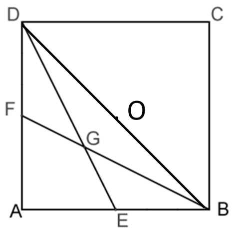
**Rédaction possible pour « *Coin coupé* »**

**1. Deux cerfs-volants**

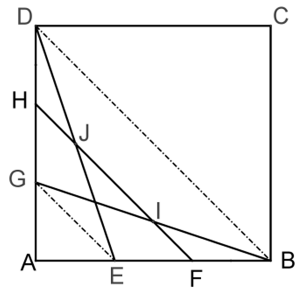



*a.* Le triangle DAB est rectangle isocèle en A, dont [AG] est à la fois médiane et hauteur, et dont G est le centre de gravité. Donc $\mathrm{GO} = \frac{1}{3}\mathrm{AO}$. Et comme AO est la demi-diagonale du carré, on obtient le résultat demandé.

*b.* [GO] est une hauteur du triangle BGD, dont l'aire est $\mathcal{A}(\mathrm{BGD}) = \frac{1}{2}\mathrm{BD} \times \mathrm{GO} = \frac{1}{6}$

*c.* Des aires des deux quadrilatères, une vaut $\frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$, l'autre $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$ ; leur rapport est donc $\frac{1}{2}$.

**2. Deux pentagones**

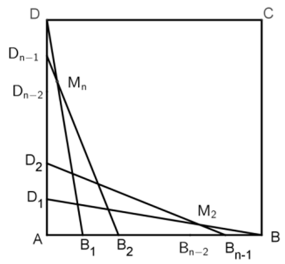



*a.* La droite (GE) est une « droite des milieux » du triangle AFH. Elle est donc parallèle à la droite (FH). De ce fait, le segment [FI] joint les milieux des côtés [EB] et [BG] du triangle BEG, et donc I est le milieu de [BG]. De même (par symétrie ou en considérant le triangle DGE) J est le milieu de [DE].

*b.* On commence par déterminer l'aire du quadrilatère BIJD. C'est un trapèze, car les droites (BD) et (FH) sont parallèles. Sa hauteur est égale au tiers de la demi-diagonale du carré : $h = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{6}$. Le segment [IJ] a pour longueur le tiers de la longueur de la diagonale [BD]. En effet, la longueur FH est le double de celle de EG (droite des milieux) et il faut soustraire deux fois la moitié de GE (pour FI et HJ, toujours la droite des milieux). Donc l'aire $\mathcal{T}$ du trapèze est : $\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{6} \times \frac{4}{3} \times \sqrt{2} = \frac{2}{9}$

Des aires des deux pentagones, l'une est $\frac{1}{2} - \frac{2}{9} = \frac{5}{18}$ et l'autre $\frac{1}{2} + \frac{2}{9} = \frac{13}{18}$. D'où le résultat.

**3. Étude cartésienne générale**




*a.* Le couple de coordonnées d'un point $\mathrm{B}_k$ est $\left(\frac{k}{n}, 0\right)$ ; le couple de coordonnées d'un point $\mathrm{D}_p$ est $\left(0, \frac{p}{n}\right)$. Une équation de la droite $\left(\mathrm{D}_p\mathrm{B}_{n+1-p}\right)$ est donc : $\frac{x-0}{0-\frac{n+1-p}{n}} = \frac{y-\frac{p}{n}}{\frac{p}{n}-0}$

Ce qui s'écrit encore $\frac{p}{n}x + \frac{n+1-p}{n}y - \frac{p(n+1-p)}{n^2} = 0$,

ou encore $npx + n(n+1-p)y - p(n+1-p) = 0$

Une équation de la droite $\left(\mathrm{D}_{p-1}\mathrm{B}_{n+2-p}\right)$ s'obtient en remplaçant, dans l'égalité précédente, $p$ par $p-1$.

On obtient : $n(p-1)x + n(n+2-p)y - (p-1)(n+2-p) = 0$

Le système $\begin{cases} npx + n(n+1-p)y - p(n+1-p) = 0 \\ n(p-1)x + n(n+2-p)y - (p-1)(n+2-p) = 0 \end{cases}$ admet pour unique solution les coordonnées du point $\mathrm{M}_p$ : le couple $\left(\frac{(n+1-p)(n+2-p)}{n(n+1)}, \frac{p(p-1)}{n(n+1)}\right)$

*b.* Le triangle $\mathrm{D}_p\mathrm{D}_{p-1}\mathrm{M}_p$ a pour « base » $\mathrm{D}_p\mathrm{D}_{p-1} = \frac{1}{n}$ et pour « hauteur » l'abscisse de $\mathrm{M}_p$ donnée ci-dessus.

