Concours Général de mathématiques 2021 – Éléments de correction

François Régus

Sommaire

Problème n°1 – Le début justifie la fin

On considère l'ensemble $\mathscr{S} = \{u(x) | x \in \mathbb{R}\}$ où $u(x)$ désigne la suite définie par la relation de récurrence :

$$\begin{cases} u_0 = x \\ u_{n+1} = f_n(u_n) & \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

en posant $f_n(X) = \dfrac{\mathrm{e}^X}{n+1}$.

Remarque 1 : pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ la fonction f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, par stricte croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$ et car $n+1 > 0$ si $n \in \mathbb{N}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$.

$u_n = \dfrac{\mathrm{e}^{u_{n-1}}}{n}$ d'après la relation de récurrence.

u_n est donc un réel strictement positif comme quotient de réels strictement positifs car, pour tout $X \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^X > 0$ et $n \geqslant 1$:

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 1, \quad u_n > 0}.$$

2. Soit une suite $u \in \mathscr{S}$ telle qu'il existe un rang $N \geqslant 2$ pour lequel $u_N \leqslant 1$.

Montrons par récurrence que la proposition $\mathscr{P}_n$: « $u_n \leqslant \dfrac{\mathrm{e}}{n}$ » est vérifiée pour tout entier $n \geqslant N+1$.

- **Initialisation**

Pour $n = N+1$, on a :

$$u_N \leqslant 1$$

$$\text{donc} \quad f_N(u_N) \leqslant f_N(1) \quad \text{par croissance de la fonction } f_N \text{ sur } \mathbb{R}$$

$$\text{donc} \quad u_{N+1} \leqslant \frac{\mathrm{e}}{N+1}.$$

Ainsi $\mathscr{P}_{N+1}$ **est vérifiée**.

- **Hérédité**

Supposons $\mathscr{P}_n$ vérifiée pour un entier $n \geqslant N+1$:

$$u_n \leqslant \frac{\mathrm{e}}{n}$$

Or $N \geqslant 2$ donc $n \geqslant N+1 \geqslant 3$ et donc $\dfrac{\mathrm{e}}{n} \leqslant \dfrac{\mathrm{e}}{3} < 1$ car $\mathrm{e} < 3$.

Ainsi :

$$u_n \leqslant 1$$

$$f_n(u_n) \leqslant f_n(1) \quad \text{par croissance de la fonction } f_n \text{ sur } \mathbb{R}$$

$$u_{n+1} \leqslant \frac{\mathrm{e}}{n+1}$$

Ainsi, pour $n \geqslant N+1$ on a $\boldsymbol{\mathscr{P}_n \implies \mathscr{P}_{n+1}}$.

Conclusion : par récurrence, pour tout entier $n \geqslant N+1$, la proposition $\mathscr{P}_n$ est vérifiée ;
On a donc la majoration

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N+1, \quad u_n \leqslant \frac{\mathrm{e}}{n}.$$

En utilisant la minoration de la question **1.** on a alors l'encadrement $\quad 0 < u_n \leqslant \dfrac{\mathrm{e}}{n} \quad$ pour $n > N\ (\geqslant 2)$.

Or $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}}{n} = 0 \quad$ donc, par théorème d'encadrement, $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Ainsi, $\boxed{\text{si la suite } u \in \mathscr{S} \text{ admet un terme } u_N \leqslant 1 \text{ pour un rang } N \geqslant 2 \text{ alors elle converge vers } 0}$.

3. Soit u une suite de $\mathscr{S}$ qui ne converge pas vers 0, alors pour tout entier $N \geqslant 2$ on a $u_N > 1$ par contraposée du résultat de la question **2.**.

$$\begin{aligned}
\text{Donc, pour tout } N \in \mathbb{N}, \quad N \geqslant 1 \qquad & u_{N+1} > 1 \\
& \frac{\mathrm{e}^{u_N}}{N+1} > 1 \\
& \mathrm{e}^{u_N} > N+1 && \text{car } N+1 > 0 \\
& u_N > \ln(N+1) && \text{par stricte croissance de } \ln \text{ sur }]0\,;+\infty[
\end{aligned}$$

Or $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n+1) = +\infty \quad$ donc $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ par théorème d'encadrement.

Ainsi, $\boxed{\text{si } u \text{ est une suite de } \mathscr{S} \text{ qui ne converge pas vers } 0 \text{ alors elle diverge vers } +\infty}$.

Remarque 2 :
Si $x \in \mathbb{R}$, la suite $u(x) \in \mathscr{S}$ vérifie une et une seule des deux propositions suivantes qui sont négation logique l'une de l'autre :
- « il existe un rang $N \geqslant 2$ tel que $u_N(x) \leqslant 1$ » , et alors $x \in E_0$ d'après la question **2.**
- « pour tout entier $n \geqslant 2$ on a $u_n(x) > 1$ » , et alors $x \in E_\infty$ d'après la question **3.**

Par conséquent E_0 et E_∞ forment une partition de $\mathbb{R}$: $\quad \mathbb{R} = E_0 \cup E_\infty \quad$ avec $\quad E_0 \cap E_\infty = \emptyset$.

On considère les deux ensembles suivants :

$$\begin{aligned}
E_0 \ &= \{\, x \mid \text{ la suite } u(x) \text{ converge vers } 0 \,\} \\
E_\infty &= \{\, x \mid \text{ la suite } u(x) \text{ diverge vers } +\infty \,\}
\end{aligned}$$

4. Montrons que la suite $u(0)$ converge vers 0.
Calculons les premiers termes de la suite ; on a successivement :
$u_0 = 0, \qquad u_1 = \dfrac{\mathrm{e}^0}{1} = 1, \qquad u_2 = \dfrac{\mathrm{e}}{2}, \qquad u_3 = \dfrac{\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{e}}{2}}}{3} \qquad$ et $\qquad u_4 = \dfrac{\mathrm{e}^{u_3}}{4} \approx 0{,}915$ à 10^{-3} près.
Ainsi, pour $N = 4 \geqslant 2$ on a $u_N \leqslant 1$ donc, d'après la question **2.**, la suite $u(0)$ converge vers 0.
Par conséquent $\boxed{0 \in E_0}$.

5. a. Notons $f \circ g$ la fonction $x \mapsto f(g(x))$, composée de la fonction g par la fonction f.
La fonction $u_n : x \mapsto u_n(x)$ vérifie alors :

$$u_n = f_{n-1} \circ \cdots \circ f_1 \circ f_0$$

Remarque 3 : on peut bien noter $f \circ g \circ h$ sans parenthèse car $f \circ (g \circ h)(x) = (f \circ g) \circ h(x) = f(g(h(x)))$ là où cette expression est définie et donc $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$.

Or si f et g sont deux fonctions strictement croissantes $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ alors la fonction $f \circ g$ est strictement croissante $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.
Les fonctions f_i étant strictement croissantes $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, la fonction u_n est la composée d'un nombre fini de fonctions strictement croissantes $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, et elle est donc elle-même strictement croissante $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Ainsi, $\boxed{\text{la fonction } u_n \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}}$.

b. Supposons que $x \in E_0$.
Soit $\underline{\boldsymbol{x' \in]-\infty\,;\,x]}}$;
on a alors :

$$\begin{array}{lll} & x' \leqslant x & \\ \text{donc} & u_n(x') \leqslant u_n(x) & \text{car la fonction } u_n \text{ est croissante sur } \mathbb{R} \\ \text{donc} & 0 < u_n(x') \leqslant u_n(x) & \text{dès que } n \geqslant 1 \text{ d'après la question } \mathbf{1.} \end{array}$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(x) = 0$ car $0 \in E_0$, donc, par théorème d'encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(x') = 0$ c'est à dire $\underline{\boldsymbol{x' \in E_0}}$.
Ainsi, $\boxed{\text{si } x \in E_0 \text{ alors on a l'inclusion }]-\infty\,;\,x] \subset E_0}$.

6. a. Soit

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \mathrm{e}^x - x(x+1) \end{aligned}$$

h est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme différence de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout x réel on a :

$$\begin{aligned} h'(x) &= \mathrm{e}^x - 2x - 1 \\ h''(x) &= \mathrm{e}^x - 2 \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{array}{lll} & h''(x) > 0 & \\ \iff & \mathrm{e}^x > 2 & \\ \iff & x > \ln(2) & \text{par croissance de la fonction } \ln \text{ sur }]0\,;\,+\infty[. \end{array}$$

Donc h' est strictement croissante sur $]\ln(2)\,;\,+\infty[$.
Or $\ln(2) < 2$ et $h'(2) = e^2 - 5 > 0$ donc $h'(x) > 0$ sur $[2\,;\,+\infty[$.

Donc h est strictement croissante sur $[2\,;\,+\infty[$.

Et comme $h(2) = \mathrm{e}^2 - 6 > 0$,

$\boxed{h(x) \text{ est strictement positif sur } [2\,;\,+\infty[}$.

x	2	$+\infty$
$h''(x)$	$+$	
h'	$\mathrm{e}^2 - 5 > 0$ ↗	$+\infty$
$h'(x)$	$+$	
h	$\mathrm{e}^2 - 6 > 0$ ↗	$+\infty$

b. Soit u une suite de $\mathscr{S}$ tel qu'il existe un rang $N \geqslant 1$ pour lequel $u_N \geqslant N+1$.
Montrons par récurrence que la proposition $\mathscr{P}_n$: « $u_n \geqslant n+1$ » est vérifiée pour tout entier $n \geqslant N$.

- **Initialisation**

$\boldsymbol{\mathscr{P}_N}$ **est vérifiée** par hypothèse .

- **Hérédité**

Supposons que pour un entier $n \geqslant N$ la proposition $\mathscr{P}_n$ soit vérifiée :

$$u_n \geqslant n+1$$

$$f_n(u_n) \geqslant f_n(n+1) \qquad \text{par croissance de } f_n$$

$$u_{n+1} \geqslant \frac{\mathrm{e}^{n+1}}{n+1}$$

$$u_{n+1} \geqslant \frac{(n+1)(n+2)}{n+1} \qquad \text{car } h(x) > 0 \text{ si } x \geqslant 2 \text{ d'après la question } \mathbf{6.a.} \text{ et car } n+1 \geqslant 2 \text{ car } n \geqslant N \geqslant 1$$

$$u_{n+1} \geqslant n+2$$

Donc pour tout entier $n \geqslant N$, $\boldsymbol{\mathscr{P}_n \Longrightarrow \mathscr{P}_{n+1}}$.

Conclusion : par récurrence pour tout entier $n \geqslant N$ la proposition $\mathscr{P}_n$ est vérifiée :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N, \quad u_n \geqslant n+1.$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} n+1 = +\infty$ donc, par théorème d'encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
Ainsi, $\boxed{\text{si pour } u \in \mathscr{S} \text{ il existe un rang } N \geqslant 1 \text{ pour lequel } u_N \geqslant N+1 \text{ alors la suite } u \text{ diverge vers } +\infty}$.

c. Pour $x=1$, la suite $u(1)$ vérifie :

$$u_0 = 1$$
$$u_1 = \mathrm{e} \geqslant 1+1 = 2$$

donc, comme $n = 1 \geqslant 1$, d'après la question précédente, la suite $u(1)$ diverge vers $+\infty$ c'est à dire $\boxed{1 \in E_\infty}$.

7. Par le même raisonnement qu'à la question **5.b.**, la fonction u_n étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$,

$$\boxed{\text{si } x \in E_\infty \text{ alors on a } [x\,;\,+\infty[\subset E_\infty}.$$

8. On définit les suites (a_n) et (b_n) par récurrence de la manière suivante :

$a_0 = 0 \quad (\in E_0) \qquad\qquad b_0 = 1 \quad (\in E_\infty)$

On pose $\quad c_n = \dfrac{a_n + b_n}{2}$, centre le l'intervalle $[a_n\,;\,b_n]$.

Si $c_n \in E_0$	Si $c_n \notin E_0$
$\begin{cases} a_{n+1} = c_n \\ b_{n+1} = b_n \end{cases}$	$\begin{cases} a_{n+1} = a_n \\ b_{n+1} = c_n \end{cases}$

a.

1° Convergence des suites (a_n) et (b_n)

Démontrons par récurrence que la proposition $\quad \mathscr{P}_n :$ « $a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n$ » $\quad$ est vérifiée pour tout entier naturel n.

- **Initialisation**

Pour $n=0$ $\quad$ on a $\quad a_0 = 0, \quad b_0 = 1 \quad$ et $\quad c_0 = \dfrac{a_0+b_0}{2} = \dfrac{1}{2}$.

Si $c_0 \in E_0$	Si $c_0 \notin E_0$
$\begin{cases} a_1 = c_0 = \frac{1}{2} \\ b_1 = b_0 = 1 \end{cases}$	$\begin{cases} a_1 = a_0 = 0 \\ b_1 = c_0 = \frac{1}{2} \end{cases}$
Or $\quad 0 \leqslant \frac{1}{2} \leqslant 1 = 1$	Or $\quad 0 = 0 \leqslant \frac{1}{2} \leqslant 1$
donc $\quad a_0 \leqslant a_1 \leqslant b_1 = b_0$	donc $\quad a_0 = a_1 \leqslant b_1 \leqslant b_0$

Dans les deux cas $\quad a_0 \leqslant a_1 \leqslant b_1 \leqslant b_0$.

Ainsi, $\quad$ **$\mathscr{P}_0$ est vérifiée.**

- **Hérédité :**

Supposons que pour un entier $n \in \mathbb{N}$ on ait $\mathscr{P}_n$ vérifiée.

On a donc $\quad a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n$.

$c_{n+1} = \dfrac{a_{n+1}+b_{n+1}}{2} \in [a_{n+1}\,;\,b_{n+1}]$ $\quad$ et $a_{n+1} \leqslant b_{n+1}$ par hypothèse de récurrence.

Si $c_{n+1} \in E_0$	Si $c_{n+1} \notin E_0$
$\begin{cases} a_{n+2} = c_{n+1} \in [a_{n+1}\,;\,b_{n+1}] \\ b_{n+2} = b_{n+1} \end{cases}$	$\begin{cases} a_{n+2} = a_{n+1} \\ b_{n+2} = c_{n+1} \in [a_{n+1}\,;\,b_{n+1}] \end{cases}$
donc $\quad a_{n+1} \leqslant a_{n+2} \leqslant b_{n+2} = b_{n+1}$	donc $\quad a_{n+1} = a_{n+2} \leqslant b_{n+2} \leqslant b_{n+1}$

Dans les deux cas on a $\quad a_{n+1} \leqslant a_{n+2} \leqslant b_{n+2} \leqslant b_{n+1}$.

Ainsi, $\quad$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad \boldsymbol{\mathscr{P}_n \implies \mathscr{P}_{n+1}}$

Conclusion : par récurrence, $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \boldsymbol{\mathscr{P}_n}$ est vérifiée ;

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n.$$

D'après ces inégalités :

- La suite (a_n) est donc croissante et majorée par $b_0 = 1$ $\quad$ donc $\boxed{(a_n) \text{ converge vers un réel } \ell_a \leqslant 1}$.
- La suite (b_n) est donc décroissante et minorée par $a_0 = 0$ donc $\boxed{(b_n) \text{ converge vers un réel } \ell_b \geqslant 0}$.

