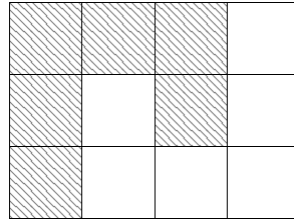


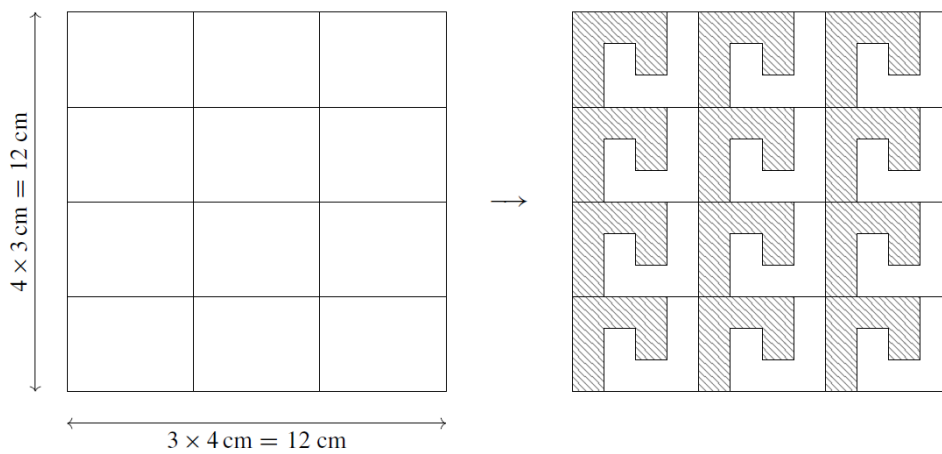
Eléments de solutions

Rectangles crochetables

1. a. Un rectangle de dimensions 3 cm par 4 cm est crochetable de la manière suivante :



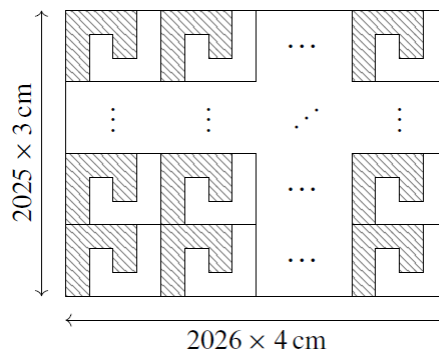
b. Afin de construire un carré qui soit crochetable, nous pouvons par exemple le paver à l'aide de rectangles tels que celui qui précède. Nous obtenons ainsi la figure suivante :



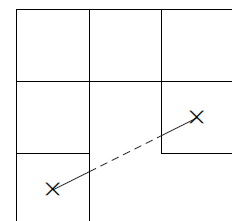
c. Si $n \leq 2$, alors un rectangle de hauteur n cm ne peut pas être crochetable, car la dimension minimale d'un crochet est de 3 cm (hauteur comme largeur). Un crochet que l'on essaierait d'inscrire dans un tel rectangle « dépasserait ».

d. L'aire d'un rectangle de hauteur 4 cm et de longueur 5 cm vaut $5 \times 4 = 20 \text{ cm}^2$. Un crochet se compose de 6 carrés de côté 1 cm, donc l'aire qu'il recouvre vaut 6 cm^2 . Ainsi, puisque 20 n'est pas un multiple de 6, il n'est pas possible de recouvrir un rectangle 4×5 par des crochets.

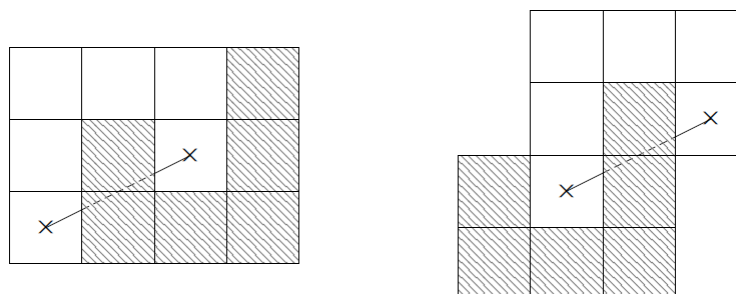
e. On peut par exemple paver un rectangle à l'aide de rectangles 3×4 , comme fait dans la question précédente.



