$, car 1 est pris et $x$ et $z$ ne peuvent être égaux. Les longueurs AD et BC, égales à 12, sont donc obtenues en additionnant des nombres pairs. Les autres côtés ont des longueurs sommes de nombres impairs (9 et 3, 7 et 5). Mais $y$ et $t$ ne peuvent être simultanément impairs, puisque leur somme est 11. Si on avait supposé $u = 6$, les rôles de $(y, t)$ et $(z, x)$ auraient été intervertis. Finalement $n = 12$ est impossible.
*Remarque : la figure guide, mais il faut s'assurer qu'elle n'impressionne pas.*




**5.** Nous avons vu que 11 convient. Il reste à examiner le cas de 13. D'après la question **3. *b.*** nous savons que le rectangle intérieur a pour dimensions 1 et 2 qui ne peuvent être présentes sur le périmètre. La figure ci-contre donne une réalisation possible . 11 et 13 sont donc les solutions du problème.

## *Rédaction possible pour « Le sommé d'un nombre »*

**Partie I**

**1.** $2\ 018 + 8\ 102 = 10\ 120$
**2.** $45 + 54 = 99$ ; 99 est donc le sommé de $54$ (et aussi le sommé de $45$)
**3.** Un entier naturel s'écrivant avec un seul chiffre n'est la somme de deux entiers naturels que si ceux-ci s'écrivent aussi avec un seul chiffre (la présence d'un zéro final éliminé au retournement ne changerait pas le fait que la somme aurait au moins deux chiffres si l'un des deux a deux chiffres). Le retourné d'un entier à un chiffre est lui-même. Les sommés possibles sont donc $2, 4, 6, 8$.
**4.** La question précédente fournit des exemples : les entiers naturels impairs inférieurs à 10 ne peuvent être des sommés.
**5.** La définition $s_n = n + r_n$ fournit des exemples de telles paires d'entiers, à condition d'éviter que le chiffre des unités de $n$ soit $0$. D'autres choix sont possibles, par exemple les sommés de 45 et 36 sont identiques, 99.

**Partie II**

**6. *a.*** $(10a + b) + (10b + a) = 11(a + b)$. Le sommé de $10a + b$ est donc un multiple de 11.
***b.*** Les sommés des entiers compris entre 10 et 99 sont donnés dans le tableau suivant (le sommé de $10a + b$ est à l'intersection de la colonne $a$ et de la ligne $b$). Évidemment, ce sont les $11(a + b)$ qui apparaissent identiques sur les parallèles à la seconde diagonale.

| $b \setminus a$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 11 | 22 | 33 | 44 | 55 | 66 | 77 | 88 | 99 |
| 1 | 22 | 33 | 44 | 55 | 66 | 77 | 88 | 99 | 110 |
| 2 | 33 | 44 | 55 | 66 | 77 | 88 | 99 | 110 | 121 |
| 3 | 44 | 55 | 66 | 77 | 88 | 99 | 110 | 121 | 132 |
| 4 | 55 | 66 | 77 | 88 | 99 | 110 | 121 | 132 | 143 |
| 5 | 66 | 77 | 88 | 99 | 110 | 121 | 132 | 143 | 154 |
| 6 | 77 | 88 | 99 | 110 | 121 | 132 | 143 | 154 | 165 |
| 7 | 88 | 99 | 110 | 121 | 132 | 143 | 154 | 165 | 176 |
| 8 | 99 | 110 | 121 | 132 | 143 | 154 | 165 | 176 | 187 |
| 9 | 110 | 121 | 132 | 143 | 154 | 165 | 176 | 187 | 198 |