2° Égalité des limites

Notons $\Delta_n = b_n - a_n$ la largeur de l'intervalle $[a_n\,;\,b_n]$.

Si $c_n \in E_0$

$$\begin{cases} a_{n+1} = c_n \\ b_{n+1} = b_n \end{cases}$$

donc $\Delta_{n+1} = b_n - \dfrac{a_n+b_n}{2} = \dfrac{b_n-a_n}{2} = \dfrac{\Delta_n}{2}$.

Si $c_n \notin E_0$

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n \\ b_{n+1} = c_n \end{cases}$$

donc $\Delta_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2} - a_n = \dfrac{b_n-a_n}{2} = \dfrac{\Delta_n}{2}$.

Dans les deux cas $\Delta_{n+1} = \dfrac{1}{2}\Delta_n$ donc la suite (Δ_n) est géométrique de raison $q = \dfrac{1}{2}$,

or $q \in]-1\,;\,1[$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \Delta_n = 0$.

Mais

$$\lim_{n\to+\infty} \Delta_n = \lim_{n\to+\infty} b_n - a_n = \ell_b - \ell_a \quad \text{par différence.}$$

Donc, par unicité de la limite de la suite (Δ_n), $\ell_b - \ell_a = 0$ et $\ell_a = \ell_b$.

Ainsi, $\boxed{\text{les suites } (a_n) \text{ et } (b_n) \text{ convergent vers une même limite } \delta\ (= \ell_b = \ell_a)}$.

b. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ la proposition $\mathscr{P}_n :$ « $a_n \in E_0$ et $b_n \in E_\infty$ » est vérifiée.

- **Initialisation**

  $a_0 = 0 \in E_0$ d'après la question **4.**.

  $b_0 = 1 \in E_\infty$ d'après la question **6.c.**.

  $\mathscr{P}_0$ est vérifiée.

- **Hérédité**

  Supposons que pour un entier $n \in \mathbb{N}$ on ait $\mathscr{P}_n$ vérifiée.

  On a donc $a_n \in E_0$ et $b_n \in E_\infty$.

  Si $c_n \in E_0$

  $$\begin{cases} a_{n+1} = c_n \in E_0 \\ b_{n+1} = b_n \in E_\infty \end{cases}$$

  Si $c_n \notin E_0$

  $$\begin{cases} a_{n+1} = a_n \in E_0 \\ b_{n+1} = c_n \notin E_0 \quad \text{c'est à dire} \quad b_{n+1} \in E_\infty \quad \text{d'après } \textbf{Remarque 3} \end{cases}$$

  Dans les deux cas on a $a_{n+1} \in E_0$ et $b_{n+1} \in E_\infty$.

  Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{\mathscr{P}_n \Longrightarrow \mathscr{P}_{n+1}}$

Conclusion : par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{\mathscr{P}_n}$ est vérifiée ;

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\quad a_n \in E_0 \quad \text{et} \quad b_n \in E_\infty}.$$

- Soit $x \in]-\infty\,;\,\delta[$.

  Comme la suite (a_n) croît et converge vers δ il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n > N$, $x < a_n \leqslant \delta$.

  Or $a_n \in E_0$ donc, d'après la question **5.b.**, $]-\infty\,;\,a_n] \subset E_0$ et donc $x \in]-\infty\,;\,a_n] \subset E_0$ donc $x \in E_0$.

  Ainsi $\boxed{]-\infty\,;\,\delta[\subset E_0}$.

- On raisonne de même à droite de δ, en utilisant cette fois la question **7.**, pour montrer que $\boxed{]\delta\,;\,+\infty[\subset E_\infty}$.

9. Pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, $\ell \geqslant 2$ on pose

$$c_\ell = \ln(\ln(2\ln(3\ln(\cdots\ln((l-1)\ln(\ell))\cdots))))$$

Remarque 4 : c_ℓ est bien défini car pour $n \geqslant 3 > \mathrm{e}$, $\ln(n) > 1$ et donc $\ln(3\ln(\cdots\ln((l-1)\ln(\ell))\cdots)) > 1$ par produit et stricte croissance de $\ln$ sur $]0\,;\,+\infty[$. Donc $\ln(2\ln(3\ln(\cdots\ln((l-1)\ln(\ell))\cdots))) > \ln(2) > 0$ ce qui prouve que c_ℓ est bien défini.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Posons $g_n(x) = \ln((n+1)x)$ de sorte que pour tout réel x on a $g_n \circ f_n(x) = x$; La fonction g_n est donc la bijection réciproque de la fonction f_n. La fonction g_n est alors strictement croissante $]0\,;\,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ car $n+1 \geqslant 1$ et par stricte croissance de la fonction $\ln$ sur $]0\,;\,+\infty[$. (De manière plus élémentaire, on peut prouver également la stricte croissance de g_n en invoquant le fait qu'elle est la réciproque d'une fonction strictement croissante).

Soit $\ell \in \mathbb{N}, \quad \ell \geqslant 2$. On a :

$$c_\ell = g_0 \circ g_1 \circ g_3 \circ \cdots \circ g_{\ell-2} \circ g_{\ell-1}(1).$$

Donc :

$$\begin{aligned} u_\ell(c_\ell) &= f_{\ell-1} \circ \cdots \circ f_1 \circ f_0 \circ g_0 \circ g_1 \circ g_2 \circ \cdots \circ g_{\ell-1}(1) \\ &= f_{\ell-1} \circ \cdots \circ f_1 \circ g_1 \circ \cdots \circ g_{\ell-1}(1) \qquad \text{(f_0 et g_0 se "compensent" puis f_1 et g_1...)} \\ &\vdots \\ &= f_{\ell-1} \circ g_{\ell-1}(1) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Donc pour la suite $u(c_\ell)$, il existe un rang $N(=\ell)$, $N \geqslant 2$ car $\ell \geqslant 2$, pour lequel $u_N = 1 \leqslant 1$.

Par conséquent, d'après la question **2.**, la suite $u(c_\ell)$ converge vers 0. Ainsi, $\boxed{\forall \ell \in \mathbb{N}, \quad \ell \geqslant 2, \quad c_\ell \in E_0}$.

10. Soit $n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant 2$.

Comparons c_n et c_{n+1} :

$$\begin{aligned} c_n &= g_0 \circ g_1 \circ g_3 \circ \cdots \circ g_{n-1}(1) \\ &= G_n(1) \end{aligned} \qquad \Bigg| \qquad \begin{aligned} c_{n+1} &= g_0 \circ g_1 \circ g_3 \circ \cdots \circ g_{n-1}(g_n(1)) \\ &= G_n(g_n(1)) \end{aligned}$$

en posant la fonction $G_n = g_0 \circ g_1 \circ g_3 \circ \cdots \circ g_{n-1}$ qui est strictement croissante sur son ensemble de définition $\mathscr{D}$ par stricte croissance des fonctions g_n.

De plus, on a bien $\quad 1 \in \mathscr{D} \quad$ et $\quad g_n(1) \in \mathscr{D} \quad$ car c_n et c_{n+1} sont bien définis (voir la **Remarque 4** ci-dessus).

Comparons $\quad 1 \quad$ et $\quad g_n(1) = \ln(n+1)$.

Comme $n \geqslant 2, \quad n+1 \geqslant 3 > \mathrm{e} \quad$ donc $\quad \ln(n+1) > \ln(\mathrm{e}) = 1 \quad$ par croissance stricte de $\ln$ sur $]0\,;+\infty[$.

Donc :

$$\begin{aligned} 1 &< g_n(1) \\ G_n(1) &< G_n(g_n(1)) \quad \text{par stricte croissance de } G_n \\ c_n &< c_{n+1} \end{aligned}$$

La suite (c_n) est donc croissante.

Or $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant 2, \quad c_n \in E_0 \quad$ d'après la question **9.** et

$E_0 = \mathbb{R} - E_\infty \subset]-\infty\,;\delta] \quad$ car $\quad]\delta\,;+\infty[\subset E_\infty \quad$ d'après la question **8.b.**.

La suite (c_n) est donc majorée par δ.

(c_n) est croissante et majorée par δ, donc $\boxed{(c_n) \text{ converge vers un réel } L \leqslant \delta}$.

11. • Montrons dans un premier temps que $L \in E_\infty$.

La suite (c_n) étant croissante, elle est majorée par sa limite : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant 2 \quad c_n \leqslant L$.

Par croissance de la fonction u_{n-1}, d'après la question **5.a.**, on a donc :

$$u_{n-1}(c_n) \leqslant u_{n-1}(L)$$

$$\text{donc} \quad \ln(n) \leqslant u_{n-1}(L)$$

Donc $\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 1,\ \ln(n+1) \leqslant u_n(L)\ $ et, comme $\ \lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n+1) = +\infty\ $, par théorème d'encadrement, $\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n(L) = +\infty$.

Ainsi, $\quad \boxed{L \in E_\infty}$.

• Montrons maintenant par l'absurde que $L = \delta$.

Supposons que $\delta \neq L$:

- Soit $\delta < L$ et alors il existe un rang N pour lequel $\delta < c_N$, par définition de la limite.
  Donc $\quad c_N \in]\delta\,;+\infty[\subset E_\infty \quad$, donc $\quad c_N \in E_\infty \quad$ ce qui contredit le fait que $c_N \in E_0$, résultat établi à la question **9.**.
- Soit $\delta > L$ donc $L \in]-\infty\,;\delta[\subset E_0$ donc $L \in E_0$ ce qui contredit le fait que $L \in E_\infty$ (voir ci-dessus).

On aboutit dans tous les cas à une contradiction, donc, par l'absurde, $\delta = L$ et comme $L \in E_\infty$, $\quad \boxed{\delta \in E_\infty}$.

Ainsi on a démontré l'existence d'un nombre réel $\delta \in]0\,;1[$ tel que, pour toute suite u de $\mathscr{S}$, on a :

- si $x < \delta$ alors la suite $u(x)$ converge vers 0,
- si $x \geqslant \delta$ alors la suite $u(x)$ diverge vers $+\infty$.

De plus on sait approcher ce réel δ car $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = \delta$.

Problème n°2 – La loi du milieu

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$.
Le problème revient à choisir des entiers dans l'ensemble $E_n = \{0 ; 1 ; 2 ; \cdots ; 2n\}$, qui contient $2n+1$ éléments, selon le protocole suivant :

1° On choisit 3 entiers dans E_n ;
2° Si $a < b < c$ sont ces trois entiers, on élimine a et c et on replace b dans E_n ;
3° On recommence les étapes **1°** et **2°**.

Au bout de n tirages qu'il ne reste qu'un entier qu'on note D_n.

Soit $k \in \mathbb{Z}$, on note $\boldsymbol{P}[D_n = k]$ la probabilité que l'entier D_n restant soit égal à k.
D_n est une variable aléatoire dont on notera $D_n(\Omega)$ l'univers image, c'est à dire les valeurs prises par D_n.

I – Etude des petits cas

1. $D_1(\Omega) = \{1\}$.
En effet l'ensemble $E_1 = \{0 ; 1 ; 2\}$ ne contient que 3 éléments ; il n'y a donc q'une possibilité pour y choisir trois entiers : $0 < 1 < 2$. On élimine 0 et 2 et on replace 1 qui est alors le dernier entier restant. D_1 suit donc une loi certaine, puisqu'il n'y a qu'une issue :

$$\boxed{D_1(\Omega) = \{1\} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{P}[D_n = 1] = 1}.$$

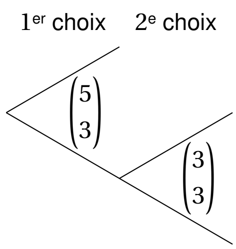
2. $D_2(\Omega) = \{1 ; 2 \ ; 3\}$.
En effet on a $E_2 = \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4\}$.
0 ne peut pas être la dernière valeur restante car sinon, cela signifie qu'au dernier tirage, on obtiendrait trois entiers $a, b, c \in E_n$ tels que $a < b < c$ avec $b = 0$. On aurait donc $a < 0$ et $a \in E_2$, ce qui est impossible. Donc $0 \not\in D_2(\Omega)$.
De même $4 \not\in D_2(\Omega)$ sinon on aurait un entier $c > 4$ dans E_2 juste avant le dernier tirage.
Les 3 autres valeurs sont en revanche "atteignables" comme nous allons le voir ci-après.

- **Univers et loi de l'expérience aléatoire**

On peut considérer qu'une issue du problème est une manière d'effectuer les 2 tirages. Dénombrons leur ensemble, Ω, c'est à dire l'univers de cette expérience aléatoire.

- Au 1er tirage il y a $\binom{5}{3} = \binom{5}{5-3} = \binom{5}{2} = \dfrac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$ manières de choisir 3 entiers parmi les 5.
- Au 2e tirage il y a $\binom{3}{3} = 1$ manière de choisir les 3 entiers.

On a donc l'arbre de dénombrement simplifié :



Il y a $\binom{5}{3} \times \binom{3}{3} = 10$ branches, soit 10 manières d'effectuer un choix en suivant le protocole, ces 10 issues étant équiprobables, les entiers de E_n étant indiscernables. $\boxed{\text{L'univers } \Omega \text{ est formé de 10 issues équiprobables}}$.

- **Loi de la variable** D_2.

Reste à déterminer $\boldsymbol{P}[D_n = k]$, pour $k \in \{1 ; 2 \ ; 3\}$.