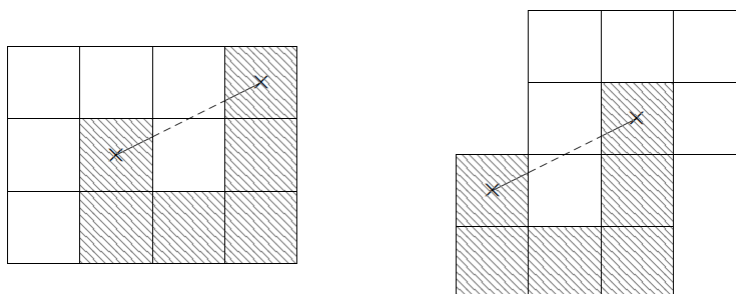
2. a. Supposons qu'un rectangle donné soit pavé à l'aide de crochets. Nous allons les mettre par paire comme suit. Étant donné un crochet, considérons le segment suivant, reliant deux points choisis au centre de deux carrés.



Ce segment est nécessairement entièrement inclus dans le rectangle crocheté. La partie en pointillé est donc contenue dans un autre crochet (elle ne peut pas être contenue dans deux crochets distincts, faute de place). Il y a deux configurations possibles pour cet autre crochet, représentées ci-dessous.



Appelons cet autre crochet le *complément* du premier. Nous vérifions facilement que le complément du complément est le premier crochet



Ainsi, les crochets sont assemblés par paire, et donc le nombre de crochets du pavage est pair.

b. L'entier $m \times n$ représente l'aire du rectangle, en cm^2 . De fait, si N désigne le nombre de crochets dans le pavage, alors nous avons, par un raisonnement similaire à la question **1.c.**, la relation $mn = 6N$.

De plus, d'après la question **2.b.**, il existe un entier naturel k tel que $N = 2k$ et donc $mn = 12k$, ce qui signifie bien que mn est un multiple de 12.

c. D'après la question **2.a.**, tout rectangle dont l'aire n'est pas un multiple de 12 n'est pas crochetable donc, par exemple un rectangle de largeur 2 027 et de longueur 2 029 n'est pas crochetable puisque, comme 2 027 et 2 029 sont impairs, leur produit n'est pas pair.

3. Un tel entier n'existe pas. Autrement dit : quelle que soit la taille n du côté que l'on se fixe, il existera toujours un carré de taille supérieure qui ne soit pas crochetable. En effet, si n est une telle taille fixée, alors on peut considérer un entier $N > n$ tel que N^2 ne soit pas divisible par 12 (par exemple, $N = 7^n$ convient).

Empilement de tuyaux

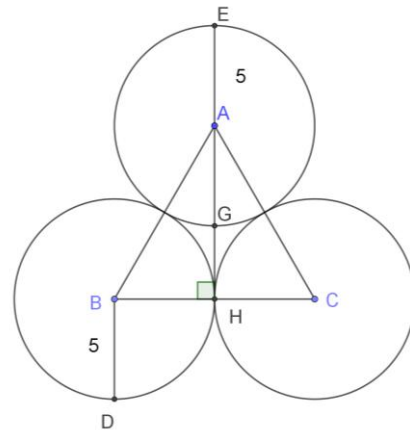
1. Dans la caisse A, il y a dix tuyaux par étages donc 20 étages de ces tuyaux pour empiler les 200 tuyaux. Dans la caisse B, il y a dix tuyaux au premier étage, 9 au second, 10 au troisième ... soit 19 tuyaux tous les deux étages. Comme $200 = 10 \times 19 + 10$, l'empilement des 200 tuyaux nécessitera 21 étages.

2. Soit A, B, C les centres des trois tuyaux. Les trois tuyaux ayant pour diamètre commun 10, le triangle ABC est équilatéral et chacun de ses côtés a pour longueur 10.

