Éléments de solution

Association de nombres

1. **Cas des couples**
   - ***a.*** $0 + 0 = 0 \times 0$. Le couple $(0,0)$ est une association.
   - ***b.*** L'équation $1 + x = 1 \times x$ se traduit par $1 = 0$. Elle n'a pas de solution.
   - ***c.*** L'équation $x + x = x \times x$ s'écrit aussi $x(x - 2) = 0$. Elle possède deux solutions, 0 et 2.
   - ***d.*** L'équation $x + 3 = 3x$ a pour solution $\frac{3}{2}$. Le couple $(3, \frac{3}{2})$ est une association.
   - ***e.*** Le couple (x, y) est une association si $x + y = xy$. y est donc solution de l'équation $y(x - 1) = x$ qui n'a de solution que si $x \neq 1$. Sous cette dernière hypothèse $y = \frac{x}{x-1}$.

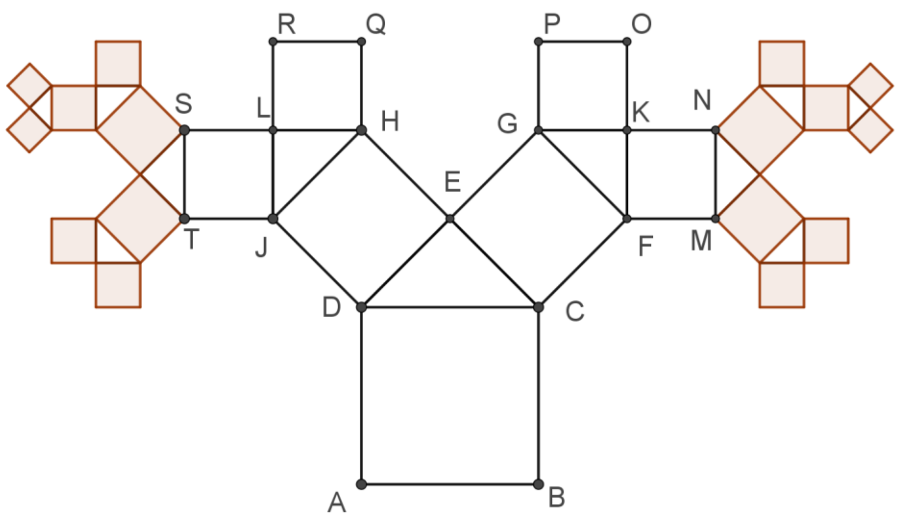
2. **Cas des triplets**
   - ***a.*** $1 + 2 + 3 = 1 \times 2 \times 3$. Le triplet $(1, 2, 3)$ est une association.
   - ***b.*** Le triplet (a, b, x) est une association si $a + b + x = abx$. L'équation en x s'écrit $(ab - 1)x = a + b$. Elle n'a de solution que si $ab \neq 1$. Il ne se peut pas que $a + b = 0$ et $ab = 1$
3. **Cas des quadruplets**
   - ***a.*** Le quadruplet $(a, b, c, 0)$ est une association si $a + b + c = 0$. C'est possible, par exemple $(1, -2, 1, 0)$est une association.
   - ***b.*** Le quadruplet $(1, 1, 2, 4)$ est une association.

Arbre de Pythagore

1. ***a.*** Le théorème de Pythagore appliqué au triangle CDE, rectangle en E, fournit l'égalité :
$$CD^2 = EC^2 + DE^2$$
Comme $EC = ED$, cette égalité répond exactement à la question.
b. On passe à l'ordre suivant pour obtenir $CE^2 = 2FM^2$

2. ***a.*** Les points B, C et G sont alignés (la mesure de l'angle $\widehat{BCG}$ est la somme de 90°, 45° et 45°). Les points C, G et P sont eux aussi alignés (la configuration est la même à une symétrie près). Donc les points B et P appartiennent à la droite (CG).
b. Les points N et K appartiennent à la droite (GH) (toujours la même configuration) et les points S et L appartiennent à la droite (GH) également. Il y a donc un alignement de six points.