- $\boldsymbol{k = 1}$

Dénombrons les issues de l'événement « $D_2 = 1$ » :
Le dernier tirage a donné nécessairement $0 < 1 < c$, car un seul entier de E_2 est strictement inférieur à 1, à savoir 0.
Au premier tirage, on a tiré trois entiers $a' < b' < c'$. $a' > 1$ car sinon il manque soit 0 soit 1 pour le deuxième tirage. Les tirages étant effectués dans $E_2 = \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4\}$, la seule possibilité est donc : $(a' ; b' ; c') = (2 ; 3 ; 4)$.
Ainsi, une seule manière d'effectuer les deux tirages aboutit à un entier final égal à 1, à savoir :
choisir $2 < 3 < 4$ au premier tirage, remettre 3 dans E_2, puis choisir $0 < 1 < 3$ au deuxième.
Comme les issues sont équiprobables ,

$$\boldsymbol{P}[D_2 = 1] = \frac{\text{nb cas favorables}}{\text{nb cas possibles}} = \frac{1}{10}.$$

- $\boldsymbol{k = 3}$

En utilisant la symétrie du problème on obtient par un raisonnement analogue :

$$\boldsymbol{P}[D_2 = 3] = \frac{1}{10}.$$

• $\boldsymbol{k = 2}$

Comme $\boldsymbol{P}[D_2 = 1] + \boldsymbol{P}[D_2 = 2] + \boldsymbol{P}[D_2 = 3] = \boldsymbol{P}(\Omega) = 1$,
$$\frac{1}{10} + \boldsymbol{P}[D_2 = 2] + \frac{1}{10} = 1$$
donc :
$$\boldsymbol{P}[D_2 = 2] = \frac{8}{10} \left(= \frac{4}{5} \right).$$

Ainsi, on a bien $D_2(\Omega) = \{\,1\ ;\ 2\ ;\ 3\}$ et la loi de la variable aléatoire D_2 se résume au tableau :

k	1	2	3
$\boldsymbol{P}[D_2 = k]$	$\frac{1}{10}$	$\frac{8}{10}$	$\frac{1}{10}$

II – Valeurs extrêmes et symétrie

3. L'événement « $D_n = 0$ » est impossible. En effet si 0 est choisit au dernier tirage, au tirage précédent on obtient trois entiers a, b et c de E_n, donc positifs ou nuls, tels que $a < b < c$ et $b = 0$. Ainsi on a $0 \leqslant a < 0$ donc $0 < 0$ ce qui est contradictoire. 0 ne peut donc pas être la dernière valeur restante et
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 1 \quad \boldsymbol{P}[D_2 = 0] = 0.}$$

4. Soit $n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 1$.

Univers

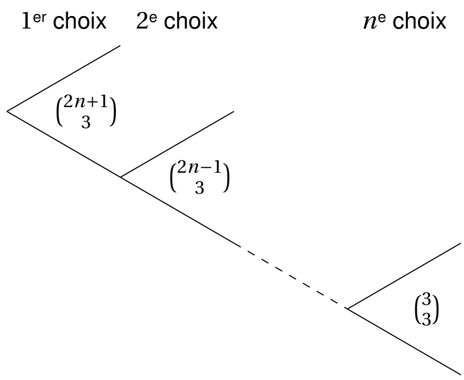
• au 1er tirage, il y a $\begin{pmatrix} 2n+1 \\ 3 \end{pmatrix}$ façons de choisir 3 entiers dans E_n qui contient $2n+1$ éléments ;

• au 2e tirage, il y a $\begin{pmatrix} 2n-1 \\ 3 \end{pmatrix}$ façons de choisir 3 entiers dans E_n qui ne contient plus que $2n+1-2 = 2n-1$ éléments ;

• au k^{e} tirage, il y a $\begin{pmatrix} 2n-2k+3 \\ 3 \end{pmatrix}$ façons de choisir 3 entiers dans E_n qui ne contient plus que $2n+1-2(k-1) = 2n-2k+3$ éléments ;

• au n^{e} tirage, il y a $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 1$ façon de choisir 3 entiers dans E_n, ce qui est normal puisqu'il reste 3 entiers dans E_n.

On a l'arbre de dénombrement simplifié :



Il y a donc $\begin{pmatrix} 2n+1 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2n-1 \\ 3 \end{pmatrix} \times \cdots \times \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \prod_{k=1}^{n} \begin{pmatrix} 2k+1 \\ 3 \end{pmatrix}$ issues équiprobables dans l'univers.

Événement « $D_n = 1$ »

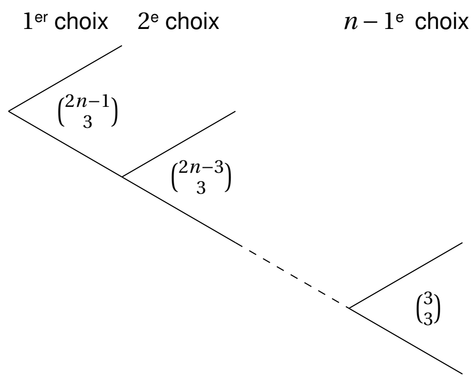
En nommant $a < b < c$ les 3 entiers obtenus au dernier tirage, comme $D_n = 1$ on a $a < b = 1 < c$ donc $0 \leqslant a < 1$ donc $a = 0$ et $c \in \{2\,;\,3\,;\,\cdots\,;\,2n\}$.

Réciproquement, si au dernier tirage on tombe sur les entiers 0, 1 et $c \geqslant 2$ on obtient bien 1 comme entier restant.

Ainsi on a l'équivalence :

$D_n = 1 \iff$ 0 et 1 sont présents au dernier tirage
$\iff$ 0 et 1 n'ont jamais été choisis lors des $n-1$ précédents tirages
$\iff$ les $n-1$ précédents tirages ont été effectués dans $E_n - \{0\,;\,1\}$ (qui contient $2n-1$ éléments)

L'arbre simplifié suivant permet donc de dénombrer les issues de l'événement « $D_n = 1$ » :



Il y a donc $\dbinom{2n-1}{3} \times \dbinom{2n-3}{3} \times \cdots \times \dbinom{5}{3} \times \dbinom{3}{3} = \displaystyle\prod_{k=2}^{n} \dbinom{2k-1}{3}$ issues qui réalisent l'événement « $D_n = 1$ », une issue étant un $(n-1)$-uplets de tirages permettant d'obtenir 1 comme entier restant.

Les issues étant équiprobables,

$$\boldsymbol{P}[D_n = 1] = \frac{\displaystyle\prod_{k=2}^{n} \binom{2k-1}{3}}{\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \binom{2k+1}{3}} = \frac{1}{\dbinom{2n+1}{3}}$$

D'où

$$\boxed{\boldsymbol{P}[D_n = 1] = \frac{6}{(2n+1)(2n)(2n-1)}}.$$

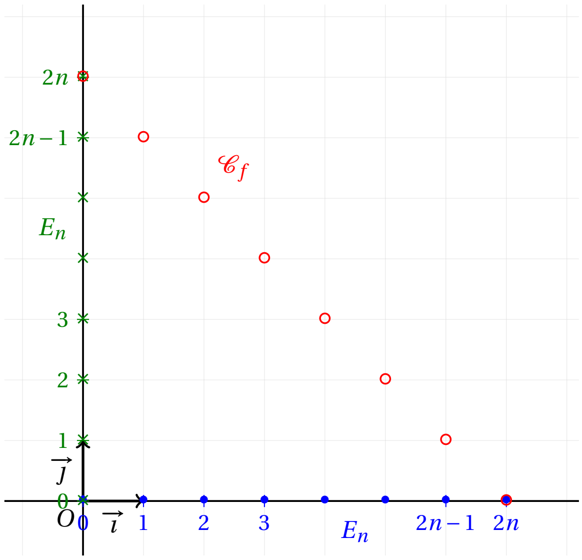
Vérification :

. Pour $n = 1$ on retrouve bien $\boldsymbol{P}[D_1 = 1] = \dfrac{6}{3 \times 2 \times 1} = 1$.

. Pour $n = 2$ on retrouve bien $\boldsymbol{P}[D_2 = 1] = \dfrac{6}{5 \times 4 \times 3} = \dfrac{1}{10}$.

5. Soit

$$f : \begin{array}{ccc} E_n & \longrightarrow & E_n \\ x & \longmapsto & 2n - x \end{array} .$$



Solution résumée

L' application f laisse stable E_n : $\quad \forall x \in E_n, \quad f(x) \in E_n$.

Par ailleurs f est une involution de $E_n \longrightarrow E_n$: $\quad \forall x \in E_n, \quad f(f(x)) = x \quad$.

(En notant $\mathrm{Id}_{E_n} : x \mapsto x$ l'application identité de E_n, ces deux propriétés de f se réécrivent aussi $f(E_n) \subset E_n$ et $f \circ f = \mathrm{Id}_{E_n}$).

f est donc bijective $E_n \longrightarrow E_n$ de bijection réciproque $f^{-1} = f$.

Elle *induit* une involution φ de l'univers Ω, ensemble formé des n-uplets de tirages respectant le protocole. Cette bijection, φ, envoie, pour tout élément i de E_n, l'ensemble $[D_n = i]$ sur l'ensemble $[D_n = 2n - i]$ notamment car f est strictement décroissante. L'application φ étant bijective, $[D_n = i]$ et $[D_n = 2n - i]$ ont le même nombre d'éléments et comme la loi de l'expérience aléatoire sur Ω est uniforme,

$$\boxed{\forall i \in E_n, \quad \boldsymbol{P}[D_n = i] = \boldsymbol{P}[D_n = 2n - i]}.$$

Solution détaillée

1° f laisse E_n stable

En effet si k est un entier tel que $0 \leqslant k \leqslant 2n$, alors $f(k) = 2n - k$ est un entier et

$$\begin{array}{rcl} 0 \leqslant & k & \leqslant 2n \\ 0 \geqslant & -k & \geqslant -2n \quad \text{car } -1 < 0 \\ 2n \geqslant & 2n - k & \geqslant 0 \end{array}$$

donc si $k \in E_n$ alors $f(k) \in E_n$: E_n est bien stable par f.

2° f est une involution de E_n

Cherchons les antécédents éventuels de $y \in E_n$ par f.

$$\begin{array}{rcl} x \text{ antécédent de } y \text{ par } f & \Longleftrightarrow & f(x) = y \\ & \Longleftrightarrow & 2n - x = y \\ & \Longleftrightarrow & x = 2n - y \\ & \Longleftrightarrow & x = f(y) \end{array}$$

Donc tout élément $y \in E_n$ est une image par f (celle de $f(y)$) et admet un unique antécédent par f, à savoir $f(y)$. f est donc bijective de $E_n \longrightarrow E_n$ (l'ensemble d'arrivée étant égal à l'ensemble de départ, on dit que la bijection f est une permutation de E_n). L'application réciproque de f étant elle-même, on dit que f est une involution de E_n.

3° Construction de $\tilde{f}(T)$ où T est un tirage de trois entiers de E_n

Au tirage $T = \{a < b < c\}$ – notation signifiant que $T = \{a\,;\, b\,;\, c\}$ avec $a < b < c$ – on peut alors associer le tirage $\tilde{f}(T) = \{f(a) > f(b) > f(c)\}$ (dans cet ordre car f est strictement décroissante).

Par stabilité de E_n par f, $f(a)$, $f(b)$ et $f(c)$ sont dans E_n ; $\tilde{f}(T)$ correspond donc bien à un tirage de 3 éléments de E_n et

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\tilde{f}(T)) &= \{f(f(a))\,;\, f(f(b)))\,;\, f(f(c))\} \\ &= \{a\,;\, b\,;\, c\} \\ &= T \end{aligned}$$

$\tilde{f}$ est une involution de l'ensemble $\mathscr{T}$ des tirages de 3 entiers de E_n dans lui-même, c'est donc une bijection $\mathscr{T} \longmapsto \mathscr{T}$.

4° Construction de l'involution φ de l'univers Ω

En notant T_k le k^e tirage effectué lors des n tirages réalisés d'une issue ω de Ω, l'application

$$\varphi : \begin{array}{rcl} \Omega & \longrightarrow & \Omega \\ \omega = (T_1\,;\,T_2\,;\,\cdots\,;\,T_n) & \longmapsto & \varphi(\omega) = (\tilde{f}(T_1)\,;\,\tilde{f}(T_2)\,;\,\cdots\,;\,\tilde{f}(T_n)) \end{array}$$

est également une involution de l'univers Ω dans lui-même, Ω étant l'ensemble des n-uplets de tirages de trois entiers possibles respectant le protocole ; en effet :

- Si $\omega \in \Omega$, $\varphi(\omega) \in \Omega$ car f est strictement décroissante $E_n \longmapsto E_n$: si $\omega = (T_1, T_2, \cdots, T_n)$ respecte le protocole, alors $\varphi(\omega)$ aussi et donc $\varphi(\omega) \in \Omega$.
- $$\begin{aligned} \varphi(\varphi(\omega)) &= \varphi(\varphi((T_1\,;\,T_2\,;\,\cdots\,;\,T_n))) \\ &= \varphi((\tilde{f}(T_1)\,;\,\tilde{f}(T_2)\,;\,\cdots\,;\,\tilde{f}(T_n))) \\ &= (\tilde{f}(\tilde{f}(T_1))\,;\,\tilde{f}(\tilde{f}(T_2))\,;\,\cdots\,;\,\tilde{f}(\tilde{f}(T_n))) \\ &= (T_1\,;\,T_2\,;\,\cdots\,;\,T_n) \\ &= \omega \end{aligned}$$

Ainsi Ω est stable par φ et $\varphi(\varphi((T_1\,;\,T_2\,;\,\cdots\,;\,T_n))) = (T_1\,;\,T_2\,;\,\cdots\,;\,T_n)$.

Autrement dit, $\varphi(\Omega) \subset \Omega$ et $\varphi \circ \varphi = Id_\Omega$: φ est donc bien une involution de Ω dans lui-même.

5° L'événement $[D_n = i]$ est envoyé sur $[D_n = 2n - i]$ par φ

Soit $i \in E_n$.

On a l'équivalence :

$$\begin{aligned} \omega \in [D_n = i] &\iff \omega = (T_1\,;\,T_2\,;\,\cdots\,;\,T_n) \quad \text{avec} \quad T_n = \{a < i < b\} \quad \text{où} \quad a, b \in E_n \\ &\iff \varphi(\omega) = (\tilde{f}(T_1)\,;\,\tilde{f}(T_2)\,;\,\cdots\,;\,\tilde{f}(T_n)) \quad \text{avec} \quad \tilde{f}(T_n) = \{f(a) > f(i) > f(b)\} \\ &\iff \varphi(\omega) \in [D_n = f(i)] \\ &\iff \varphi(\omega) \in [D_n = 2n - i] \end{aligned}$$

Ainsi, $\omega \in [D_n = i] \iff \varphi(\omega) \in [D_n = 2n - i]$.

φ étant une bijection $[D_n = i]$ et $[D_n = 2n - i]$ ont le même nombre d'éléments, et chaque issue de Ω étant équiprobable,

$$\boxed{\boldsymbol{P}[D_n = i] = \boldsymbol{P}[D_n = 2n - i]}.$$

6. D'après la question **5.**,

- d'une part $D_n(\Omega) = (2n - D_n)(\Omega) = E_n$;
- d'autre part $\forall k \in E_n,\quad \boldsymbol{P}[2n - D_n = k] = \boldsymbol{P}[D_n = k]$.

Les variables aléatoires D_n et $2n - D_n$ suivent donc la même loi et ont donc en particulier la même espérance.

En notant $E(X)$ l'espérance de la variable aléatoire X, on a :

$$\begin{aligned} E(2n - D_n) &= E(D_n) \\ 2n - E(D_n) &= E(D_n) \quad \text{par linéarité de l'espérance et car} \quad E(a) = a \quad \text{si } a \in \mathbb{R} \\ 2n &= 2E(D_n) \end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 1 \quad E(D_n) = n}$.

III – Comportement limite

7. On considère (u_n) la suite définie par :

$$u_n = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \cdots \times \frac{2n-1}{2n} \quad \text{si } n \text{ entier } n \geqslant 1 \qquad \text{et} \qquad u_0 = 1.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Posons $v_n = \dfrac{1}{\sqrt{3n+1}}$.

On veut montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n \leqslant v_n$.

u_n et v_n étant des réels positifs comparons, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ et $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n+1}{2n+2}, \qquad\qquad \frac{v_{n+1}}{v_n} = \sqrt{\frac{3n+1}{3n+4}}.$$

Donc

$$\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right)^2-\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)^2=\frac{3n+1}{3n+4}-\left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^2$$

$$=\frac{(3n+1)(2n+2)^2-(3n+4)(2n+1)^2}{(3n+4)(2n+2)^2}$$

$$=\frac{P(n)}{(3n+4)(2n+2)^2}$$

Comme $3n+4>0$ et $(2n+2)^2>0$ car $n\in\mathbb{N}$,
cette expression est du signe de $P(n)$ qui se simplifie en :

$$\begin{aligned}P(n)&=(3n+1)(4n^2+8n+4)-(3n+4)(4n^2+4n+1)\\&=(28-28)n^2+(20-19)n+4-4\\&=n\end{aligned}$$

Et comme $n\geqslant 0$ on a

$$\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right)^2\geqslant\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)^2.$$

Or les 2 membres sont des nombres strictement positifs, donc, par croissance de $x\mapsto\sqrt{x}$ sur $[0\,;\,+\infty[$, on a :

$$0<\frac{u_{n+1}}{u_n}\leqslant\frac{v_{n+1}}{v_n}$$

et cela pour tout entier naturel n. Donc $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}\frac{u_{n+1}}{u_n}\leqslant\prod_{k=0}^{n-1}\frac{v_{n+1}}{v_n}$ par produit, les inégalités étant de même sens et leurs membres étant des réels positifs.