**7. *a.*** La somme
$s_n = 100a + 10b + c + 100c + 10b + a$
s'écrit $s_n = 100(a + c) + 20b + (a + c)$
Une condition nécessaire pour que ce nombre soit inférieur à $1\ 000$ est $a + c < 10$. Une conséquence de cela est que son chiffre des dizaines sera juste $2b$ si $b \leq 4$ et juste $2b - 10$ si $b \geq 5$. Dans tous les cas, ce chiffre est pair.
***b.*** Si $a + c = 9$ , on a $100u + 10v + w = 900 + 20b + 9$. Pour que l'écriture soit légitime, il est nécessaire que $20b \leq 90$ et donc que $b \leq 4$.
***c.*** Comme $a + c < 10, w = a + c$. Le chiffre des centaines est égal à $a + c$ ou à $a + c + 1$ selon qu'il y a ou non une retenue (cas où $b \geq 5$).
***d.*** On cherche $a, b, c$ tels que $100u + 10v + w = 100(a + c) + 10(2b) + (a + c)$.
Ou bien le second membre est une écriture légitime d'un nombre de trois chiffres, dans ce cas : $a + c = u$ et $2b = v$
Ou bien le second membre doit être réécrit $100(a + c + 1) + 10(2b') + (a + c)$ avec $b = 5 + b'$ et $0 \leq b' \leq 4$.
De fait, $a + c \leq 8$. La condition sur $a, b, c$ s'écrit alors $a + c + 1 = u$, $v = 2b'$, $b = 5 + \frac{v}{2}$.
Ce problème a donc des solutions, $100u + 10v + w$ est un sommé.
***e.*** Il y a 9 choix possibles pour $u$ pour écrire un sommé $100u + 10v + u$ : $u = 1,2, \dots ,9$. Et il y a cinq chiffres pairs possibles pour $v$. Cela donne 45 sommés de cette forme. Il y a 8 choix possibles pour $u$ pour écrire un sommé $100u + 10v + (u - 1)$ : $u = 2,3, \dots ,9$ puisque $u = 1$ conduirait à $a + c = 0$ donc à $a = 0$. Cela donne $8 \times 5 = 40$ sommés de cette forme. Au total, il y a 95 sommés à trois chiffres.

**Partie III**

**8.** L'algorithme doit égrener les chiffres de $n$ et construire avec le retourné de $n$. Ce sont les fonctions liées à la division euclidienne qui vont réaliser cet égrenage, mais il faut calibrer l'opération en s'arrêtant au chiffre le plus à gauche de $n$.

```
R ← 0
Tant Que n≠0 Faire
    R ← 10*R + rem (n, 10)
    n ← quo(n, 10)
Afficher S + R
```

**Partie IV**
**9.** Quel est le plus grand nombre à quatre chiffres qui soit le sommé d'un nombre à trois chiffres ? Si le nombre à sommer est $100a + 10b + c$, la plus grande valeur possible de $a + c$ est 18, la plus grande valeur de $b$ est 9. Le plus grand sommé est donc $1\ 998$.
On cherche donc le plus petit sommé supérieur à 2 018 parmi les nombres à quatre chiffres, tels $1\ 000a + 100b + 10c + d$. L'opération « sommé » conduit d'abord à $1\ 001(a + d) + 110(b + c)$. Or $110(b + c)$ peut aller jusqu'à 1980, ce qui laisse une chance au cas $a = 1$ de s'exprimer. Dès lors $d = 0$ ou $d = 1$. Quand $d = 0$, $110(b + c)$ doit dépasser 1017. Au

mieux, $b = c = 5$, ce qui donne lieu à $n = 1550$ et le retourné 2101. Quand $d = 1$, $110(b + c)$ doit dépasser 16. Au mieux, $b = 1$ et $c = 0$, ce qui donne lieu à $n = 1101$ et le retourné 2112. C'est moins bien. Le plus petit sommé solution est 2101 ;

**10.** La somme des chiffres des unités de $n$ et de son retourné doit se terminer par un 0. C'est donc 10. On veut que le sommé ait un chiffre de plus que $n$, il y aura donc une retenue. Essayons $n = 1\ 000 + 100a + 10b + 9$. Le sommé de $n$ est : $S = 10\ 000 + 110\ (a + b) + 10$. On a donc l'égalité $11(a + b) + 1 = 100a + 10b + 9$ (on a simplifié les $10\ 000$ et mis 10 en facteur. La dernière égalité s'écrit : $89a - b + 8 = 0$, qui ne peut être satisfaite que par $a = 0$ et $b = 8$. On vérifie que $1\ 089 + 9\ 801 = 10\ 890$.
Le même genre de raisonnement conduit, pour des entiers à 5 chiffres, à $10\ 989 + 98\ 901 = 109\ 890$.