Eléments de solution – première

Pour tous

1. Les ensembles {1, 7, 10} et {2, 6, 10} sont des top-dix de moyenne 6.
2. **a.** Un top-dix contient au moins un élément (le nombre 10) et l'ensemble {10} a pour moyenne 10, donc le minimum d'élément d'un top-dix est 1.

   b. Un ensemble d'entiers naturels non nuls de maximum 10 possède au plus 10 éléments : les entiers de 1 à 10. Or, l'ensemble {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} a pour moyenne $\frac{55}{10} = 5{,}5$ qui n'est pas entier donc un top-dix a au plus 9 éléments. Et, puisque {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} a pour moyenne $\frac{54}{9} = 6$, le maximum d'éléments d'un top-dix est 9.
3. **a.** La somme des 4 nombres a_1, a_2, a_3, a_4 différents de 10 d'un top-dix est minimale pour $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$. De plus, {1, 2, 3, 4, 10} a pour moyenne $\frac{20}{5} = 4$, c'est donc un top-dix : le minimum de la moyenne d'un top-dix à 5 éléments est 4.

   b. L'ensemble {1, 2, 3, 4, 5, 10} a pour moyenne $\frac{25}{6}$ qui n'est pas entière donc cet ensemble n'est pas un top-dix. De plus cette moyenne est strictement supérieure à 4, donc la moyenne d'un top-dix à 6 éléments vaut au moins 5. Puisque le top-dix {2, 3, 4, 5, 6, 10} a pour moyenne 5, le minimum de la moyenne d'un top-dix à 6 éléments est 5.
4. On raisonne sur le nombre d'éléments n du top-dix :

- Au cas par cas :
  - si $n = 2$, sa moyenne est au moins à $\frac{1+10}{2} = 5{,}5$;
  - si $n = 3$, sa moyenne est au moins $\frac{1+2+10}{3} = 4 + \frac{1}{3}$;
  - si $n = 4$, sa moyenne est au moins $\frac{1+2+3+10}{4} = 4$;
  - si $n = 5$, sa moyenne est au moins $\frac{1+2+3+4+10}{5} = 4$;
  - si $n = 6$, sa moyenne est au moins $\frac{1+2+3+4+5+10}{6} = 4 + \frac{1}{6}$;
  - si $n = 7$, sa moyenne est au moins $\frac{1+2+3+4+5+6+10}{7} = 4 + \frac{3}{7}$;
  - si $n = 8$, sa moyenne est au moins $\frac{1+2+3+4+5+6+7+10}{8} = 5{,}75$;
  - si $n = 9$, sa moyenne est au moins $\frac{1+2+3+4+5+6+7+8+10}{9} = 6$;

  On conclut que la moyenne minimale d'un top-dix est 4.
- De manière générale, la moyenne du top-dix vaut au moins $m = \frac{1+2+\cdots+n-1+10}{n}$.

  Or, $1 + 2 + \cdots + n - 1 = \frac{(n-1)n}{2}$ donc $m = \frac{n-1}{2} + \frac{10}{n}$. On peut alors, soit remplacer successivement n par les entiers de 1 à 9 pour en déduire que $m > 3$, soit montrer que $m - 3 > 0$ en étudiant le signe de $m - 3 = \frac{n^2-7n+20}{2n}$. (On pourrait également étudier les variations de la fonction $x \mapsto \frac{x-1}{2} + \frac{10}{x}$).

5. On a déjà vu des top-dix de moyennes 4, 5, 6 et 10 et les top-dix suivants {4, 10}, {6, 10} et {8, 10} ont pour moyennes respectives 7, 8 et 9 donc toutes les moyennes possibles sont les entiers de 4 à 10.
6. Comme précédemment, la moyenne d'un top-cent possédant n éléments vaut au moins $M = \frac{1+2+\cdots+n-1+100}{n}$ soit $M = \frac{n-1}{2} + \frac{100}{n}$. On conjecture à l'aide d'un tableur ou d'un grapheur en traçant la fonction $x \mapsto \frac{x-1}{2} + \frac{100}{x}$ que ce minimum vaut 14 ce que l'on vérifie en montrant que $M - 13 = \frac{n^2-27n+200}{2n}$ est strictement positif, puisque le discriminant du numérateur est strictement négatif ou bien en vérifiant que

$\frac{n^2-27n+200}{2n} = \frac{n(n-27)+200}{2n}$ est positif pour toute entier n compris entre 1 et 26 (pour $n \geq 27$ on montre aisément que $n(n-27)$ est positif) et conclure.