Ces deux produits se simplifient par télescopage et on obtient $u_n\leqslant v_n$ car $u_0=v_0=1$.

Ainsi :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\qquad u_n\leqslant\frac{1}{\sqrt{3n+1}}}.$$

8. À la première sélection, on peut choisir $\binom{2n+1}{3}$ parties à 3 éléments dans E_n, ensemble formé de $2n+1$ éléments, le choix de chacune de ces parties étant équiprobable.
Soit $j\in E_n$.
Parmi celles-ci, celles éliminant l'entier j sont les parties d'un des 2 types (disjoints) suivants :

- Soit du type $\{a\,;\,b\,;\,j\}$ avec $a<b<j$.

  Choisir une telle partie revient à choisir $\{a\,;\,b\}$ dans l'ensemble $\{0\,;\,1\,;\,\cdots\,;\,j-1\}$; il y a $\binom{j}{2}$ manières de le faire.
- Soit du type $\{j\,;\,b\,;\,c\}$ avec $j<b<c$.

  Choisir une telle partie revient à choisir $\{b\,;\,c\}$ dans l'ensemble $\{j+1\,;\,j+2\,;\,\cdots\,;\,2n\}$; il y a $\binom{2n-j}{2}$ manières de le faire.

Il y a donc $\binom{j}{2}+\binom{2n-j}{2}$ parties à 3 éléments dont une "extrémité" est j.
Ainsi, la probabilité p_j que l'entier j soit éliminé au 1^{er} tirage vaut :

$$p_j=\frac{\text{nb cas favorables}}{\text{nb cas possibles}}$$

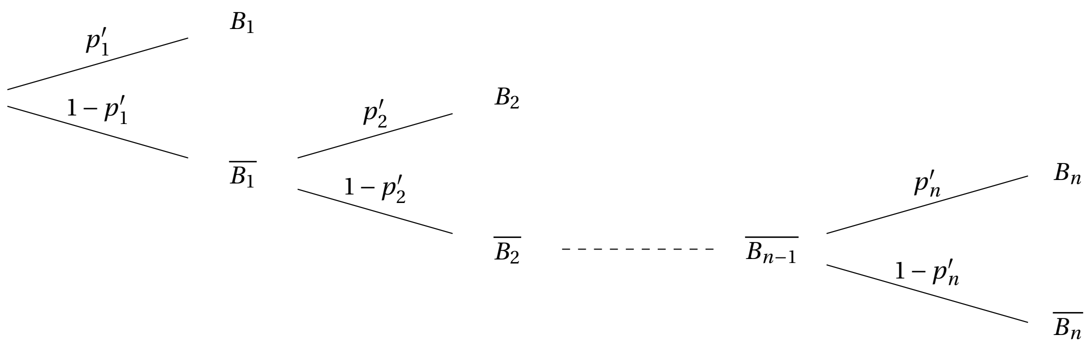
$$=\frac{\binom{j}{2}+\binom{2n-j}{2}}{\binom{2n+1}{3}}$$

$$=\frac{j(j-1)+(2n-j)(2n-j-1)}{2}\times\frac{6}{(2n+1)2n(2n-1)}$$

Ainsi, $\boxed{\forall j\in E_n,\quad p_j=3\frac{j(j-1)+(2n-j)(2n-j-1)}{(2n+1)2n(2n-1)}}$.

9. Soit $n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant 3 \quad$ et $\quad j \in E_n$.
Considérons
$$\begin{aligned} Q(j) &= j(j-1) + (2n-j)(2n-j-1) \\ &= 2j^2 + (-1-2n-2n+1)j + 2n(2n-1) \\ &= 2j^2 - 4nj + 2n(2n-1) \end{aligned}$$
en posant $\quad Q(x) = 2x^2 - 4nx + 2n(2n-1)$. $\quad Q$ est une fonction polynôme donc est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :
$$\begin{aligned} Q'(x) &= 4x - 4n \\ &= 4(x-n) \end{aligned}$$
$Q'(x) > 0 \iff x > n$ donc Q atteint son minimum en n et donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ et donc à plus forte raison pour tout entier j de $E_n \subset \mathbb{R}$, on a :
$$2n(n-1) \leqslant Q(j) \quad \text{(avec égalité pour } j = n \in E_n \text{)}$$
$$\text{donc} \quad \frac{3(n-1)}{(2n+1)(2n-1)} \leqslant p_j \qquad (\alpha)$$
Or
$$\begin{aligned} & \frac{1}{2n} \leqslant \frac{3(n-1)}{(2n+1)(2n-1)} \\ \iff \quad & 0 \leqslant \frac{3(n-1)}{(2n+1)(2n-1)} - \frac{1}{2n} \\ \iff \quad & 0 \leqslant \frac{6n(n-1) - (2n+1)(2n-1)}{(2n+1)2n(2n-1)} \\ \iff \quad & 0 \leqslant 2n^2 - 6n + 1 \qquad \text{car } n \geqslant 3 \text{ donc } (2n+1)2n(2n-1) > 0 \end{aligned}$$
Posons $\quad a = 2, \quad b = -6, \quad c = 1$
$$\begin{aligned} &\Delta b^2 - 4ac \\ &36 - 8 \\ &28 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} n_1 &= \frac{6 - 2\sqrt{7}}{4} \\ &= \frac{3 - \sqrt{7}}{2} \\ &\approx 0,18 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} n_2 &= \frac{3 + \sqrt{7}}{2} \\ &\approx 2,82 \end{aligned}$$
Et comme $a = 2 > 0$ et les valeurs approchées étant à 10^{-2} près, la dernière inégalité est vérifiée dès que $n \geqslant 3$ et ainsi :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant 3, \qquad \frac{1}{2n} \leqslant \frac{3(n-1)}{(2n+1)(2n-1)}.$$
En combinant avec l'inégalité (α), on obtient l'inégalité souhaitée :
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant 3, \quad \forall j \in E_n, \qquad \frac{1}{2n} \leqslant p_j.}$$

10. Soit M_n la plus grande des probabilités $\boldsymbol{P}[D_n = j]$ lorsque $j \in E_n$.
Soit $j \in E_n$.
Notons B_k l'événement : « l'entier j est éliminé au ke tirage »
$$\begin{aligned} [D_n = j] &= \overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \cdots \cap \overline{B_n} \\ &= \bigcap_{k=0}^{n} \overline{B_k} \end{aligned}$$
Or on a l'arbre :



donc d'après l'arbre (c'est à dire d'après la formule des probabilités totales) :

$$\boldsymbol{P}[D_n = j] = \prod_{k=0}^{n} (1 - p'_k)$$

où $p'_k = \boldsymbol{P}$(« j est éliminé à l'étape k sachant qu'il n'a pas été éliminé auparavant »).

$$p'_k \geqslant \frac{1}{2(n-k+1)} \qquad \text{en raisonnant comme à la question } \mathbf{9.}$$

$$\text{donc} \quad 1 - p'_k \leqslant 1 - \frac{1}{2(n-k+1)}$$

$$\text{donc} \quad 1 - p'_k \leqslant \frac{2(n-k+1)-1}{2(n-k+1))}$$

Et comme $0 < 1 - p'_k$ pour tout $k \in E_n$,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{P}[D_n = j] &\leqslant \prod_{k=0}^{n} \frac{2(n-k+1)-1}{2(n-k+1)} \\
&= \prod_{K=0}^{n} \frac{2K-1}{2K} \qquad \text{en posant le changement d'indice} \quad K = n-k+1 \\
&= u_n \\
&\leqslant \frac{1}{\sqrt{3n+1}} \qquad \text{d'après la question } \mathbf{7.}
\end{aligned}$$

Cette majoration étant indépendante de $j \in E_n$, on a :

$$\underbrace{0}_{\text{car } M_n \text{ est une probabilité}} \leqslant M_n \leqslant \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$$

Et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{3n+1}} = 0$, par théorème d'encadrement, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} M_n = 0}$.

IV – Résultat le plus probable

Le but de cette partie est de montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 \leqslant n, \quad M_n = \boldsymbol{P}[D_n = n]$.
On introduit pour cela la proposition $\mathscr{P}_n$ suivante :

Pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n-1$, on a $\boldsymbol{P}[D_n = k] \leqslant \boldsymbol{P}[D_n = k+1]$

11. Si $\mathscr{P}_n$ est vraie alors

$$\boldsymbol{P}[D_n = 0] \leqslant \boldsymbol{P}[D_n = 1] \leqslant \cdots \leqslant \boldsymbol{P}[D_n = n-1] \leqslant \boldsymbol{P}[D_n = n]$$

et par la propriété de symétrie, démontrée à la question **5.** :

$$\boldsymbol{P}[D_n = 2n] \leqslant \boldsymbol{P}[D_n = 2n-1] \leqslant \cdots \leqslant \boldsymbol{P}[D_n = n+1] \leqslant \boldsymbol{P}[D_n = n].$$

$\boldsymbol{P}[D_n = n]$ est donc bien la plus grande des probabilités $\boldsymbol{P}[D_n = j]$ lorsque $j \in E_n$,
c'est à dire $M_n = \boldsymbol{P}[D_n = n]$, par définition de M_n.
Ainsi, $\boxed{\mathscr{P}_n \text{ vraie } \Longrightarrow M_n = \boldsymbol{P}[D_n = n]}$.

12. $n = 1$.
Soit k un entier tel que $0 \leqslant k \leqslant n - 1 = 0$, c'est à dire $k = 0$.
Or, d'après la question **1.**, on a bien $\boldsymbol{P}[D_1 = 0] = 0 \leqslant 1 = \boldsymbol{P}[D_1 = 0]$.
Ainsi, la propriété $\boxed{\mathscr{P}_1 \text{ est bien vraie}}$.

On suppose qu'il existe un entier $n \geqslant 2$ tel que $\mathscr{P}_{n-1}$ est vraie et que k est un entier tel que $0 \leqslant k \leqslant n$. (hypothèse de récurrence)

13. Soit $\ell \in E_n - \{k\,;\ k+1\}$. On note X_ℓ l'événement :

« les entiers k, $k+1$ et ℓ sont choisis dès le premier tirage ».

a. Si $\ell > k+1$, si X_ℓ est réalisé, on a $k < k+1 < \ell$ au premier tirage donc k et ℓ sont retirés.

- k ne sera donc plus là au dernier tirage, si bien que $\boxed{\boldsymbol{P}_{X_\ell}[D_n = k] = 0}$.
- et on a l'égalité des probabilités :

$\boldsymbol{P}_{X_\ell}[D_n = k+1]$

$= \boldsymbol{P}($« Le dernier entier de E_n est $k+1$ sachant qu'on a retiré l'entier $k < k+1$ et un entier $\ell > k+1$ au 1^{er} tirage »$)$

$= \boldsymbol{P}($« Le dernier entier de E_{n-1} est k »$)$ (au 1^{er} tirage, on a également ici un choix à faire parmi $k-1$ entiers $j < k$

$= \boldsymbol{P}[D_{n-1} = k]$ ou parmi $2n-k-1$ entiers $j > k$, l'ordre des entiers restant inchangé).

Donc $\boxed{\boldsymbol{P}_{X_\ell}[D_n = k+1] = \boldsymbol{P}[D_{n-1} = k]}$.

b. De même, si $\ell < k$ on a $\ell < k < k+1$ et donc :

$\boxed{\bullet\ \boldsymbol{P}_{X_\ell}[D_n = k] = \boldsymbol{P}[D_{n-1} = k-1] \qquad \bullet\ \boldsymbol{P}_{X_\ell}[D_n = k+1] = 0}$

c. X : « k et $k+1$ sont choisis à la première étape ».

$$X = X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_{k-1} \cup X_{k+2} \cup \cdots \cup X_{2n}$$
$$= \bigcup_{\ell \in E_{k,n}} X_\ell \qquad \text{en notant} \quad E_{k,n} = E_n - \{k\,;\ k+1\}.$$

On a :

$$\boldsymbol{P}_X[D_n = k] = \frac{\boldsymbol{P}(X \cap [D_n = k])}{\boldsymbol{P}(X)}$$

$$= \frac{1}{\boldsymbol{P}(X)} \sum_{\ell \in E_{k;n}} \boldsymbol{P}(X_\ell \cap [D_n = k]) \quad \text{car les événements } X_\ell \text{ sont 2 à 2 disjoints}$$

$$= \frac{1}{\boldsymbol{P}(X)} \sum_{\ell \in E_{k;n}} \boldsymbol{P}(X_\ell) \boldsymbol{P}_{X_\ell}[D_n = k])$$

$$= \sum_{\ell=0}^{k-1} \frac{\boldsymbol{P}(X_\ell)}{\boldsymbol{P}(X)} \underbrace{\boldsymbol{P}_{X_\ell}[D_n = k]}_{=\boldsymbol{P}[D_{n-1}=k-1] \text{ d'après } \mathbf{b.}} + \sum_{\ell=k+2}^{2n} \frac{\boldsymbol{P}(X_\ell)}{\boldsymbol{P}(X)} \underbrace{\boldsymbol{P}_{X_\ell}[D_n = k]}_{=0 \text{ d'après } \mathbf{a.}}$$

$$= \sum_{\ell=0}^{k-1} \frac{\boldsymbol{P}(X_\ell)}{\boldsymbol{P}(X)} \boldsymbol{P}[D_{n-1} = k-1]$$

$$\leqslant \sum_{\ell=0}^{k-1} \frac{\boldsymbol{P}(X_\ell)}{\boldsymbol{P}(X)} \boldsymbol{P}[D_{n-1} = k] \quad \text{car, par hypothèse de récurrence, } \mathscr{P}_{n-1} \text{ est vraie et car } \frac{\boldsymbol{P}(X_\ell)}{\boldsymbol{P}(X)} \geqslant 0$$

$$= \boldsymbol{P}_X[D_n = k+1] \quad \text{par le même calcul que pour } \boldsymbol{P}_X[D_n = k].$$

Ainsi $\boxed{\boldsymbol{P}_X[D_n = k] \leqslant \boldsymbol{P}_X[D_n = k+1]}$.

14. Y : « k ou $k+1$ est éliminé au 1er tirage »

a.

$Y\setminus X$: « k ou $k+1$ est éliminé au 1er tirage » \ « k et $k+1$ sont choisis à la première étape »
$\iff$ « l'un des entiers k ou $k+1$ n'est pas choisi et l'autre est éliminé, à la première étape ».