3. Le côté du carré ABCD mesure 1 m.
a. La figure est inscrite dans le rectangle dont les côtés sont supportés par les droites (AB) et (PO) d'une part, (MN) et (ST) d'autre part. La hauteur de la figure est la distance BP, sa largeur la distance SN. La longueur des côtés des carrés est à chaque étape multipliée par $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Donc $BP = 2{,}5$ et $SN = 3$.
b. Le schéma ci-dessous est **une vue partielle** de la figure à l'ordre 5. Selon le principe évoqué ci-dessus, sa largeur, une fois achevé, est 5 m. C'est l'arbre de Pythagore à l'ordre 5. Il comporte
$1 + 2 + 2 \times 2 + 2 \times 2 \times 2 + 2 \times 2 \times 2 \times 2 + 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 63$ carrés.



Le cycle des unités

1. Premières puissances de 2 :

Exposant n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2^n	**2**	**4**	**8**	1**6**	3**2**	6**4**	12**8**	256	512	1 024
Chiffre des unités de 2^n	2	4	8	6	2	4	8	6	2	4

2. Le chiffre des unités du produit de deux entiers écrits dans le système décimal est le chiffre des unités du produit de leurs chiffres des unités.
   a. Les puissances de 3 ont pour chiffre des unités 3, 9, 7, 1, cette séquence se reproduit.
   b. $6 \times 6 = 36$. 6 est le chiffre des unités de toutes les puissances de 6.
   c. Pour 16, terminé par 6, on ne trouve que des 6. Pour 123 456 789, on trouve les chiffres des unités des puissances de 9.

3. $1\,515 = 4 \times 378 + 3$. Dans la suite 2-4-8-6, c'est le troisième chiffre qui sert de chiffre des unités, donc 8.
   $1\,789 = 4 \times 447 + 1$. Cette fois, c'est 2.

4. Le chiffre des unités d'une somme est le chiffre des unités de la somme des chiffres des unités des nombres à sommer.
   a. Dans la somme S apparaissent successivement 2-4-8-6. Comme $2\,024 = 4 \times 506$, la suite des quatre chiffres des unités apparaît 506 fois. La somme de ces quatre chiffres est 20 et le produit de 506 par 20 se termine bien sûr par un 0.
   b. Dans cette somme, apparaît la suite 9-1, en tout 1 012 fois. Et comme $9 + 1 = 10$, on se trouve dans la même situation que précédemment.

Pyramides bicolores

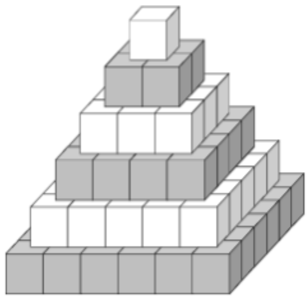


Figure 1

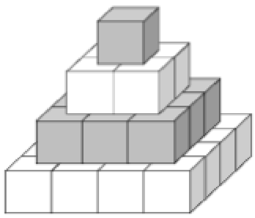


Figure 2

1. La figure 1 comporte $25 + 9 + 1 = 35$ cubes blancs et $36 + 16 + 4 = 56$ cubes gris
   La figure 2 compte 20 blancs et 10 gris

2. Les étages d'une pyramide de 10 étages comportent $10^2 + 9^2 + 8^2 + 7^2 + 6^2 + 5^2 + 4^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2 = 385$ cubes.

3. On ajoute à la somme précédente 11^2 puis 12^2, etc. jusqu'à atteindre ou dépasser 818.

$$385 + 121 = 506$$

$$506 + 144 = 650$$

$650 + 169 = 819$ …
Il en manque un…

4. Examinons les sommes des carrés des impairs et les sommes des carrés des pairs pour voir si on peut atteindre 2 300. En poursuivant les calculs commencés ci-dessus, on trouve que la somme des carrés des entiers impairs compris entre 1 et 23 est 2 300.
Camille a pu utiliser la somme des carrés des entiers pairs compris entre 2 et 24 cubes gris (le premier et le dernier étage ne sont pas de la même couleur) soit 2 600 cubes gris.