De plus si D et E sont, comme sur la figure ci-contre, des points des cercles tels que (BD) et (EA) sont perpendiculaires à (BC) et si H est le pied de la hauteur issue de A , alors : $BD = AE = 5$ et $h = BD + AH + AE = 10 + AH$.

Comme ABC est isocèle en A , H est le milieu de $[BC]$ et dans le triangle ABH rectangle en H , d'après le théorème de Pythagore $AP^2 = AB^2 - BP^2 = 100 - 25 = 75$.

On en déduit que $h = 10 + \sqrt{75} = 10 + 5\sqrt{3}$.

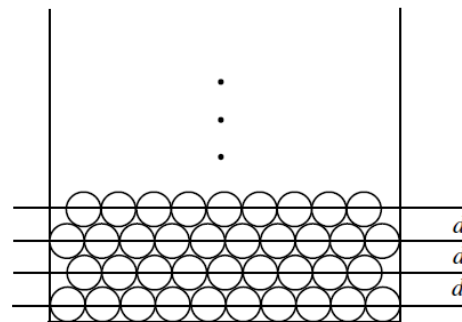


3. La hauteur dans la caisse A est égale à

$$H_A = 20 \times 10 = 200$$

Si, comme sur la figure ci-contre, on note d la distance entre deux droites passant par les centres des tuyaux d'un même étage, la hauteur dans la caisse B est $H_B = 20d + 2r$

En effet, la distance entre la première droite et le fond de la caisse est le rayon des tuyaux. Il en est de même pour la distance entre la droite la plus haute et le haut de l'empilement.



De plus, si on reprend la figure précédente, $d = AH = \sqrt{75}$ donc $H_B = 20\sqrt{75} + 10 = 100\sqrt{3} + 10$.

On en déduit que $H_A - H_B = 200 - (20\sqrt{75} + 10) = 190 - 20\sqrt{75} = 190 - 100\sqrt{3}$.

D'où en arrondissant au millimètre $H_A - H_B \approx 16,8$ cm.

Histoire de tangentes

1. a. Les triangles O_1BM et O_1AM sont rectangles respectivement en B et A . Ils ont en commun l'hypoténuse $[O_1M]$ et $O_1B = O_1A$ (comme valeur commune du rayon du cercle C_1). Ces deux triangles sont donc isométriques. On en déduit que $MA = MB$.

On démontre de même que les triangles O_2CM et O_2AM sont isométriques. Donc $MA = MC$.

- b. Soit A' le symétrique de A par rapport à M . D'après la question précédente, le point M est le milieu des segments $[BC]$ et $[AA']$ donc le quadrilatère $ACA'B$ est un parallélogramme. De plus, comme $MA = MB$, les diagonales ont même longueur. Le quadrilatère $ACA'B$ est un rectangle. En particulier les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires en A donc le triangle ABC est rectangle en A .

2. a. Comme les points B et E sont sur le cercle C_1 , $O_1B = O_1E$. Mais cela ne suffit pas pour affirmer que le point O_1 est le milieu du segment $[BE]$. On va, pour cela, montrer que $\widehat{BO_1E} = 180^\circ$.

$\widehat{BO_1E} = \widehat{BO_1A} + \widehat{AO_1E}$. Or les triangles BO_1A et AO_1E sont isocèles en O_1 donc $\widehat{BO_1A} = 180^\circ - 2\widehat{O_1AB}$ et $\widehat{AO_1E} = 180^\circ - 2\widehat{O_1AE}$. D'où $\widehat{BO_1E} = 360^\circ - 2(\widehat{O_1AB} + \widehat{O_1AE}) = 360^\circ - 2\widehat{EAB}$.

Comme le triangle ABC est rectangle en A , on en déduit que $\widehat{BO_1E} = 360^\circ - 180^\circ = 180^\circ$.

Au final le point O_1 est le milieu du segment $[BE]$ qui est donc un diamètre de C_1 .

On démontre de même que le point O_2 est le milieu du segment $[CD]$ qui est donc un diamètre de C_2 .

- b. Comme la droite (BC) est perpendiculaire aux droites (BO_1) et (CO_2) c'est-à-dire aux droites (BE) et (CD) , le quadrilatère $BEDC$ est un trapèze rectangle.