Notons C_k l'événement : « l'entier k est choisi à la première étape »
et E_k l'événement : « l'entier k est éliminé à la première étape »

$$Y\setminus X = \left(E_k \cap \overline{C_{k+1}}\right) \cup \left(E_{k+1} \cap \overline{C_k}\right)$$

•
$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}_{Y\setminus X}[D_n = k] &= \boldsymbol{P}_{Y\setminus X}([D_n = k] \cap (Y\setminus X)) \\ &= \boldsymbol{P}_{Y\setminus X}\left([D_n = k] \cap \left(\left(E_k \cap \overline{C_{k+1}}\right) \cup \left(E_{k+1} \cap \overline{C_k}\right)\right)\right) \\ &= \boldsymbol{P}_{Y\setminus X}\left([D_n = k] \cap \left(E_{k+1} \cap \overline{C_k}\right)\right) \quad \text{car } [D_n = k] \cap E_k = \emptyset\end{aligned}$$

Notons F_l l'événement : « $k+1$ et ℓ sont éliminés et k n'est pas choisi, au 1er tour ». On ainsi $E_{k+1} \cap \overline{C_k} = \displaystyle\bigcup_{\ell<k \text{ ou } \ell>k+1} F_\ell$.
Cette union étant disjointe, on a :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}_{Y\setminus X}[D_n = k] &= \sum_{\ell<k \text{ ou } \ell>k+1} \boldsymbol{P}_{Y\setminus X}([D_n = k] \cap F_\ell) \\ &= \underline{\sum_{\ell<k} \boldsymbol{P}[D_{n-1} = k-1] + \sum_{\ell>k+1} \boldsymbol{P}[D_{n-1} = k]} \quad \text{par un raisonnement analogue à celui de la question } \textbf{13.a.}\end{aligned}$$

• De même on a :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}_{Y\setminus X}[D_n = k+1] &= \boldsymbol{P}_{Y\setminus X}([D_n = k+1] \cap (Y\setminus X)) \\ &= \boldsymbol{P}_{Y\setminus X}\left([D_n = k+1] \cap \left(\left(E_k \cap \overline{C_{k+1}}\right) \cup \left(E_{k+1} \cap \overline{C_k}\right)\right)\right) \\ &= \boldsymbol{P}_{Y\setminus X}\left([D_n = k+1] \cap \left(E_k \cap \overline{C_{k+1}}\right)\right) \quad \text{car } [D_n = k+1] \cap E_{k+1} = \emptyset\end{aligned}$$

Notons G_ℓ l'événement : « k et ℓ sont éliminés et $k+1$ n'est pas choisi, au 1er tour ». On ainsi $E_k \cap \overline{C_{k+1}} = \displaystyle\bigcup_{\ell<k \text{ ou } \ell>k+1} G_\ell$.
Cette union étant disjointe, on a :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}_{Y\setminus X}[D_n = k+1] &= \sum_{\ell<k \text{ ou } \ell>k+1} \boldsymbol{P}_{Y\setminus X}([D_n = k+1] \cap G_\ell) \\ &= \underline{\sum_{\ell<k} \boldsymbol{P}[D_{n-1} = k-1] + \sum_{\ell>k+1} \boldsymbol{P}[D_{n-1} = k]} \quad \text{par un raisonnement analogue à celui de la question } \textbf{13.a.}\end{aligned}$$

On aboutit à la même somme, si bien que :

$$\boxed{\boldsymbol{P}_{Y\setminus X}[D_n = k] = \boldsymbol{P}_{Y\setminus X}[D_n = k+1]}.$$

b. $Y = X \cup Y\setminus X$, l'union étant disjointe, donc

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}_Y[D_n = k] &= \frac{\boldsymbol{P}(X)}{\boldsymbol{P}(Y)} \underbrace{\boldsymbol{P}_X[D_n = k]}_{\leqslant \boldsymbol{P}_X[D_n=k+1] \text{d'après } \textbf{13.c.}} + \frac{\boldsymbol{P}(Y\setminus X)}{\boldsymbol{P}(Y)} \underbrace{\boldsymbol{P}_{Y\setminus X}[D_n = k]}_{=\boldsymbol{P}_{Y\setminus X}[D_n=k+1] \text{d'après } \textbf{14.a.}} \\ &\leqslant \frac{\boldsymbol{P}(X)}{\boldsymbol{P}(Y)} \boldsymbol{P}_X[D_n = k+1] + \frac{\boldsymbol{P}(Y\setminus X)}{\boldsymbol{P}(Y)} \boldsymbol{P}_{Y\setminus X}[D_n = k+1] \qquad \text{car } \frac{\boldsymbol{P}(X)}{\boldsymbol{P}(Y)} > 0 \text{ et } \frac{\boldsymbol{P}(Y\setminus X)}{\boldsymbol{P}(Y)} > 0 \\ &= \boldsymbol{P}_Y[D_n = k+1]\end{aligned}$$

15. Soit a, b, c les trois entiers choisis au premier tirage, avec $a < b < c$.

a. G : « $c < k$ ».

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}_G[D_n = k] &= \boldsymbol{P}[D_{n-1} = k-2] \\ &\leqslant \boldsymbol{P}[D_{n-1} = k-1] \qquad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= \boldsymbol{P}_G[D_n = k+1]\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\boldsymbol{P}_G[D_n = k] \leqslant \boldsymbol{P}_G[D_n = k+1]}$.

b. H : « $a < k$ et $k+1 < c$ ».

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}_H[D_n = k] &= \boldsymbol{P}[D_{n-1} = k-1] \\ &\leqslant \boldsymbol{P}[D_{n-1} = k] \qquad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= \boldsymbol{P}_H[D_n = k+1]\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\boldsymbol{P}_H[D_n = k] \leqslant \boldsymbol{P}_H[D_n = k+1]}$.

c. I : « $k+1<a$ ».

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P}_I[D_n=k] &= \boldsymbol{P}[D_{n-1}=k] \\ &\leqslant \boldsymbol{P}[D_{n-1}=k+1] \qquad \text{par hypothèse de récurrence si } k\leqslant n-2 \\ &= \boldsymbol{P}_I[D_n=k+1] \end{aligned}$$

Donc $\boxed{\boldsymbol{P}_I[D_n=k]\leqslant \boldsymbol{P}_I[D_n=k+1]}$.

16. Si $k\leqslant n-2$.
Comme $\Omega=G\cup H\cup I\cup Y$, ces événements étant disjoints 2 à 2,

$$\forall E\subset\Omega,\qquad \boldsymbol{P}(E)=\sum_{A\in\{G\,;\,H\,;\,I\,;\,Y\}}\boldsymbol{P}(A)\boldsymbol{P}_A(E)\qquad (\beta)$$

d'après la formule des probabilités totales.
Or d'après les questions **14.c.** et **15.a., 15.b.** et **15.c.**,

$$\forall A\in\{G\,;\,H;I\,;\,Y\},\quad \boldsymbol{P}_A[D_n=k]\leqslant \boldsymbol{P}_A[D_n=k+1]$$

en multipliant chacune de ces inégalités par $P(A)\geqslant 0$ et en les sommant, on obtient en utilisant l'égalité (β) d'une part avec $E=[D_n=k]$ et d'autre part avec $E=[D_n=k+1]$:

$$\boxed{\text{si}\quad k\leqslant n-2,\quad \boldsymbol{P}[D_n=k]\leqslant \boldsymbol{P}[D_n=k+1]}.$$

17. Reste à montrer que $\boldsymbol{P}[D_n=n-1]\leqslant \boldsymbol{P}[D_n=n]$ pour que la propriété $\mathscr{P}_n$ soit héréditaire, ce qui permettra d'achever la récurrence.
Soit $T_n=\{a\,;\,b\,;\,c\}$ le dernier tirage, avec $a<b<c$.

- Les événements « $c<n$ », « $a<n<c$ » et « $n<a$ » formant une partition de l'événement $[D_n=n]$, on a :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P}[D_n=n] &= \boldsymbol{P}([D_n=n] \text{ et } « c<n ») + \boldsymbol{P}([D_n=n] \text{ et } « a<n<c ») + \underbrace{\boldsymbol{P}([D_n=n] \text{ et } « n<a »)}_{=\boldsymbol{P}([D_n=n] \text{ et } « c<n ») \quad \text{par symétrie de la loi}} \\ &= 2\,\boldsymbol{P}([D_n=n] \text{ et } « c<n ») + \boldsymbol{P}([D_n=n] \text{ et } « a<n<c ») \\ &= 2\,\boldsymbol{P}[D_{n-1}=n-2] + \boldsymbol{P}[D_{n-1}=n-1] \end{aligned}$$

- Les événements « $c<n-1$ », « $a<n-1<c$ » et « $n-1<a$ » formant une partition de l'événement $[D_n=n-1]$, on a :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P}[D_n=n-1] &= \boldsymbol{P}([D_n=n-1] \text{ et } « c<n-1 ») + \boldsymbol{P}([D_n=n-1] \text{ et } « a<n-1<c ») + \boldsymbol{P}([D_n=n-1] \text{ et } « n-1<a ») \\ &= \boldsymbol{P}[D_{n-1}=n-3] + \boldsymbol{P}[D_{n-1}=n-2] + \boldsymbol{P}[D_{n-1}=n-1] \end{aligned}$$

Ainsi, par différence,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P}[D_n=n]-\boldsymbol{P}[D_n=n-1] &= \boldsymbol{P}[D_{n-1}=n-2]-\boldsymbol{P}[D_{n-1}=n-3] \\ &\geqslant 0 \quad \text{par hypothèse de récurrence.} \end{aligned}$$

Donc $\boldsymbol{P}[D_n=n-1]\leqslant \boldsymbol{P}[D_n=n]$,
et, grâce à la question **16.**,

$$\text{si}\quad k\leqslant \underline{n-1},\quad \boldsymbol{P}[D_n=k]\leqslant \boldsymbol{P}[D_n=k+1].$$

Par conséquent $\forall n\in\mathbb{N}, n\geqslant 2,\quad \mathscr{P}_{n-1}\Longrightarrow \mathscr{P}_n$. Or la propriété $\mathscr{P}_1$ est vérifiée, d'après la question **12.** ; ainsi, par récurrence, $\boxed{\forall\in\mathbb{N}, n\geqslant 1,\quad \mathscr{P}_n \text{ est vraie}}$, et d'après la question **11.**, on en conclut que

$$\boxed{\forall\in\mathbb{N}, n\geqslant 1,\quad M_n=\boldsymbol{P}[D_n=n]}.$$

PROBLÈME N°3 – Que la force soit avec f !

Dans tout le problème :

- k est un entier, $k \geqslant 1$,
- I est un intervalle ouvert inclus dans $]0\,;\,+\infty[$,
- f désigne une fonction $I \longmapsto]0\,;\,+\infty[$.

Si $x, y \in I$, on pose :

$$T_k(x\,;\,y) = \left(y^k f(y) - x^k f(x)\right)\left(\frac{f(y)}{y^k} - \frac{f(x)}{x^k}\right).$$

- f est dite « k-forte » si $\forall x, y \in I, \quad T_k(x\,;\,y) \geqslant 0$,
- f est dite « k-faible » si $\forall x, y \in I, \quad T_k(x\,;\,y) \leqslant 0$.

I – Quelques exemples et propriétés

1. On rappelle l'identité (F) qui permet de factoriser une différence de puissances de même exposant :

$$\begin{aligned}\forall x, a \in \mathbb{R}, \quad x^{n+1} - a^{n+1} &= (x-a)(x^n + ax^{n-1} + a^2x^{n-2} + \cdots + a^{n-1}x + a^n)\\ &= (x-a)\left(\sum_{k=0}^{n} a^{n-k}x^k\right).\end{aligned}$$

qu'on retrouve par exemple en développant le deuxième membre de l'égalité.
Soit

$$\begin{aligned} f_1 : I &\longrightarrow]0\,;\,+\infty[\\ x &\longmapsto x^2 \end{aligned} \qquad \text{avec} \qquad I =]0\,;\,+\infty[.$$

- Soient $x, y \in I$,

$$\begin{aligned}T_1(x\,;\,y) &= (y.y^2 - x.x^2)\left(\frac{y^2}{y} - \frac{x^2}{x}\right)\\ &= (y^3 - x^3)(y-x)\\ &= (y^2 + xy + y^2)(y-x)^2 \quad \text{en factorisant } y^3 - x^3 \text{ avec } (F)\end{aligned}$$

$x, y \in]0\,;\,+\infty[$ donc $y^2 + xy + y^2 > 0$ comme somme de réels strictement supérieurs à 0.
$(y-x)^2 \geqslant 0$ car le carré d'un réel est supérieur ou égal à 0.
Par produit de réels positifs ou nuls,

$$\forall x, y \in I, \quad T_1(x\,;\,y) \geqslant 0.$$

Donc $\boxed{f_1 \text{ est 1-forte}}$.

- Soient $x, y \in I$,

$$\begin{aligned}T_3(x\,;\,y) &= (y^3.y^2 - x^3.x^2)\left(\frac{y^2}{y^3} - \frac{x^2}{x^3}\right)\\ &= (y^5 - x^5)\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right)\\ &= (y-x)(y^4 + xy^3 + x^2y^2 + xy^3 + x^4)\left(\frac{x-y}{xy}\right) \quad \text{d'après } (F)\\ &= -\frac{(x-y)^2}{xy}(y^4 + xy^3 + x^2y^2 + xy^3 + x^4)\end{aligned}$$

Comme $x, y \in]0\,;\,+\infty[$, $y^4 + xy^3 + x^2y^2 + xy^3 + x^4 > 0$ comme somme de réels strictement supérieurs à 0.
$-(x-y)^2 \leqslant 0$ car le carré d'un réel est supérieur ou égal à 0 et car $-1 < 0$.
De plus $xy > 0$ car $x, y \in I$.
Par produit et quotient,

$$\forall x, y \in I, \quad T_3(x\,;\,y) \leqslant 0.$$

Donc $\boxed{f_1 \text{ est 3-faible}}$.

2. On considère la fonction :

$$\begin{aligned} f_2 : I &\longrightarrow]0\,;\,+\infty[\\ x &\longmapsto \mathrm{e}^x \end{aligned} \qquad \text{avec} \qquad I =]0\,;\,1[.$$

- Soient $x, y \in I$,

Montrons que $\quad (y\mathrm{e}^y - x\mathrm{e}^x)\left(\dfrac{\mathrm{e}^y}{y} - \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}\right) \leqslant 0.$

Posons g et h les fonctions définies et dérivables sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$g(x) = x\mathrm{e}^x \qquad\qquad h(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{x}$$

$$g'(x) = \mathrm{e}^x\,(x+1) \qquad\qquad h'(x) = \frac{\mathrm{e}^x\,(x-1)}{x^2}$$

- $g'(x) > 0$ sur I et même sur $]0\,;\,+\infty[$ car si $x > 0$ alors $x+1 > 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x > 0$.
  g est donc strictement croissante sur I donc l'accroissement $g(y) - g(x)$ y est du signe de $y - x$.
- $h'(x)$ est du signe de $x - 1$ car $\quad \mathrm{e}^x > 0, \quad$ et $\quad x^2 > 0 \quad$ car $x > 0$.
  Donc $h'(x) < 0$ sur I car si $x < 1$ alors $x - 1 < 0$,
  h est donc strictement décroissante sur I donc l'accroissement $h(y) - h(x)$ est du signe de $-(y - x)$.