On montre alors que l'on peut obtenir tout entier de 14 à 100 :

- les top-cent {1, **4**, 100}, {1, **7**, 100}, ..., {1, **97**, 100} pour les moyennes de 35 à 66 ;
- les top-cent {**4**, 97, 100}, {**7**, 97, 100}, ..., {**94**, 97, 100} pour les moyennes de 67 à 97 ;
- les top-cent {96, 98, 100}, {98, 99, 100} et {100} pour les moyennes 98, 99 et 100 ;
- les top-cent {1, 2, 3, **4**, 100}, {1, 2, 3, **9**, 100}, ..., {1, 2, 3, **64**, 100} pour les moyennes de 22 à 34 ;
- les top-cent {1, 2, …, 10, **13**, 100}, {1, 2, …, 10, **25**, 100}, …, {1, 2, …, 10, **97**, 100} pour les moyennes de 14 à 21.

Remarques : Si m est compris entre 51 et 99, $\{2m-100, 100\}$ a pour moyenne m et si m est compris entre 14 et 50, $\{m-13, m-12, \dots, m-1, 2m-9, 100\}$ a pour moyenne m.

Pour les spécialistes

1. a. On a $8^2+6^2 = 4 \times 5^2$ donc le premier triangle est 4-pythagorien.
On a $5^2+6^2 = 61$, $5^2+2^2 = 29$ et $2^2+6^2 = 40$ donc aucune somme des carrés de deux des côtés n'est multiple du carré du troisième côté : le deuxième triangle n'est pas multipythagorien.
Enfin, $3^2+3^2 = 8 \times 1{,}5^2$ donc le troisième triangle est 8-pythagorien.

b. Tout triangle équilatéral est 2-pythagorien, mais aussi par exemple un triangle de côtés de longueurs $1, \sqrt{7}, 2$.

c. Oui, tout triangle isocèle rectangle est 3-pythagorien. On peut trouver des triangles rectangles de tout ordre n car $si\ b = \sqrt{\frac{n-1}{2}}a$ et $c^2 = a^2+b^2$ alors $na^2 = b^2+c^2$.

2. a. On a $\mathrm{CG} = \frac{2}{3}mc$ donc $\mathrm{CG} = 3$, de même, $\mathrm{GB} = 4$ ainsi $\mathrm{BG}^2+\mathrm{GC}^2 = \mathrm{BC}^2$: le triangle BCG est rectangle en G.

b. Si K est le milieu du segment [AB], $\mathrm{BG}^2+\mathrm{GK}^2 = \mathrm{BK}^2$donc $\mathrm{BK} = \sqrt{18{,}25}$ d'où $\mathrm{AB} = 2\sqrt{18{,}25}$. On démontre de manière analogue que $\mathrm{AC} = 2\sqrt{13}$. On montre alors que $5\mathrm{BC}^2 = \mathrm{BA}^2+\mathrm{AC}^2$: le triangle ABC est 5-pythagorien.

c. Soit D le point tel que CGBD soit un rectangle et soit I le milieu du segment [BC].
Les diagonales d'un rectangle sont de même longueur et se coupent en leur milieu donc $\mathrm{GI} = \frac{1}{2}\mathrm{AB}$, et puisque $\mathrm{AG} = 2\mathrm{GI}$, on a $\mathrm{AG} = \mathrm{AB}$ soit $\mathrm{AG} = 5$.
On a alors $m_a = \frac{3}{2}\mathrm{AG}$ donc $m_a = 7{,}5$ puis $m_a^2 = 56{,}25$. Or $m_b^2 + m_c^2 = 36+20{,}25$, d'où $m_b^2+m_c^2 = m_a^2$: m_a, m_b et m_c sont ainsi les longueurs des côtés d'un triangle rectangle.

d. L'aire $\mathcal{A}$ du triangle ABC vaut 4 fois l'aire du triangle AJK (J et K milieux des segments [AB] et [AC]). Donc $\mathcal{A}$ vaut les quatre tiers de l'aire du trapèze BCJK d'aire égale à $\frac{1}{2}\mathrm{BJ} \times \mathrm{CK} = 13{,}5$ donc $\mathcal{A} = 18$.