Son aire est donc $\mathcal{A}_p = \frac{(n+1-p)(n+2-p)}{2n^2(n+1)}$

*c.* L'aire du « coin coupé » est la somme des aires des triangles, $p$ variant de 1 à $n$ (le point $\mathrm{M}_1$ est le point B). Elle s'écrit donc $\mathcal{A}_{coin} = \sum_{p=1}^{n} \frac{(n+1-p)(n+2-p)}{2n^2(n+1)}$

$$\mathcal{A}_{coin} = \frac{1}{2n^2(n+1)}\sum_{p=1}^{n}(n+1-p)(n+2-p) = \frac{n+2}{2n} - \frac{2n+3}{2n^2(n+1)}\sum_{p=1}^{p=n} p + \frac{1}{2n^2(n+1)}\sum_{p=1}^{p=n} p^2$$

Reste à utiliser les résultats donnés par l'énoncé :

$$\mathcal{A}_{coin} = \frac{n+2}{2n} - \frac{2n+3}{4n} + \frac{2n+1}{12n} = \frac{6n+12-6n-9+2n+1}{12n} = \frac{n+2}{6n}$$

On peut voir que ce résultat est aussi applicable dans les deux premiers cas, traités sans recours à un repère.

*d.* $\mathcal{A}_{coin} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3n}$ montre clairement que cette aire est supérieure à $\frac{1}{6}$.

**Rédaction possible pour « *Sportifs, à vos calculettes !* »**

### *« Balles neuves ! »*

1. Une partie de 36 jeux nécessite trois sets (chaque set se déroule en au maximum 12 points s'il ne se termine pas sur un jeu décisif). Un score peut être : 7 – 5, 5 – 7, 7 – 5.

2. Comme dans la question précédente, la partie nécessite trois sets. Le vaincu a gagné un set, ce qui lui donne 6 ou 7 points ; il a un total de 12 ou 11 pour les sets gagnés par le vainqueur. Que ce soit 12 ou 11, dans l'un des deux sets qu'il a perdus, il a marqué 6 points, donc il y a eu jeu décisif et son adversaire a marqué 7. Le vainqueur a gagné un set au jeu décisif, il a marqué 11 points dans les deux autres sets, dont au moins 6 pour l'un des deux. Résumons la situation dans un tableau :

| | |
|---|---|
| 7 | 6 |
| 4 ou 5 | 6 ou 7 |
| 7 ou 6 | 6 ou 5 |

À la troisième ligne, il y a nécessairement un 7 en première colonne (pour qu'il y ait deux points d'écart), et donc à la seconde ligne colonne de gauche il faut placer 4 et donc 6 colonne de droite ; enfin, dans la dernière case il reste à placer 6.
Les scores possibles sont donc 7 – 6, 4 – 6, 7 – 6, à l'ordre près (le 4 – 6 est en première ou deuxième position).
*a.* S'il n'y a eu que deux sets, le maximum possible étant 13 par set, on conclut qu'il y a eu 13 points marqués dans un set, 12 dans l'autre. 13 points donnent un score de 7 – 6, 12 donnent un score de 7 – 5 (deux possibilités pour l'ordre dans lequel ces scores apparaissent).
*b.* S'il y a eu trois sets, le perdant en a gagné au moins un, donc a marqué au moins 6 points. Il reste 19 points, dont au moins 12 pour le vainqueur. Faire l'hypothèse d'un jeu décisif donne 13 au vainqueur, mais 12 au perdant, tandis qu'imaginer que le vainqueur a gagné deux sets avec un total de 6 n'oblige à partager les 7 points restants qu'en accordant 4 points au vainqueur et donc 3 au perdant, qui marque donc au minimum 9 points (avec un score comme 6 – 2, 4 – 6, 6 – 1).

### *Division ou soustraction ?*

Calculons le total de buts marqués et le total de buts encaissés par chaque équipe. On complète le tableau par les *quotients* et les *différences.*

| Équipe | Buts pour | Buts contre | Quotient | Différence |
|---|---|---|---|---|
| A | 6 | 4 | 1,5 | 2 |
| B | 11 | 8 | 1,375 | 3 |
| C | 7 | 11 | 0,6363… | − 4 |
| D | 7 | 7 | 1 | 0 |
| E | 7 | 8 | 0,875 | −1 |

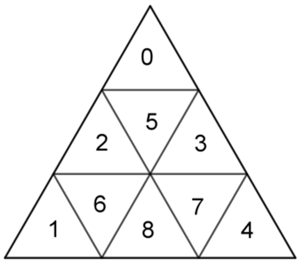
1. Le classement selon les *quotients* est donc :
A B D E C
2. Le classement selon les *différences* est donc :
B A D E C
3. Pour intervertir A et D dans le classement selon les *différences*, il suffit d'ajouter 3 à la *différence* de D. Le score du match C contre D pourrait être 3 – 2 et le score du match D contre E pourrait être 5 – 1. La *différence* de D passe de 0 à 3, celle de C de −4 à −5, celle de E de −1 à −3. Leurs places de quatrième et cinquième sont conservées.