Plus précisément, on a les tableaux de variations :

x	0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
g	1	$\nearrow$	$+\infty$

x	0		1		$+\infty$
$h'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
h	‖ $+\infty$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

Par conséquent $\quad T_1(x\,;\,y) = \big(g(y) - g(x)\big)\big(h(y) - h(x)\big) \quad$ est du signe de $\quad -(y-x)^2 \quad$ c'est à dire négatif ou nul, le carré d'un réel étant positif ou nul :

$$\forall x, y \in I, \quad T_1(x\,;\,y) \leqslant 0.$$

Donc $\boxed{f_2 \text{ est 1-faible}}$.

De plus, si on prend $x, y \in I$ tels que $x \neq y$ on a $g(y) - g(x) \neq 0$ et $h(y) - h(x) \neq 0$ par stricte monotonie de g et h sur $I =]0\,;\,1[$ donc le produit de ces réels, $T_1(x\,;\,y)$, est non nul. Donc $T_1(x\,;\,y) < 0$ si $x \neq y$ avec $x, y \in I$.

Donc $\boxed{f_2 \text{ n'est pas 1-forte}}$.

3.

$$\begin{aligned} f_3 : I &\longrightarrow]0\,;\,+\infty[\\ x &\longmapsto \mathrm{e}^x \end{aligned} \qquad \text{avec} \qquad I =]1\,;\,+\infty[.$$

Avec les mêmes notations qu'à la question précédente, sur $I =]1\,;\,+\infty[$, g est strictement croissante et h strictement croissante car, cette fois, $x - 1 > 0$ sur I.

Les accroissements entre x et y, $\quad g(y) - g(x) \quad$ et $\quad h(y) - h(x) \quad$ sont donc du signe de $y - x$ et leur produit, $T_1(x\,;\,y)$, du signe de $(y - x)^2$, donc positif ou nul (carré d'un réel).

Ainsi :

$$\forall x, y \in I, \quad T_1(x\,;\,y) \geqslant 0$$

Donc $\boxed{f_3 \text{ est } 1\text{−forte}}$.

Et si $x, y \in I, x \neq y$, par le même argument qu'à la question précédente, $T_1(x\,;\,y) \neq 0$, donc $T_1(x\,;\,y) > 0$.

Donc $\boxed{f_3 \text{ n'est pas } 1\text{−faible}}$.

4.

$$\begin{aligned} f_4 : I &\longrightarrow]0\,;\,+\infty[\\ x &\longmapsto \mathrm{e}^x \end{aligned} \qquad \text{avec} \qquad I =]0\,;\,+\infty[.$$

Soit $k \in \mathbb{N}, \quad k \geqslant 1$.

$$\begin{aligned} T_k(x\,;\,y) &= \left(y^k.\frac{1}{y} - x^3.\frac{1}{x}\right)\left(\frac{\frac{1}{y}}{y^k} - \frac{\frac{1}{x}}{x^k}\right) \\ &= (y^{k-1} - x^{k-1})\left(\frac{1}{y^{k+1}} - \frac{1}{x^{k+1}}\right) \end{aligned}$$

1° Si $k=1$, $\quad T_1(x\,;\,y)=0\leqslant 0$
Donc $\underline{f_4 \text{ est } 1\text{-faible}}$ (et 1-forte)

2° Si $k>1$,

$$\begin{aligned}
T_k(x\,;\,y) &= (y-x)\left(\sum_{j=0}^{k-2} x^j y^{k-2-j}\right)\left(\frac{x^{k+1}-y^{k+1}}{(xy)^{k+1}}\right) \qquad \text{d'après } (F) \text{ car } k>1\\
&= (y-x)\left(\sum_{j=0}^{k-2} x^j y^{k-2-j}\right)\frac{(x-y)\left(\sum_{j=0}^{k} x^j y^{k-j}\right)}{(xy)^{k+1}} \qquad \text{à nouveau d'après } (F)\\
&= -\frac{(y-x)^2}{(xy)^{k+1}}\left(\sum_{j=0}^{k-2} x^j y^{k-2-j}\right)\left(\sum_{j=0}^{k} x^j y^{k-j}\right).
\end{aligned}$$

* Les deux derniers facteurs sont des sommes de termes strictement positifs car $x>0$ et $y>0$, ils sont dont strictement positifs.
* $(xy)^{k+1}>0$ car $x>0$ et $y>0$.
* $-(y-x)^2\leqslant 0$ car le carré d'un réel est supérieur ou égal à 0 et car $-1<0$.

Par conséquent :

$$\forall x,y\in I,\quad T_k(x\,;\,y)\leqslant 0$$

Donc $\underline{f_4 \text{ est } k\text{-faible pour tout } k \text{ entier, } k>1}$.

Ainsi, d'après **1°** et **2°**, $\boxed{\text{pour tout entier } k\geqslant 1,\quad f_4 \text{ est } k\text{-faible}}$.

5. Soit f une fonction k-forte sur $I=]0\,;+\infty[$, pour tout entier $k\geqslant 1$.
Soient $x,y\in I,\quad x<y$.

$$\begin{aligned}
T_k(x\,;\,y) &= \left(y^k f(y)-x^k f(x)\right)\left(\frac{f(y)}{y^k}-\frac{f(x)}{x^k}\right)\\
&= f^2(y)-f(x)f(y)\left[\left(\frac{y}{x}\right)^k+\left(\frac{x}{y}\right)^k\right]+f^2(y) \qquad \text{en développant et en regroupant les termes.} \qquad (\alpha)
\end{aligned}$$

Comme $0<x<y$,

$\lim\limits_{k\to+\infty}\left(\frac{y}{x}\right)^k=+\infty$ (suite géométrique de raison $\frac{y}{x}>1$).

$\lim\limits_{k\to+\infty}\left(\frac{x}{y}\right)^k=0$ (suite géométrique de raison $0<\frac{y}{x}<1$).

Or $f(x)>0$ et $f(y)>0$, donc, par somme et produit, $\lim\limits_{k\to+\infty} f(x)f(y)\left[\left(\frac{y}{x}\right)^k+\left(\frac{x}{y}\right)^k\right]=+\infty$

et $\lim\limits_{k\to+\infty} T_k(x\,;\,y)=-\infty$ ce qui contredit l'hypothèse « pour tout k entier, $k\geqslant 1$, $\quad T_k(x\,;\,y)\geqslant 0$ ».

Ainsi, par l'absurde, $\boxed{\text{il n'existe pas de fonction définie sur } I=]0\,;+\infty[\text{ qui soit } k\text{-forte pour tout entier } k\geqslant 0}$.

Remarque 1 : le raisonnement reste encore correct pour un intervalle I ouvert *inclus* dans $]0\,;+\infty[$.

II – Quelques critères de force et de faiblesse

6. D'après l'égalité (α) on a :

$$\begin{aligned}
f \text{ est } k\text{-forte sur } I &\iff \forall x,y\in I,\quad f(x)f(y)\left[\left(\frac{y}{x}\right)^k+\left(\frac{x}{y}\right)^k\right]\leqslant f^2(y)+f^2(y)\\
&\iff \forall x,y\in I,\quad \left(\frac{y}{x}\right)^k+\left(\frac{x}{y}\right)^k\leqslant \frac{f(x)}{f(y)}+\frac{f(y)}{f(x)} \qquad \text{en divisant les deux membres par } f(x)f(y)>0
\end{aligned}$$

On traite de même la traduction de « f est k-faible sur I », en remplaçant le symbole "$\leqslant$" par "$\geqslant$".
Ainsi :

$$\boxed{\begin{aligned}
f \text{ est } k\text{-forte sur } I &\iff \forall x,y\in I,\quad \left(\frac{y}{x}\right)^k+\left(\frac{x}{y}\right)^k\leqslant \frac{f(x)}{f(y)}+\frac{f(y)}{f(x)}\\
f \text{ est } k\text{-faible sur } I &\iff \forall x,y\in I,\quad \left(\frac{y}{x}\right)^k+\left(\frac{x}{y}\right)^k\geqslant \frac{f(x)}{f(y)}+\frac{f(y)}{f(x)}
\end{aligned}}$$

7. Notons $R(X\,;\,Y)=\dfrac{X}{Y}+\dfrac{Y}{X}$ pour $X,Y\in]0\,;\,+\infty[$. On a :

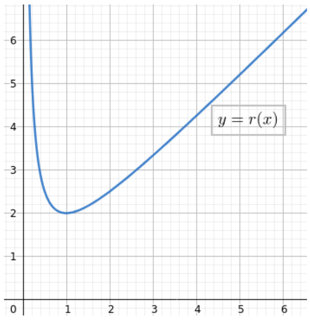
$$R(X\,;\,Y)=r\left(\frac{X}{Y}\right)\qquad\text{en posant}\qquad r(t)=t+\frac{1}{t}\quad\text{si}\quad t>0$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} f\ k\text{-forte} &\iff \forall x,y\in I\quad R(x^k\,;\,y^k)\leqslant R(f(x)\,;\,f(y)) \qquad \text{d'après la question } \mathbf{6.}\\ &\iff \forall x,y\in I\quad r\left(\frac{x^k}{y^k}\right)\leqslant r\left(\frac{f(x)}{f(y)}\right)\end{aligned}$$

Or r est strictement décroissante sur $]0\,;\,1]$ et strictement croissante sur $[1\,;\,+\infty[$ car dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ avec $r'(x)=1-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{(x-1)(x+1)}{x^2}$ qui est du signe de $x-1$ sur $]0\,;\,+\infty[$.

x	0		1		$+\infty$
$r'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
r	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$



Étudions les quatre cas selon que $\dfrac{x^k}{y^k}>1$ ou non, et selon que $\dfrac{f(x)}{f(y)}>1$ ou non :

	$\dfrac{f(x)}{f(y)}\leqslant 1$	$\dfrac{f(x)}{f(y)}>1$
$\dfrac{x^k}{y^k}\leqslant 1$	$\begin{aligned} & r\left(\frac{x^k}{y^k}\right)\leqslant r\left(\frac{f(x)}{f(y)}\right)\\ \iff & \frac{x^k}{y^k}\geqslant\frac{f(x)}{f(y)}\quad (a)\\ \iff & \frac{y^k}{x^k}\leqslant\frac{f(y)}{f(x)}\end{aligned}$	$\begin{aligned} & r\left(\frac{x^k}{y^k}\right)\leqslant r\left(\frac{f(x)}{f(y)}\right)\\ \iff & r\left(\frac{y^k}{x^k}\right)\leqslant r\left(\frac{f(x)}{f(y)}\right)\quad (c)\\ \iff & \frac{y^k}{x^k}\leqslant\frac{f(x)}{f(y)}\quad (b)\end{aligned}$
$\dfrac{x^k}{y^k}>1$	$\begin{aligned} & r\left(\frac{x^k}{y^k}\right)\leqslant r\left(\frac{f(x)}{f(y)}\right)\\ \iff & r\left(\frac{x^k}{y^k}\right)\leqslant r\left(\frac{f(y)}{f(x)}\right)\quad (c)\\ \iff & \frac{x^k}{y^k}\leqslant\frac{f(y)}{f(x)}\quad (b)\end{aligned}$	$\begin{aligned} & r\left(\frac{x^k}{y^k}\right)\leqslant r\left(\frac{f(x)}{f(y)}\right)\\ \iff & \frac{x^k}{y^k}\leqslant\frac{f(x)}{f(y)}\quad (b)\end{aligned}$

(a) : car r est strictement décroissante sur $]0\,;\,1]$.

(b) : car r est strictement croissante sur $]1\,;\,+\infty[$.

(c) : car $\forall t\in]0\,;\,+\infty[,\quad r\left(\dfrac{1}{t}\right)=r(t)$.

Or, a et b étant des réels strictement positifs,

$$\text{si } \frac{a}{b}\geqslant 1 \text{ c'est à dire } \frac{b}{a}\leqslant 1,\text{ alors } \frac{\max(a\,;\,b)}{\min(a\,;\,b)}=\frac{a}{b}.$$

Ainsi, la dernière inégalité de chacune de ces 4 équivalences se réécrit à chaque fois $\dfrac{\max(x^k\,;\,y^k)}{\min(x^k\,;\,y^k)}\leqslant\dfrac{\max(f(x)\,;\,f(y))}{\min(f(x)\,;\,f(y))}$ car $x^k>0,\quad y^k>0,\quad f(x)>0,\quad$ et $\quad f(y)>0$.

Par conséquent :

$$\boxed{f\text{ est }k\text{-forte sur }I\iff\forall x,y\in I\quad\frac{\max(x^k\,;\,y^k)}{\min(x^k\,;\,y^k)}\leqslant\frac{\max(f(x)\,;\,f(y))}{\min(f(x)\,;\,f(y))}}.$$

et, en renversant le sens de toutes les inégalités dans le raisonnement précédent :

$$\boxed{f \text{ est } k\text{-faible sur } I \iff \forall x, y \in I \quad \frac{\max(x^k\,;\,y^k)}{\min(x^k\,;\,y^k)} \geqslant \frac{\max(f(x)\,;\,f(y))}{\min(f(x)\,;\,f(y))}}.$$

8. On note g_k et h_k les fonctions définies sur I par :

$$g_k(x) = x^k f(x) \qquad \text{et} \qquad h_k(x) = \frac{f(x)}{x^k}.$$

a. On a :

$$g_k \text{ est monotone sur } I \iff \forall x, y \in I \quad (y-x)\big(g_k(y) - g_k(x)\big) \text{ garde un signe constant}$$

$$h_k \text{ est monotone sur } I \iff \forall x, y \in I \quad (y-x)\big(h_k(y) - h_k(x)\big) \text{ garde un signe constant}$$

Donc, si g_k et h_k sont monotones, alors

$(y-x)\big(g_k(y) - g_k(x)\big) \times (y-x)\big(h_k(y) - h_k(x)\big) = (y-x)^2 T_k(x\,;\,y)$ garde un signe constant lorsque x et y décrivent I.

- Si $x = y$ alors $T_k(x\,;\,y) = 0$.
- Si $x \neq y$ alors $T_k(x\,;\,y)$ garde un signe constant lorsque x et y décrivent I, car $(y-x)^2 > 0$ car $x \neq y$.

Par conséquent :

- Soit $\forall x, y \in I \quad T_k(x\,;\,y) \geqslant 0$ et alors f est k-forte sur I.
- Soit $\forall x, y \in I \quad T_k(x\,;\,y) \leqslant 0$ et alors f est k-faible sur I.

Ainsi, $\boxed{\text{si } g_k \text{ et } h_k \text{ sont monotones alors } f \text{ est soit } k\text{-forte, soit } k\text{-faible}}$.

Remarque 2 :

Si g_k et h_k sont monotones et de monotonie différente alors $\forall x, y \in I \quad T_k(x\,;\,y) \leqslant 0$ et donc f est k-faible sur I.

b. Tout d'abord on a l'équivalence :

$$\begin{aligned}
f \ k\text{-faible} &\iff \forall x, y \in I \quad \big(g_k(y) - g_k(x)\big)\big(h_k(y) - h_k(x)\big) \leqslant 0 \\
&\iff \forall x, y \in I \quad \big(g_k(y) - g_k(x)\big)\left(\frac{g_k(y)}{y^{2k}} - \frac{g_k(x)}{x^{2k}}\right) \leqslant 0 \qquad (\beta_1) \\
&\iff \forall x, y \in I \quad \big(y^{2k} h_k(y) - x^{2k} h_k(x)\big)\big(h_k(y) - h_k(x)\big) \leqslant 0 \qquad (\beta_2)
\end{aligned}$$

Soit f une fonction k-faible.