3. Soit E le point tel que ABCE soit un parallélogramme, alors :
$2\mathrm{AB}^2+2\mathrm{BC}^2 = \mathrm{AC}^2+\mathrm{BE}^2$, soit $2a^2+2c^2 = b^2+4m_b^2$. Ainsi, $m_b^2 = \frac{2a^2+2c^2-b^2}{4}$.

4. a. On définit le point D comme à la question 2.c. On a là encore $\mathrm{AG} = \mathrm{DG} = \mathrm{CB}$ et $\mathrm{CG}^2+\mathrm{GB}^2 = \mathrm{CB}^2$ d'où $\mathrm{CG}^2+\mathrm{GB}^2 = \mathrm{AG}^2$. Ainsi, puisque $\mathrm{AG} = \frac{2}{3}m_a$, $\mathrm{BG} = \frac{2}{3}m_b$ et $\mathrm{CG} = \frac{2}{3}m_c$, on a $m_a^2 = m_b^2+m_c^2$.

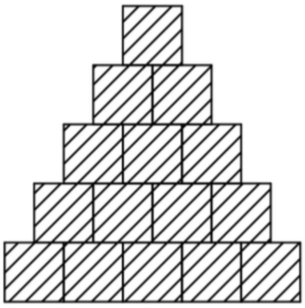
b. D'après la question 3, $m_b^2 = \frac{2a^2+2c^2-b^2}{4}$; on démontrerait de même les égalités $m_a^2 = \frac{2b^2+2c^2-a^2}{4}$ et $m_c^2 = \frac{2a^2+2b^2-c^2}{4}$. De $m_a^2 = m_b^2+m_c^2$, on déduit que
$2b^2+2c^2-a^2 = 2a^2+2c^2-b^2+2a^2+2b^2-c^2$ puis que $b^2+c^2 = 5a^2$. Ce qui montre que le triangle ABC est 5-pythagorien.

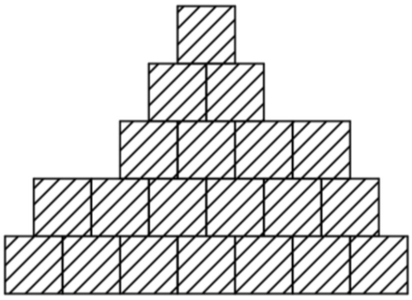
5. Oui, on a $m_b^2+m_c^2 = \frac{2a^2+2c^2-b^2}{4} + \frac{2a^2+2b^2-c^2}{4} = \frac{4a^2+b^2+c^2}{4}$ et $m_a^2 = \frac{2b^2+2c^2-a^2}{4}$.

Donc, si $b^2 + c^2 = 5a^2$, alors $m_b^2 + m_c^2 = \frac{9a^2}{4} = m_a^2$ d'où l'on tire que $\mathrm{BG}^2 + \mathrm{GC}^2 = \mathrm{BC}^2$: les médianes issues de B et de C se coupent donc en angle droit.

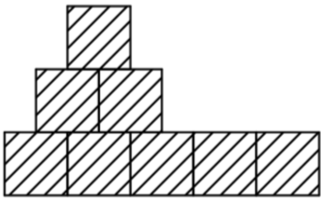
Pour les non spécialistes

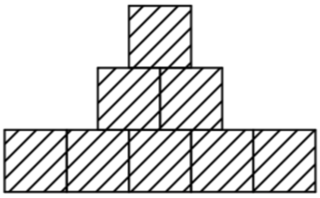
1. Deux empilements de 5 étages valides et possibles :

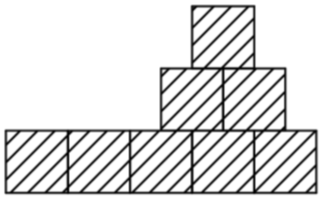




2. **a.** Comme l'empilement construit par cet enfant est de base 5 et comporte trois étages, pour utiliser un minimum de cubes, on construit le premier étage (la base) avec 5 cubes. On place ensuite le plus petit empilement possible de deux étages sur cette base afin de constituer un empilement de trois étages avec un minimum de cubes. On a finalement l'un des empilements suivants :