### *Lancers francs*

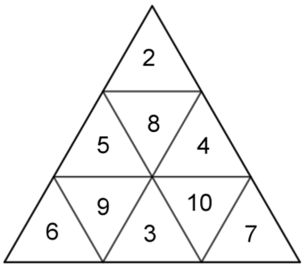
1. Supposons que Clara ait réussi, à la mi-saison, 12 lancers francs sur 21. Son taux de réussite est de 57% (arrondi au centième). Si elle réussit les deux lancers suivants, son score passe à 13 sur 22 (59%) puis à 14 sur 23 (61% arrondi au centième, 60,9 arrondi au millième, en tous cas strictement supérieur à 60%)

2. Supposons que Céline ait réussi, à un certain moment, $p$ lancers francs sur $n$ tentés. L'hypothèse est $4p < 3n$.
Est-il possible qu'après un seul nouveau tir elle passe au-dessus des 75% ?
Cela signifierait que $4(p+1) > 3(n+1)$. Mais alors on aurait $4p + 1 > 3n$. Or ces nombres sont des entiers : $4p$ est inférieur à $3n$, son successeur ne peut pas lui être strictement supérieur, dans le meilleur des cas égal et nous voilà aux 75%.

**Rédaction possible pour « *Formation en triangle* »**




1. Comment obtenir les entiers de 0 à 8.
On peut procéder ligne par ligne : rien à faire dans la case *a*, ajouter 2 fois 1 à *b* et *c*, ajouter 3 fois 1 à *c* et *d*, ajouter 1 fois 1 à *e* et *f*, ajouter 5 fois 1 à *f* et *g*, ajouter 4 fois 1 à *h* et *i*, ajouter enfin 3 fois 1 à *g* et *h*.




2. Par rapport à la situation de départ, on ajoute 2 fois 1 à *a* et *c*, puis 5 fois 1 à *b* et *c*, puis 1 fois 1 à *c* et *d*, 6 fois 1 à *e* et *f*, *3* fois 1 à *f* et *g*, 7 fois 1 à *h* et *i* et enfin 3 fois 1 à *d* et *h.*

3. Appelons (*ac*) le nombre d'opérations entre les contenus de *a* et *c*. Ce nombre désigne aussi le contenu final des cases *a* et *c* dû aux opérations n'ayant concerné que ces deux cases. On introduit de même les notations (*bc*), (*cd*), (*bf*), (*dh*), etc. (*hi*).
Le contenu d'une case, un certain nombre d'opérations ayant été effectuées à partir de la situation initiale, est égal au nombre d'opérations auxquelles il a été soumis.
Le nouveau contenu de la case *a* est : (*ac*)
Le nouveau contenu de *b* est : (*bc*)+(*bf*)
Le nouveau contenu de *c* est : (*ac*)+(*bc*)+(*cd*)
Le nouveau contenu de *d* est : (*cd)*+(*dh*)
Le nouveau contenu de *e* est : (*ef*)
Le nouveau contenu de *f* est : (*ef*)+(*bf*)+(*fg*)
Le nouveau contenu de *g* est : (*fg*)+(*gh*)
Le nouveau contenu de *h* est : (*gh*)+(*dh*)+(*hi*)
Le nouveau contenu de *i* est : (*hi*)
Reste à faire les additions proposées : $S =$(*ac*)+(*bc*)+(*cd*)+ (*ef*)+(*bf*)+(*fg*)+ (*gh*)+(*dh*)+(*hi*)
Et $T =$(*ac*)+ (*bc*)+(*bf*)+ (*cd)*+(*dh*)+ (*ef*)+ (*fg*)+(*gh*)+ (*hi*)
Les deux sommes sont constituées des mêmes termes. Elles sont donc égales.

4. *a.* Parmi les neuf entiers consécutifs contenus dans les cases, trois ont une somme égale à la somme des six autres. La somme des trois plus grands est donc supérieure à la somme des six autres :
$n + 6 + n + 7 + n + 8 \geq n + n + 1 + n + 2 + n + 3 + n + 4 + n + 5$,
C'est-à-dire $3n + 21 \geq 6n + 15$ ou encore $n \leq 2$.
*b.* La somme de tous les contenus des cases est égale à $S + T$, c'est-à-dire à $2S$. Elle est donc paire, et comme elle vaut $9n + 36$, on en déduit que $n$ est pair. 0 et 2 sont donc les seules valeurs de $n$ envisageables, et on a vu plus haut qu'elles conviennent.

5. Ces neuf puissances de $m$ se partagent en deux parties, la somme de trois d'entre elles étant égale à la somme des six autres. Quitte à pratiquer une mise en facteurs avant simplification, on peut supposer que 1 est un terme d'une des deux sommes, ce qui exclut la possibilité pour $m$ d'être pair. Mais $m$ ne peut pas non plus être impair, car l'égalité aurait lieu entre un nombre pair (somme de six puissances de $m$) et un nombre impair (somme de trois puissances de $m$). La situation décrite est impossible.