- Supposons qu'il existe $\quad x, y \in I, \quad x < y \quad h_k(y) > h_k(x) \qquad (H)$

Alors :

* D'une part $\qquad \underline{h_k(y) - h_k(x) > 0}$

* D'autre part :

$$y^{2k} > x^{2k} > \mathbf{0} \qquad \text{car } X \mapsto X^{2k} \text{ est strictement croissante sur }]0\,;\,+\infty[\text{ car } k \geqslant 1$$

donc $\quad y^{2k} h_k(y) > x^{2k} h_k(x) \quad$ par produit, $\quad$ car $h_k(y) > h_k(x) > \mathbf{0}$

$\underline{y^{2k} h_k(y) - x^{2k} h_k(x) > 0}$

Ainsi, comme produit de réels strictement positifs, $\big(y^{2k} h_k(y) - x^{2k} h_k(x)\big)\big(h_k(y) - h_k(x)\big) > 0$ ce qui contredit l'inégalité (β_2) : l'hypothèse (H) est fausse et donc, par l'absurde :

$$\forall x, y \in I, \quad x < y, \quad h_k(x) \geqslant h_k(y).$$

Ainsi, $\boxed{\text{si } f \text{ est } k\text{-faible sur } I \text{ alors } h_k \text{ est décroissante sur } I}$.

Soit f une fonction k-faible.

- Supposons qu'il existe $\quad x, y \in I, \quad x < y \quad g_k(y) < g_k(x) \qquad (H')$

Alors :

* D'une part $\qquad \underline{g_k(y) - g_k(x) < 0}$

* D'autre part :

$$\mathbf{0} < \frac{1}{y^{2k}} < \frac{1}{x^{2k}} \qquad \text{car } X \mapsto \frac{1}{X^{2k}} \text{ est strictement décroissante sur }]0\,;\,+\infty[\text{ car } k \geqslant 1$$

$$\text{donc} \quad \frac{g_k(y)}{y^{2k}} < \frac{g_k(x)}{x^{2k}} \qquad \text{par produit, car} \quad \mathbf{0} < g_k(y) < g_k(x)$$

$$\underline{\frac{g_k(y)}{y^{2k}} - \frac{g_k(x)}{x^{2k}} < 0}$$

Ainsi, comme produit de réels strictement négatifs, $\quad \left(g_k(y) - g_k(x)\right)\left(\frac{g_k(y)}{y^{2k}} - \frac{g_k(x)}{x^{2k}}\right) > 0 \quad$ ce qui contredit l'inégalité (β_1) : l'hypothèse (H') est fausse et donc, par l'absurde :

$$\forall x, y \in I, \quad x < y, \quad g_k(x) \leqslant g_k(y).$$

Ainsi, $\boxed{\text{si } f \text{ est } k\text{-faible sur } I \text{ alors } g_k \text{ est croissante sur } I}$.

Remarque 3 :

Ainsi, d'après **Remarque 2**, à la question précédente, on a l'équivalence :

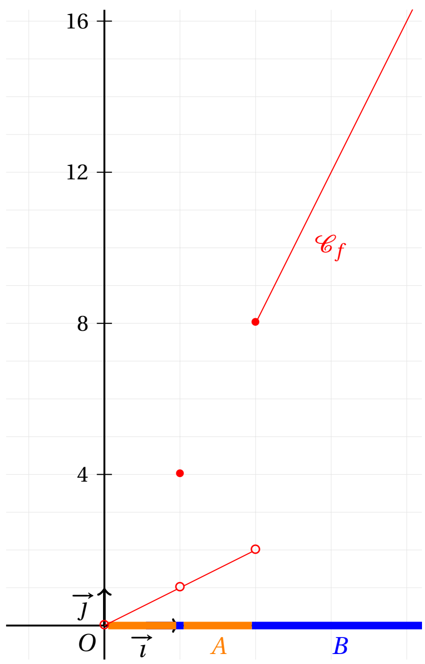
$$\left(f \text{ est } k\text{-faible sur} I\right) \iff \left(g_k \text{ est croissante sur } I \text{ et } h_k \text{ est décroissante sur } I\right).$$

c.

Soit f la fonction définie sur $I =]0\,;\,+\infty[= A \cup B$ avec
$A =]0\,;\,1[\cup]1\,;\,2[$ et
$B = \{1\} \cup [2\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in A \\ 4x & \text{si } x \in B \end{cases}$$

Les parties A et B sont disjointes si bien qu'elles forment une partition de $]0\,;\,+\infty[$.



Montrons que f est 1-forte sur I.

Soient $x, y \in I$, $\quad$ calculons $T_1(x\,;\,y)$ selon que x et y sont dans A ou dans B :

	$y \in A$	$y \in B$
$x \in A$	$T_1(x\,;\,y) = (y^2 - x^2)(1-1)$ $= 0$	$T_1(x\,;\,y) = (4y^2 - x^2)(4-1)$ $= 3(2y-x)(2y+x)$ **
$x \in B$	$T_1(x\,;\,y) = (y^2 - 4x^2)(1-4)$ $= -3(y-2x)(y+2x)$ $= 3(2x-y)(y+2x)$ **	$T_1(x\,;\,y) = (4y^2 - 4x^2)(4-4)$ $= 0$

Comme $x>0$ et $y>0$, il reste uniquement à voir pourquoi les facteurs marqués avec ** dans le tableau sont positifs, c'est à dire pourquoi $2b-a \geqslant 0$ si $a \in A$ et $b \in B$.

- Si $b=1$ alors $\quad 2b=2>a \quad$ car A est strictement majoré par 2. Donc $\quad 2b-a>0$.
- Sinon $b>2$ car $b \in B$ donc $2b>4$. Or si $a \in A$, $a<2$, donc $\quad 2b-a>4-2=2>0$.

Ainsi dans tous les cas possibles, $T_1(x\,;\,y) \geqslant 0$.

Donc $\boxed{f \text{ est 1-forte sur } I}$.

Par ailleurs,

$$g_1(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si } x \in A \\ 4x^2 & \text{si } x \in B \end{cases}$$

donc g_1 n'est pas monotone car $0,5<1<1,5$

alors que $\quad g_1(0,5)=0,25<4=g_1(1)$

et $\quad g_1(1)=4>2,25=g_1(1,5)$

$$h_1(x)=\begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 4 & \text{si } x \in B \end{cases}$$

donc h_1 n'est pas monotone car $0,5<1<1,5$

alors que $\quad h_1(0,5)=1<4=h_1(1)$

et $\quad h_1(1)=4>1=h_1(1,5)$

$\boxed{f \text{ est un exemple de fonction 1-forte telle que ni } g_1 \text{ ni } h_1 \text{ n'est monotone}}$.

9. On suppose ici que f est dérivable sur I et que sa dévirée f' est continue sur I.

a.

- g_k est dérivable sur I comme produit de fonctions dérivables sur l'intervalle I et :

$$\begin{aligned} g_k'(x) &= kx^{k-1}f(x)+x^kf'(x) \quad \text{car} \quad (uv)'=u'v+uv' \\ &= x^{k-1}\big(kf(x)+xf'(x)\big) \end{aligned}$$

g_k' est donc continue comme produit et somme de fonctions continues sur I ; l'intégrale suivante existe donc et on peut écrire :

$$\begin{aligned} \text{soit} \quad A(x\,;\,y) &= g_k(y)-g_k(x) \quad \text{(on note ici } A \text{ plutôt que } A_k \text{ pour alléger les notations)} \\ &= \int_x^y g_k'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_x^y t^{k-1}\big(kf(t)+tf'(t)\big)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

- h_k est dérivable sur I comme quotient de f dérivable sur I par $x \mapsto x^k$ dérivable et ne s'annulant pas sur l'intervalle $I \quad (0 \notin I) \quad$ et :

$$\begin{aligned} h_k'(x) &= \frac{x^kf'(x)-kx^{k-1}f(x)}{x^{2k}} \quad \text{car} \quad \left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2} \\ &= \frac{xf'(x)-kf(x)}{x^{k+1}} \end{aligned}$$

h_k' est donc continue comme produit et somme de fonctions continues sur $I \quad (0 \notin I) \quad$ et donc l'intégrale suivante existe et on peut écrire :

$$\begin{aligned} \text{soit} \quad B(x\,;\,y) &= h_k(y)-h_k(x) \\ &= \int_x^y h_k'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_x^y \frac{tf'(t)-kf(t)}{t^{k+1}}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

- Ainsi :

$$\begin{aligned} T_k(x\,;\,y) &= A(x\,;\,y) \times B(x\,;\,y) \\ &= \left(\int_x^y t^{k-1}\big(kf(t)+tf'(t)\big)\,\mathrm{d}t\right)\left(\int_x^y \frac{tf'(t)-kf(t)}{t^{k+1}}\,\mathrm{d}t\right) \end{aligned}$$

- Or on suppose que pour tout réel $x \in I \quad \left|f'(x)\right| \geqslant k\dfrac{f(x)}{x} \qquad (I)$.

donc $f'(x)$ ne change pas de signe sur I car sinon on aurait $a, b \in I$, $\quad a<b$, $\quad$ tel que $f'(a) \times f'(b)<0$ et, en appliquant le théorème des valeurs intermédiaires à f' continue sur $[a\,,\,b]$, il existerait $c \in [a\,;\,b]$ tel que $f'(c)=0$ et alors on aurait $f(c)=0$ d'après l'inégalité (I), ce qui est exclu car f est à valeurs strictement positives.

Donc :

1° soit $\forall x \in I, \quad f'(x) > 0$ et donc

$$f'(x) \geqslant k\frac{f(x)}{x} \quad \text{d'après l'inégalité } (I)$$
$$f'(x) - k\frac{f(x)}{x} \geqslant 0$$
$$\frac{xf'(x) - kf(x)}{x^{k+1}} \geqslant 0 \quad \text{car } x > 0$$

donc $B(x\,;\,y) \geqslant 0$ si $x < y$ et $B(x\,;\,y) \leqslant 0$ sinon.
Or $A(x\,;\,y) \geqslant 0$ si $x < y$ et $A(x\,;\,y) \leqslant 0$ sinon, car $t^{k-1}\big(kf(t) + tf'(t)\big) > 0$ lorsque $t \in I$.

Par conséquent $\forall x, y \in I, \quad T_k(x\,;\,y) \geqslant 0$ par produit.

2° soit $\forall x \in I, \quad f'(x) < 0$ et donc

$$-f'(x) \geqslant k\frac{f(x)}{x} \quad \text{d'après l'inégalité } (I)$$
$$0 \geqslant f'(x) + k\frac{f(x)}{x}$$
$$0 \geqslant x^{k-1}\big(kf(x) + xf'(x)\big) \quad \text{car } x > 0$$

donc $A(x\,;\,y) \leqslant 0$ si $x < y$ et $A(x\,;\,y) \geqslant 0$ sinon.
Or $B(x\,;\,y) \leqslant 0$ si $x < y$ et $B(x\,;\,y) \geqslant 0$ sinon, car $\dfrac{tf'(t) - kf(t)}{t^{k+1}} < 0$ si $t \in I$.

Par conséquent $\forall x, y \in I, \quad T_k(x\,;\,y) \geqslant 0$ par produit.

Ainsi, dans tous les cas, $\forall x, y \in I, \quad T_k(x\,;\,y) \geqslant 0$.
Donc :

$$\boxed{\text{si} \quad \forall x \in I, \quad \big|f'(x)\big| \geqslant k\frac{f(x)}{x} \quad \text{alors} \quad f \text{ est } k\text{-forte}}.$$

b. Cette fois, on suppose que $\forall x \in I, \quad \big|f'(x)\big| \leqslant k\dfrac{f(x)}{x}$.
Donc :

$$-k\frac{f(x)}{x} \leqslant f'(x) \leqslant k\frac{f(x)}{x}$$
$$0 \leqslant f'(x) + k\frac{f(x)}{x} \quad \text{et} \quad f'(x) - k\frac{f(x)}{x} \leqslant 0$$
$$0 \leqslant x^{k-1}\big(kf(x) + xf'(x)\big) \quad \text{et} \quad \frac{xf'x) - kf(x)}{x^{k+1}} \leqslant 0 \quad \text{car } x > 0.$$

Par conséquent, de manière analogue à la question **a.**, on a :

- si $x < y$, alors $A(x\,;\,y) \geqslant 0$ et $B(x\,;\,y) \leqslant 0$ donc $T_k(x\,;\,y) \leqslant 0$.
- si $x \geqslant y$, alors $A(x\,;\,y) \leqslant 0$ et $B(x\,;\,y) \geqslant 0$ donc $T_k(x\,;\,y) \leqslant 0$.

Ainsi dans tous les cas $\forall x, y \in I, \quad T_k(x\,;\,y) \leqslant 0$.
Donc,

$$\boxed{\text{si} \quad \forall x \in I, \quad \big|f'(x)\big| \leqslant k\frac{f(x)}{x} \quad \text{alors} \quad f \text{ est } k\text{-faible}}.$$

c. Si h est une fonction continue sur I et si $a \in I$, alors on sait que $H : x \longmapsto \displaystyle\int_a^x h(t)\,\mathrm{d}t$ est une primitive de h, celle qui vérifie $H(a) = 0$.

Donc, en particulier, $H'(a) = h(a)$ c'est à dire $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{\int_a^x h(t)\,\mathrm{d}t}{x-a} = \lim_{x \to a} \frac{H(x) - H(a)}{x - a} = h(a)$.
Ainsi :

$$\lim_{y \to x} \frac{A(x\,;\,y)}{y-x}\,\frac{B(x\,;\,y)}{y-x} = g_k'(x) \times h_k'(x) \quad \text{par produit}$$
$$= x^{k-1}\big(kf(x) + xf'(x)\big)\,\frac{xf'(x) - kf(x)}{x^{k+1}}$$
$$= x^2\Big(\big[xf'(x)\big]^2\big) - \big[kf(x)\big]^2\Big).$$

Si f est k-forte, $\quad A(x\,;\,y)\times B(x\,;\,y)=T_k(x\,;\,y)\geqslant 0$ donc :

$$x^2\left(\left[xf'(x)\right]^2)-\left[kf(x)\right]^2\right)\geqslant 0 \qquad \text{par théorème d'encadrement, par "passage à la limite"}$$

$$\left[xf'(x)\right]^2)\geqslant\left[kf(x)\right]^2 \qquad \text{car } x>0$$

$$x\left|f'(x)\right|\geqslant kf(x) \qquad \text{car } x\longmapsto\sqrt{x} \text{ est croissante sur } [0\,;\,+\infty[\text{ et } x, k \text{ et } f(x) \text{ sont positifs}$$

$$\left|f'(x)\right|\geqslant k\frac{f(x)}{x} \qquad \text{car } x>0.$$

Ainsi,

$$\boxed{\text{si } \quad f \text{ est } k\text{-forte sur } I \quad \text{alors} \quad \forall x\in I \quad \left|f'(x)\right|\geqslant k\frac{f(x)}{x}}.$$

De même, en renversant le sens de toutes les inégalités ci-dessus, on obtient que :

$$\boxed{\text{si } \quad f \text{ est } k\text{-faible sur } I \quad \text{alors} \quad \forall x\in I \quad \left|f'(x)\right|\leqslant k\frac{f(x)}{x}}.$$

III – Une multitude de fonctions fortes et faibles

On dit que la fonction f est « forte » s'il existe un entier $k\geqslant 1$ pour lequel f est k-forte, et la fonction f est « faible » s'il existe un entier $k\geqslant 1$ pour lequel f est k-faible.