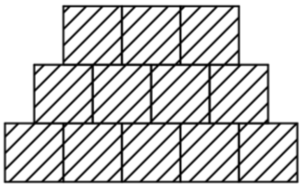






Ces empilements comptent tous exactement 8 cubes, ce qui constitue donc le minimum de cubes que cet enfant peut avoir utilisé.

b. Pour construire un tel empilement avec un maximum de cube, on remplit au maximum les trois premiers étages de notre empilement de base 5. On obtient alors l'empilement ci-contre.
Cet empilement compte exactement 12 cubes, ce qui constitue donc le maximum de cubes que cet enfant peut avoir utilisé.



Cet enfant a donc utilisé au minimum 8 cubes et au maximum 12 cubes.

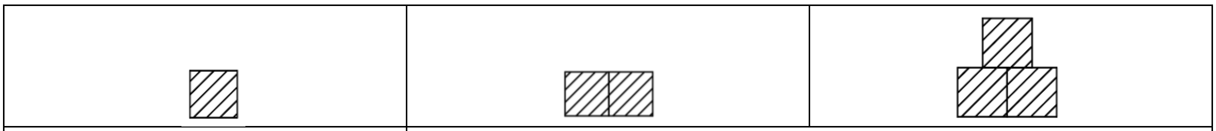
3. Soit n un entier naturel non nul.

a. L'empilement de base n ayant le plus d'étages possibles est l'empilement dont tous les étages sont complets. À chaque étage, l'empilement compte alors un cube de moins. Il y a donc n cubes sur son premier étage (sa base), puis $n-1$ à l'étage 2, $n-2$ l'étage 3. En perdant ainsi un cube par étage, le n^{e} étage ne compte qu'un seul cube et on ne peut donc pas construire d'étage $n+1$.
Pour tout entier naturel n non nul, un empilement de base n contient au maximum n étages.

b. L'empilement de base n qui compte le plus de cubes est l'empilement dont tous les étages sont complets. D'après la question précédente, le nombre maximal de cubes composant un empilement de base n est donc : $S_n = n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1$.

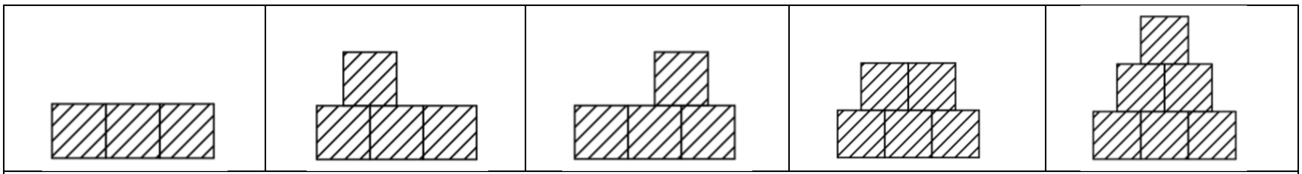
c. Pour avoir un empilement de n étages il faut avoir un cube à l'étage n, au moins deux cubes à l'étage $n-1$ donc au moins trois cubes à l'étage $n-2$ et ainsi de suite jusqu'au premier étage.
Le nombre minimal de cubes d'un empilement de n étages est donc :
$M_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-2) + (n-1) + n$.