10. Soit $F=\dfrac{1}{f}$.

F est bien définie et à valeurs strictement positives sur I car f est à valeurs strictement positives sur I.
Si la fonction f est faible alors il existe un entier $k\geqslant 1$ tel que f est k-faible, donc, si $x, y\in I$:

$$\left(y^kf(y)-x^kf(x)\right)\left(\frac{f(y)}{y^k}-\frac{f(x)}{x^k}\right)\leqslant 0$$

$$\left(\frac{1}{x^kf(x)}-\frac{1}{y^kf(y)}\right)\left(\frac{x^k}{f(x)}-\frac{y^k}{f(y)}\right)\leqslant 0 \qquad \text{en divisant le 1}^{\text{er}} \text{ facteur par } f(x)f(y)x^ky^k>0$$

et en multipliant le second par $\dfrac{x^ky^k}{f(x)f(y)}>0$;

$$\left(y^kF(y)-x^kF(x)\right)\left(\frac{F(y)}{y^k}-\frac{F(x)}{x^k}\right)\leqslant 0 \qquad \text{en permutant les deux facteurs, en remplaçant } \frac{1}{f} \text{ par } F,$$

et en multipliant chacun des deux facteurs par $-1 \quad ((-1)^2>0)$.

Par conséquent F est k-faible donc faible.

Ainsi, $\boxed{\text{si la fonction } f \text{ est faible alors la fonction } \dfrac{1}{f} \text{ est faible}}$.

11. Soit f et g deux fonctions faibles définies sur I. D'après **Remarque 3**, on a alors, :

f est k-faible pour un entier $k>0$ $\iff\begin{cases} M_f^k : x\longmapsto x^kf(x) & \text{est croissante}\\ Q_f^k : x\longmapsto \dfrac{f(x)}{x^k} & \text{est décroissante}\end{cases}$	g est k-faible pour un entier $l>0$ $\iff\begin{cases} M_g^l : x\longmapsto x^lg(x) & \text{est croissante}\\ Q_g^l : x\longmapsto \dfrac{g(x)}{x^l} & \text{est décroissante}\end{cases}$

- **Somme $f+g$**

Soit $m=\max(k\,;\,l)$.

Comme $m-k\geqslant 0$ et $m-l\geqslant 0$ les fonctions $\mathrm{Id}^{m-k}:x\mapsto x^{m-k}$ et $\mathrm{Id}^{m-l}:x\mapsto x^{m-l}$ sont croissantes sur I (éventuellement constantes, mais une fonction constante est une fonction croissante particulière).

De même les fonctions $\mathrm{Id}^{k-m}:x\mapsto \dfrac{1}{x^{m-k}}$ et $\mathrm{Id}^{l-m}:x\mapsto \dfrac{1}{x^{m-l}}$ sont décroissantes sur I.

Or le produit de deux fonctions croissantes à valeurs positives sur I est une fonction croissante sur I et celui de deux fonctions décroissantes sur I à valeurs positives est une fonction décroissante sur I.

Ainsi,

- les fonctions $M_f^k\times \mathrm{Id}^{m-k}:x\longmapsto x^m f(x)$ et $M_g^l\times \mathrm{Id}^{m-l}:x\longmapsto x^m g(x)$ sont croissantes sur I.

Leur somme, qui est la fonction $M_{f+g}^m:x\longmapsto x^m(f+g)(x)$ est donc croissante.

- les fonctions $Q_f^k\times \mathrm{Id}^{k-m}:x\longmapsto \dfrac{f(x)}{x^m}$ et $Q_g^l\times \mathrm{Id}^{l-m}:x\longmapsto \dfrac{g(x)}{x^m}$ sont décroissantes sur I. Leur somme, qui est la fonction $Q_{f+g}^m:x\longmapsto \dfrac{(f+g)(x)}{x^m}$ est donc décroissante sur I .

M_{f+g}^m étant croissante sur I et Q_{f+g}^m décroissante sur I, $f+g$ est m-faible d'après **Remarque 3**, à la fin de la question **8.b.**.
$f+g$ est donc faible.

Ainsi, $\boxed{\text{si } f \text{ et } g \text{ sont faibles sur } I \text{ alors } f+g \text{ est faible sur } I}$.

- **Produit $f\times g$**
  - La fonction $M_{f\times g}^{k+l}=M_f^k\times M_g^l:x\longmapsto x^{k+l}(f\times g)(x)$ est croissante sur I
  comme produit des fonctions M_f^k et M_g^l, croissantes et à valeurs positives sur I.
  - La fonction $Q_{f\times g}^{k+l}=Q_f^k\times Q_g^l:x\longmapsto x^{k+l}(f\times g)(x)$ est décroissante sur I
  comme produit des fonctions Q_f^k et Q_g^l, décroissantes et à valeurs positives sur I.

$M_{f\times g}^{k+l}$ étant croissante sur I et $Q_{f\times g}^{k+l}$ décroissante sur I, la fonction $f\times g$ est $(k+l)$-faible sur I, donc faible sur I.

Ainsi, $\boxed{\text{si } f \text{ et } g \text{ sont faibles sur } I \text{ alors } f\times g \text{ est faible sur } I}$.

- **Quotient $\dfrac{f}{g}$**

Si f et g sont faibles sur I, alors, d'après la question **10.**, $\dfrac{1}{g}$ est faible sur I et donc la fonction $\dfrac{f}{g}=f\times\dfrac{1}{g}$ est faible sur I comme produit de fonctions faibles sur I.

Ainsi, $\boxed{\text{si } f \text{ et } g \text{ sont faibles sur } I \text{ alors } \dfrac{f}{g} \text{ est faible sur } I}$.

12. Utilisons le critère de caractérisation des fonctions définies et dérivables sur I et à dérivée continue sur I, étudié à la question **9.**, pour construire des contre-exemples.

- Soit $f:x\longmapsto \mathrm{e}^x$

$$\begin{array}{rrcl} & |f'(x)| & \geqslant & k\dfrac{f(x)}{x} \\ \iff & \mathrm{e}^x & \geqslant & k\dfrac{\mathrm{e}^x}{x} \\ \iff & x & \geqslant & k \qquad \text{car } x>0 \text{ et } \mathrm{e}^x>0 \end{array}$$

  f est donc $k-$forte sur $]k\,;\,+\infty[$.

- Soit $g=\dfrac{1}{f}:x\longmapsto \mathrm{e}^{-x}$.

  En raisonnant comme à la question **10.**, on montre que g est $k-$forte sur $]k\,;\,+\infty[$, car f est $k-$forte sur $]k\,;\,+\infty[$.

- Soit $h = f + g : x \longmapsto \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}$

$$\left|h'(x)\right| = |\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}| = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} \quad \text{car } x > 0$$

donc,

$$\begin{aligned} & \left|h'(x)\right| \geqslant k\frac{h(x)}{x} \\ \iff \quad & \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} \geqslant k\frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{x} \\ \iff \quad & x\frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} \geqslant k \qquad \text{car } x > 0 \text{ et } \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} > 0 \end{aligned}$$

Soit $p(x) = x\dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$.

p est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et $p(1) = \dfrac{\mathrm{e} - \mathrm{e}^{-1}}{\mathrm{e} + \mathrm{e}^{-1}} < 1$.

Par continuité en 1, il existe $a > 1$ tel que $p(a) < 1$ ($a = 1{,}1$ convient).

Pour $k = 1$ on a alors $a\dfrac{\mathrm{e}^a - \mathrm{e}^{-a}}{\mathrm{e}^a + \mathrm{e}^{-a}} < k$ donc $\left|h'(a)\right| < k\dfrac{h(a)}{a}$ avec $a \in I =]1\,;\,+\infty[$: h n'est donc pas k-forte d'après le critère de la question **9.**.

Ainsi, $\boxed{f \text{ et } g \text{ sont } 1\text{-forte sur } I =]1\,;\,+\infty[\text{ mais } f+g \text{ ne l'est pas}}$.

- Une fonction constante n'est k-forte pour aucune valeur de k.
  En effet, si c est une fonction constante sur I, à (unique) valeur C strictement positive, alors $\forall x \in I, \quad c'(x) = 0$ et donc :

$$\begin{aligned} &\text{si} && \left|c'(x)\right| \geqslant k\frac{c(x)}{x} \\ &\text{alors} && 0 \geqslant \underbrace{k\frac{C}{x}}_{>0} \\ &\text{donc} && 0 > 0 \qquad \text{ce qui est contradictoire.} \end{aligned}$$

Comme $f \times g$ est la fonction constante à 1, elle n' est k-forte pour aucune valeur de k.
Ainsi, $\boxed{f \text{ et } g \text{ sont } 1\text{-forte sur } I =]1\,;\,+\infty[\text{ mais } f \times g \text{ ne l'est pas}}$.

- Enfin $\boxed{f \text{ et } g = f \text{ sont } 1\text{-forte sur } I =]1\,;\,+\infty[\text{ mais } \dfrac{f}{g} = \dfrac{f}{f}, \text{ constante, ne l'est pas}}$.

13. Soit f une fonction définie sur I et à valeurs dans $]0\,;\,+\infty[$, et g une fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$.

a. Supposons f et g faibles ; alors f est k-faible pour un entier $k \geqslant 1$ et g est l-faible pour un entier $l \geqslant 1$.

Toujours en posant $r(x) = x + \dfrac{1}{x}$, d'après le critère la question **II.6.**, g étant une fonction faible, on a :

$$r\left(\frac{X^l}{Y^l}\right) \geqslant r\left(\frac{g(X)}{g(Y)}\right) \quad \text{pour tous réels } X, Y \text{ strictement positifs.}$$

Comme f est à valeurs strictement positives, $\forall x, y \in I$, $f(x)$ et $f(y)$ sont dans l'ensemble de définition de g et avec $X = f(x)$ et $Y = g(y)$, on obtient :

$$r\left(\frac{f^l(x)}{f^l(y)}\right) \geqslant r\left(\frac{g \circ f(x)}{g \circ f(y)}\right) \quad \text{pour tous réels } x, y \in I.$$

Mais on a vu à la question **12.** que si f est k-faible et g est l-faible alors $f \times g$ est $(k+l)$-faible.
Comme f est k-faible, $f^l = \underbrace{f \times f \times \cdots \times f}_{l \text{ facteurs}}$ est $\underbrace{k + k + \cdots + k}_{l \text{ termes}} = (l \times k)$-faible.

Donc $r\left(\dfrac{x^{kl}}{y^{kl}}\right) \geqslant r\left(\dfrac{f^l(x)}{f^l(y)}\right)$ et en combinant avec la dernière inégalité on obtient :

$$\forall x, y \in I, \quad r\left(\frac{x^{kl}}{y^{kl}}\right) \geqslant r\left(\frac{g \circ f(x)}{g \circ f(y)}\right)$$

si bien que $g \circ f$ est $(k \times l)$-faible, donc faible.
Ainsi, $\boxed{\text{si } f \text{ et } g \text{ sont faibles alors la fonction } g \circ f \text{ est faible}}$.

b. On raisonne de la même manière, en remplaçant les symboles "$\geqslant$" par des symboles "$\leqslant$", pour montrer que : $\boxed{\text{si } f \text{ et } g \text{ sont fortes alors la fonction } g\circ f \text{ est forte}}$.

IV – Application à la démonstration d'inégalités

14. Soit $a, b, c \in]0\,;\,+\infty[$ et n entier $n \geqslant 1$.

La fonction $f : x \mapsto (x+c)^n$ est définie, dérivable sur $I =]0\,;\,+\infty[$ et sa dérivée est continue sur I car c'est une fonction polynôme.

$$\begin{aligned} \left|f'(x)\right| &= n(x+c)^{n-1} \quad \text{car } n, x \text{ et } c \text{ sont positifs} \\ &= n\frac{f(x)}{x+c} \\ &\leqslant n\frac{f(x)}{x} \quad \text{car } c > 0. \end{aligned}$$

Donc f est n-faible sur I d'après la question **9.b.** et, d'après la **6.**, on a :

$$\frac{f(a)}{f(b)} + \frac{f(b)}{f(a)} \leqslant \frac{a^n}{b^n} + \frac{b^n}{a^n}.$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall a, b, c \in]0\,;\,+\infty[, \qquad \frac{(a+c)^n}{(b+c)^n} + \frac{(b+c)^n}{(a+c)^n} \leqslant \left(\frac{a}{b}\right)^n + \left(\frac{b}{a}\right)^n}.$$

15. **1°** Avec la fonction $f = \sin$ définie et dérivable à dérivée continue sur $I = \left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$, on a :

$$\begin{aligned} \left|f'(x)\right| &= |\cos(x)| \\ &= \cos(x) \quad \text{car } x \in \left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[\\ &\leqslant \frac{\sin(x)}{x} \quad \text{car } \tan(x) > x \text{ sur } \left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[\\ &= \frac{f(x)}{x}. \end{aligned}$$

Donc f est 1-faible d'après la question **9.**, et pour tous réels $a, b \in \left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$ on a :

$$\frac{f(a)}{f(b)} + \frac{f(b)}{f(a)} \leqslant \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$$

$$\frac{\sin(a)}{\sin(b)} + \frac{\sin(b)}{\sin(a)} \leqslant \frac{a}{b} + \frac{b}{a}.$$

2° Avec la fonction $f = \tan$ définie et dérivable à dérivée continue sur $I = \left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$, on a :

$$\begin{aligned} \left|f'(x)\right| &= \left|1+\tan^2(x)\right| \\ &= 1+\tan^2(x) \quad \text{car } X^2 \geqslant 0 \text{ si } X \text{ est réel} \\ &\geqslant 2\tan(x) \quad \text{car } (1-\tan(x))^2 \geqslant 0 \text{ donc } 1 - 2\tan(x) + \tan^2(x) \geqslant 0 \\ &\geqslant \tan(x) \quad \text{car } \tan(x) > 0 \text{ car } x \in \left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[. \end{aligned}$$

Donc f est 1-forte d'après la question **9.**, et pour tous réels $a, b \in \left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$ on a :

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \leqslant \frac{\tan(a)}{\tan(b)} + \frac{\tan(b)}{\tan(a)}.$$

À l'aide des deux inégalités obtenues en **1°** et en **2°**, on obtient :

$$\boxed{\forall a, b \in \left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[, \qquad \frac{\sin(a)}{\sin(b)} + \frac{\sin(b)}{\sin(a)} \leqslant \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \leqslant \frac{\tan(a)}{\tan(b)} + \frac{\tan(b)}{\tan(a)}}.$$