4. Empilements possibles



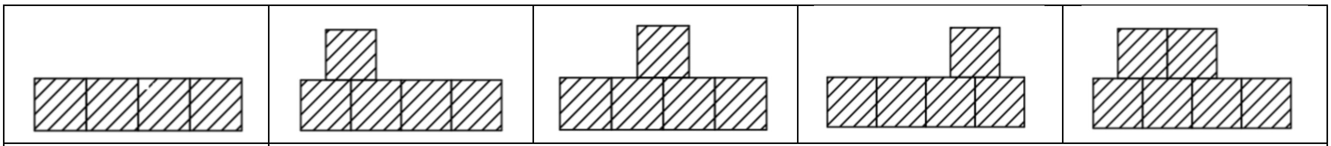
Base 1 | Base 2

On a donc $u_1 = 1$ et $u_2 = 2$

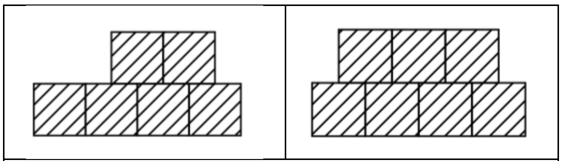


Base 3

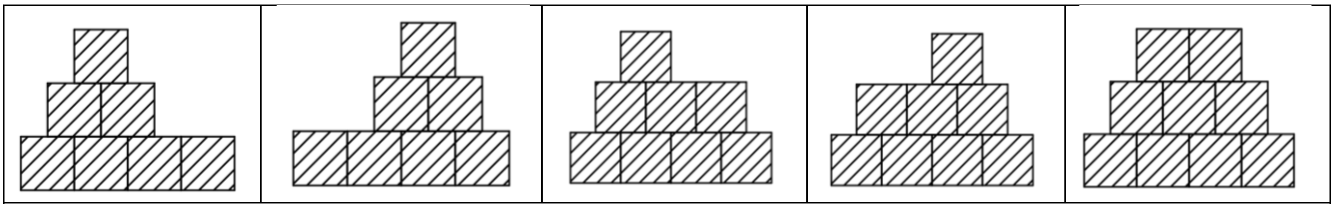
On a donc $u_3 = 5$



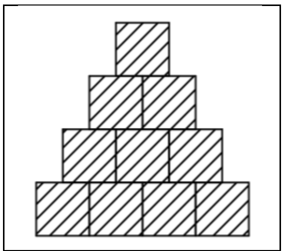
Base 4 Un étage | Base 4 Deux étages



Base 4
Deux étages - suite



Base 4
Trois étages



Base 4
Quatre étages

d'où $u_4 = 1 + 6 + 5 + 1 = 13.$

5. **a.** Un empilement de base 5 compte 5 cubes sur son premier étage (sa base) et donc peut avoir de 0 à 4 cubes sur son deuxième étage.
Un tel empilement peut donc avoir $0, 1, 2, 3$ ou 4 cubes sur son deuxième étage.

b. On raisonne par disjonction de cas sur le nombre de cubes au deuxième étage de notre empilement :

- Il existe exactement un empilement de base 5 qui ne possède pas de deuxième étage.
- Si l'on souhaite placer seulement un cube sur le deuxième étage, on peut placer ce cube à 4 emplacements différents. Ce cube ne peut alors pas donner lieu à un étage supplémentaire, et donc il existe exactement 4 empilements de base 5 qui ont exactement un cube sur leur deuxième étage. Ce cube seul constitue en fait l'unique empilement de base 1, et donc il existe $4u_1$ empilements de base 5 qui comptent exactement un cube sur leur deuxième étage.
- Si l'on souhaite placer exactement deux cubes sur le deuxième étage, on peut placer ces deux cubes à 3 emplacements différents. Pour chacun de ces trois emplacements, ces deux cubes peuvent donner lieu à un nombre d'empilements de base 2 égal à u_2. Il existe donc exactement $3u_2$ empilements de base 5 qui ont exactement deux cubes sur leur deuxième étage.
- Si l'on souhaite placer exactement trois cubes sur le deuxième étage, on peut placer ces trois cubes à 2 emplacements différents. Pour chacun de ces deux emplacements, ces trois cubes peuvent donner lieu à un nombre d'empilements de base 3 égal à u_3. Il existe donc exactement $2u_3$ empilements de base 5 qui ont exactement trois cubes sur leur deuxième étage.
- Si l'on souhaite placer exactement quatre cubes sur le deuxième étage, le deuxième étage se retrouve complet, et il y a donc une seule manière de placer ces quatre cubes. Pour cet unique emplacement, ces quatre cubes peuvent donner lieu à un nombre d'empilements de base 4 égal à u_4. Il existe donc exactement u_4 empilements de base 5 qui ont exactement quatre cubes sur leur deuxième étage.

Finalement, le nombre d'empilements de base 5, noté u_5, vérifie : $u_5 = 1 + 4u_1 + 3\,u_2 + 2\,u_3 + u_4$

D'après les questions précédentes, $u_5 = 1 + 4 \times 1 + 3 \times 2 + 2 \times 5 + 13 = 34$